УДК 513.88

Г. М. Піпа, О. Г. Сторож

АКРЕТИВНІ ЗБУРЕННЯ ВЛАСНИХ РОЗШИРЕНЬ ДОДАТНО ВИЗНАЧЕНОГО ОПЕРАТОРА*

H. M. Pipa, O. G. Storozh. *Accretive perturbations of some proper extensions of a positively definite operator*, Matematychni Studii, **25** (2006) 181–190.

Operator T which may be interpreted as perturbation of some proper extension of a given positively definite linear operator in a Hilbert space is investigated. Applying the methods of expansion theory, one criterion of maximal accretiveness for investigated operator is established.

Г. М. Пипа, О. Г. Сторож. *Аккретивные возмущения собственных расширений положительно определенного оператора* // Математичні Студії. – 2006. – Т.25, №2. – С.181–190.

Исследуется оператор T, который интерпретируется как возмущение некоторого собственного расширения заданного положительно определенного линейного оператора, действующего в гильбертовом пространстве. Установлен критерий максимальной аккретивности исследуемого оператора

У цій статті в термінах абстрактних крайових умов встановлено критерій максимальної θ– акретивності та максимальної невід'ємності для одного класу операторів $T \in \mathcal{C}(H)$ (тут і далі H — фіксований комплексний гільбертів простір зі скалярним добутком $(.|.)$, $\mathcal{C}(H)$ — клас замкнених лінійних щільно визначених операторів, що діють у просторі H, а $D(T)$, $R(T)$, $\ker T$ — відповідно область визначення, область значень і многовид нулів лінійного оператора T). Нагадаємо, що лінійній оператор $T : H \to H$ називається θ– акретивним ($-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$), якщо

$$\forall y \in D(T) \qquad \arg{(Ty|y)} \in \left[\theta - \frac{\pi}{2}; \theta + \frac{\pi}{2}\right]$$

і максимально θ– акретивним, якщо, крім цього, він не має нетривіальних θ– акретивних розширень. Під акретивним оператором розуміємо 0– акретивний оператор.

Зазначимо, що задачу про опис усіх максимально акретивних розширень щільно визначеного акретивного оператора було поставлено Р.С. Філліпсом [1] у зв'язку з дослідженням конкретних задач математичної фізики, і що оператор $T \in \mathcal{C}(H)$ є максимально акретивним тоді і тільки тоді, коли $-T$ є генератором стискуючої півгрупи класу (C_0) (деталі — див. [2–4]).

Різні питання теорії розширень акретивних (перш за все диференціальних) операторів досліджено в ряді праць (див., наприклад, [5–10]). З іншого боку, відзначимо,

2000 *Mathematics Subject Classification:* 47A55, 47B25, 47B44.
*Ця робота була частково підтримана ДФФД, проект N 01.07/001722000

що протягом останніх років увагу багатьох математиків привертали абстрактні моделі збурень диференціальних операторів, які (збурення) змінюють не тільки закон дії оператора, але і його область визначення (див. [11] та цитовану там літеретуру). Одна з таких моделей була запропонована В.Е. Лянце [12] і знайшла свій подальший розвиток в [13–16]. У цій праці, результати, викладені в [12–16], перенесено на більш загальні класи операторів.

Зазначимо, що (крім згаданих вище) ми використовуємо такі позначення: $\mathcal{B}(X,Y)$ — простір лінійних неперервних операторів, що діють з гільбертового простору X у гільбертів простір Y; $\mathcal{B}(X) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathcal{B}(X,X)$; $\mathcal{B}^f(X,Y)$ — простір скінченно-вимірних операторів з класу $\mathcal{B}(X,Y)$; $A|E$ — звуження оператора A на множину E; $\mathbf{1}_X$ — оператор тотожного перетворення у просторі X; $\oplus$, $\dotplus$ — символи ортогональної та прямої суми; якщо $A_i : X \to Y_i$, $i \in \{1,\dots,n\}$, — лінійні оператори, то запис $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_n$ означає, що $\forall x \in X \quad Ax = (A_1x, ..., A_nx)$; T^* — оператор, спряжений з оператором T; $\overline{E}$ — замикання множини E.

Роль вихідного об'єкта тут, як і в [14–16], відіграє додатно визначений оператор $L_0 \in \mathcal{C}(H)$. Через L_F позначаємо розширення за Фрідріхсом оператора L_0, а через H_e та $(.|.)_e$ — його енергетичний простір та відповідний скалярний добуток:

$$\forall u, v \in H_e \qquad (u|v)_e = \left(L_F^{\frac{1}{2}}u|L_F^{\frac{1}{2}}v\right).$$

Під $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ розуміємо фіксований позитивний простір граничних значень оператора L_0, що відповідає розширенню L_F (деталі див. [5,17,18]), під $D[T]$, де $T \in \mathcal{C}(H)$ — многовид $D(T)$, трактований як гільбертів простір зі скалярним добутком

$$\forall y, z \in D(T) \qquad (y|z)_T = (y|z) + (Ty|Tz)$$

та відповідною нормою графіка $||.||_T$, а під $\mathcal{P}$ — проектор $H_e \dotplus \ker L \to H_e$ паралельно до $\ker L$ (тут і далі $L \stackrel{\mathrm{def}}{=} L_0^*$).

Якщо $\Psi \in \mathcal{B}(H_e, \mathcal{H})$, то (спряжений) оператор $\Psi^\bullet$ визначаємо виходячи з умови

$$(\forall u \in H_e) \;\; (\forall h \in \mathcal{H}) \quad (\Psi u|h)_{\mathcal{H}} = (u|\Psi^\bullet h)_e.$$

Далі, нехай $\mathcal{A}_{ij} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ $(i,j \in \{1,2\})$, причому оператор $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11} & \mathcal{A}_{12} \\ \mathcal{A}_{21} & \mathcal{A}_{22} \end{pmatrix}$ є оборотним в $\mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$, $\mathcal{U}_i = \mathcal{A}_{i1}\Gamma_1 + \mathcal{A}_{i2}\Gamma_2$ $(i \in \{1,2\})$, $\Gamma = \Gamma_1 \oplus \Gamma_2$, $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2$ (так що $\mathcal{U} = \mathcal{A}\Gamma$), а $\widetilde{\mathcal{U}} = \widetilde{\mathcal{U}}_1 \oplus \widetilde{\mathcal{U}}_2$, де $\widetilde{\mathcal{U}}_1$, $\widetilde{\mathcal{U}}_2$ однозначно визначаються виходячи з $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$ згідо умови

$$\forall y, z \in D(L) \quad (Ly|z) - (y|Lz) = (\mathcal{U}_1 y|\widetilde{\mathcal{U}}_2 z)_{\mathcal{H}} - (\mathcal{U}_2 y|\widetilde{\mathcal{U}}_1 z)_{\mathcal{H}} \tag{1}$$

Крім цього, ми вважаємо даними оператори $\Phi \in \mathcal{B}(H,\mathcal{H})$, $\Psi \in \mathcal{B}(H_e,\mathcal{H})$, $C_i \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ $(i \in \{1,2\})$ такі, що

$$R(\Psi^\bullet) \cap D(L_F) = \{0\}, \tag{2}$$

$$R(\Psi) = R(\Psi|D(L_0)) \stackrel{\mathrm{def}}{=} G \text{ замкнена в } \mathcal{H}, \tag{3}$$

$$\ker L \dotplus R(\Psi^\bullet) \text{ замкнена в } H, \tag{4}$$

$$R(C_i|G) \text{ замкнена в } \mathcal{H} (i = 1,2). \tag{5}$$

Введемо позначення: $\chi = \Psi\mathcal{P} + \Phi$, $\Psi_i = C_i\Psi$, $\Phi_i = C_i\Phi$, $\chi_i = C_i\chi$, $\chi_i^\bullet = (\chi_i|H_e)^\bullet$, $(i \in \{1,2\})$, і зазначимо, що, як і в [15–16], під $W^{(\Psi)}$ ми розуміємо продовження за лінійністю нулем на $R(\Psi^\bullet)$ оператора $W \in \mathcal{B}(D[L], \mathcal{H})$, а під Γ_3 — відображення $D(L) \dot{+} R(\Psi^\bullet) \to R(\Psi)$, яке визначається виходячи з умови

$$\Gamma_3 y = h \Leftrightarrow y + \Psi^\bullet h \in D(L).$$

Метою цієї праці є встановлення умов максимальної θ– акретивності та максимальної невід'ємності оператора T, визначеного за допомогою співвідношень

$$D(T) = \{y \in D(L) + R(\chi_2^\bullet) : y + \chi_2^\bullet \mathcal{U}_2^{(\Psi)} y \in D(L),\ \ \mathcal{U}_1^{(\Psi)} y = \chi_1 y\}, \tag{6}$$

$$\forall y \in D(T) \quad Ty = L(y + \chi_2^\bullet \mathcal{U}_2^{(\Psi)} y). \tag{7}$$

У випадку, коли $\Psi = 0$, ці умови встановлено в [14], а у випадку, коли $\dim \mathcal{H} < \infty$ — в [15].

Нижче скрізь ми припускаємо, що справджуються умови, які гарантують замкненість та щільну визначеність оператора (6)–(7). Деякі з цих умов наведено в [16], де також показано, що в цьому випадку

$$D(T^*) = \{z \in D(L) + R(\chi_1^\bullet) : z + \chi_1^\bullet \widetilde{\mathcal{U}}_2^{(\Psi)} z \in D(L),\ \ \widetilde{\mathcal{U}}_1^{(\Psi)} z = \chi_2 z\}, \tag{8}$$

$$\forall z \in D(T^*) \quad T^* z = L(z + \chi_1^\bullet \widetilde{\mathcal{U}}_2^{(\Psi)} z). \tag{9}$$

Відомо [1, 19] (див. також [5, 6, 18] та цитовану там літературу), що оператор $T \in \mathcal{C}(H)$ є максимально θ– акретивним (максимально невід'ємним) тоді і тільки тоді, коли T^* є максимально $(-\theta)$– акретивним (максимально невід'ємним), тому розглянемо спочатку деякі властивості оператора (8)–(9).

Для цього введемо в розгляд оператори $L_{\min} \stackrel{\text{def}}{=} L_0|\ker \Psi$, та $L_{\max}$, де $D(L_{\max}) = D(L) \dot{+} R(\Psi^\bullet) \stackrel{\text{def}}{=} D_{\max}$,

$$\forall y \in D_{\max} \qquad L_{\max} y = L(y + \Psi^\bullet \Gamma_3 y).$$

З (2)–(4) та результатів, викладених в [16, 21], випливає, що $L_{\min}, L_{\max} \in \mathcal{C}(H)$ і $L_{\min}^* = L_{\max}$.

Лема 1. *Множина $\{(\widetilde{\mathcal{U}}_2^{(\Psi)} z, -\chi z) : z \in D(T^*)\}$ щільна в $\mathcal{H} \oplus \overline{R(\chi)}$. Зокрема, якщо $\Phi \in \mathcal{B}^f(H, \mathcal{H})$ то ця множина є замкненою і збігається з $\mathcal{H} \oplus R(\chi)$.*

Для доведення досить модифікувати міркування, використані при доведенні аналогічних тверджень, викладених в [13–15].

Лема 2. *Приймемо для будь-якого $h = (h_1, h_2) \in \mathcal{H} \oplus R(\chi)$*

$$\begin{gathered} D_h = \{z \in D_{\max} : z + \chi^\bullet C_1^* h_1 \in D(L),\ \ \Gamma_1^{(\Psi)} z = -(\mathcal{A}_{12}^* h_1 + \mathcal{A}_{22}^* C_2 h_2), \\ \Gamma_2^{(\Psi)} z = \mathcal{A}_{11}^* h_1 + \mathcal{A}_{21}^* C_2 h_2,\ \ \chi z = -h_2\}, \end{gathered} \tag{10}$$

Елемент $z \in D_{\max}$ належить до $D(T^*)$ тоді і тільки тоді, коли для деякого $h = (h_1, h_2) \in \mathcal{H} \oplus R(\chi)$ $\quad z \in D_h$. При цьому

$$h_1 = \widetilde{\mathcal{U}}_2^{(\Psi)} z. \tag{11}$$

Щоб переконатися в цьому, досить узагальнити міркування, використані в [15] при доведенні леми 1, див. також [14, лема 1].

Введемо позначення:

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & i\mathbf{1}_{\mathcal{H}} \\ -i\mathbf{1}_{\mathcal{H}} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{X} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_{\mathcal{H}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

$$\mathcal{Y} = -P\left[\begin{pmatrix} \mathbf{1}_{\mathcal{H}} & 0 \\ 0 & C_2^* \end{pmatrix} \mathcal{A}\mathcal{X}\mathcal{A}^* \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{\mathcal{H}} & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{\mathcal{H}} & 0 \\ 0 & C_1^* \end{pmatrix} \mathcal{X}^* \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{\mathcal{H}} & 0 \\ 0 & C_1 \end{pmatrix}\right] P, \tag{13}$$

де P — ортопроектор $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \to \mathcal{H} \oplus \overline{R(\chi)}$.

Далі, нехай $\widehat{L}_F$ — розширення за Фрідріхсом оператора $L_{\min}$, а $\widehat{\mathcal{P}} : D(L_{\max}) \to D(\widehat{L}_F)$ — проектор, що відповідає встановленому у [20] розкладові $D(L_{\max}) = D(\widehat{L}_F) \dotplus \ker L_{\max}$.

Лема 3. *Нехай $h = (h_1, h_2) \in \mathcal{H} \oplus R(\chi)$. Тоді $\forall z \in D_h$*

$$(T^* z|z) = (\widehat{L}_F \widehat{\mathcal{P}} z|\widehat{\mathcal{P}} z) + ((\Psi\Psi^\bullet)^{-1}\Gamma_4 z|\Gamma_4 z)_{\mathcal{H}} + (\mathcal{Y}h|h)_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}} \tag{14}$$

(тут і далі $\Gamma_4 \stackrel{\text{def}}{=} \Psi\mathcal{P}|D_{\max}$).

Доведення. З результатів, викладених в [16] (див. також [5, 15, 21]) випливає, що $\forall y, z \in D_{\max}$

$$(L_{\max} y|z) = (\widehat{L}_F \widehat{\mathcal{P}} y|\widehat{\mathcal{P}} z) + (\Gamma_1^{(\Psi)} y|\Gamma_2^{(\Psi)} z)_{\mathcal{H}} + (\Gamma_3 y + (\Psi\Psi^\bullet)^{-1}\Gamma_4 y|\Gamma_4 z)_{\mathcal{H}},$$

тому для будь-якого $z \in D(T^*)$

$$(T^* z|z) = (\widehat{L}_F \widehat{\mathcal{P}} z|\widehat{\mathcal{P}} z) + ((\Psi\Psi^\bullet)^{-1}\Gamma_4 z|\Gamma_4 z)_{\mathcal{H}} + (\Gamma_1^{(\Psi)} z|\Gamma_2^{(\Psi)} z)_{\mathcal{H}} + (\Gamma_3 z|\Gamma_4 z)_{\mathcal{H}} +$$

$$+ (\widetilde{\mathcal{U}}_2^{(\Psi)} z|C_1 \Phi z)_{\mathcal{H}}.$$

Легко бачити, що $(\Gamma_3 z|\Gamma_4 z)_{\mathcal{H}} + (\widetilde{\mathcal{U}}_2^{(\Psi)} z|C_1\Phi z)_{\mathcal{H}} = (\mathcal{U}_2^{(\Psi)} z|C_1 \chi z)_{\mathcal{H}}$. Крім цього, враховуючи (10)–(11) та співвідношення

$$\mathcal{J} = -2\operatorname{Im}\mathcal{X}, \quad \mathcal{J}\mathcal{X}\mathcal{J} = -\mathcal{X}^*, \quad \mathcal{J}\mathcal{X}^*\mathcal{J} = -\mathcal{X},$$

правильність яких перевіряється виходячи з (12) за допомогою прямих обчислень, отримуємо:

$$(\Gamma_1^{(\Psi)} z|\Gamma_2^{(\Psi)} z)_{\mathcal{H}} = -\left(\begin{pmatrix} \mathbf{1}_{\mathcal{H}} & 0 \\ 0 & C_1^* \end{pmatrix} \mathcal{X}^* \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{\mathcal{H}} & 0 \\ 0 & C_1 \end{pmatrix} h \Big| h\right)_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}}.$$

Лему доведено. □

Введемо в розгляд оператор $L_1 \stackrel{\text{def}}{=} L|\ker\mathcal{U}_1$. Відомо [13], що $L_1^* = L|\ker\widetilde{\mathcal{U}}_1$.

Теорема 1. *Якщо оператор $\mathcal{Y}$ визначений згідно з (13), є $(-\theta)$- акретивним, то й оператори T^* та L_1^* є $(-\theta)$– акретивними. При цьому такі твердження рівносильні:*

а) T *— максимально* θ*– акретивний оператор;*

б) L_1 *— максимально* θ*– акретивний оператор;*

в) $\ker(\mathcal{A}_{11} - e^{-i\theta}\mathcal{A}_{12}) = \{0\}$.

Доведення. $(-\theta)$– акретивність оператора T^* випливає безпосередньо з (14). Далі з $(-\theta)$– акретивності оператора $\mathcal{Y}$ випливає $(-\theta)$– акретивниість оператора $-\mathcal{A}_{11}\mathcal{A}_{12}^*$, а отже й оператора L_1^*, [14]. З результатів згаданої праці випливає також рівносильність умов б) та в). Еквівалентність тверджень а) та б) у випадку, коли $\dim R(\chi) < \infty$, випливає з лем 1 та 2. В загальному випадку потрібно модифікувати міркування, використані при доведенні теореми 1 з праці [22]. □

За подібною схемою доводиться і

Теорема 2. *Якщо* $\mathcal{Y} \geq 0$, *то* $T^* \geq 0$. *При цьому* $T = T^* \Leftrightarrow \ker(\mathcal{A}_{11} \pm i\mathcal{A}_{12}) = \{0\} \Leftrightarrow \ker(\mathcal{A}_{11} - \mathcal{A}_{12}) = \{0\}$.

Зауваження. Оператор L_1 можна отримати з оператора T, якщо підставити в (6)–(7) $\chi_1 = \chi_2 = 0$. Тому T можна інтерпретувати як збурення оператора L_1 (яке змінює не тільки закон його дії, а й область визначення).

Лема 4. *Для будь-якого* $z \in D_{\max}$

$$(\widehat{L}_F\widehat{\mathcal{P}}z|\widehat{\mathcal{P}}z) + ((\Psi\Psi^\bullet)^{-1}\Gamma_4 z|\Gamma_4 z)_{\mathcal{H}} = ||\mathcal{P}z||_e^2. \tag{15}$$

Доведення. Перш за все, зазначимо, що тут $(.|.)_e$ означає скалярний добуток як енергетичного простору оператора $L_{\min}$, так і енергетичного простору оператора L_0. Це не призводить до непорозумінь, оскільки перший з них є підпростором другого.

Далі, нехай $\Pi \overset{\text{def}}{=} \Psi^\bullet(\Psi\Psi^\bullet)^{-1}\Psi$. Легко бачити, що Π – $(.|.)_e$ — ортопроектор $H_e \to R(\Psi^\bullet)$. Крім цього, як випливає зі сказаного в [21],

$$\forall z \in D_{\max} \qquad \widehat{\mathcal{P}}z = \mathcal{P}z - \Pi\mathcal{P}z. \tag{16}$$

Беручи до уваги (16) та рівності $\Pi = \Pi^* = \Pi^2$, отримуємо

$$(\widehat{L}_F\widehat{\mathcal{P}}z|\widehat{\mathcal{P}}z) + ((\Psi\Psi^\bullet)^{-1}\Gamma_4 z|\Gamma_4 z)_{\mathcal{H}} = ||\widehat{\mathcal{P}}z||_e^2 + (\Pi\mathcal{P}z|\mathcal{P}z)_{\mathcal{H}} =$$

$$= (\mathcal{P}z - \Pi\mathcal{P}z|\mathcal{P}z - \Pi\mathcal{P}z)_e + (\Pi\mathcal{P}z|\mathcal{P}z)_{\mathcal{H}} = ||\mathcal{P}z||_e^2.$$

Рівність (15) доведено. □

Покладемо $Z_0 = (\Gamma_1 L_F^{-1})^*$. Оскільки $Z_0 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, H)$, причому $R(Z_0) = \ker L$ і $\Gamma_2 Z_0 = \mathbf{1}_{\mathcal{H}}$ [13], то

$$\Gamma_1 Z_0 = 0, \qquad \mathcal{P}|D_{\max} = \mathbf{1}_{\mathcal{H}} - Z_0\Gamma_2^{(\Psi)}. \tag{17}$$

Далі, визначимо оператор $F \in \mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus \overline{R(\chi)}, \overline{R(\chi)})$ (при $h = (h_1, h_2)$) за допомогою співвідношення

$$Fh = \chi Z_0\mathcal{A}_{11}^* h_1 + (\mathbf{1}_{\mathcal{H}} + \chi Z_0\mathcal{A}_{21}^* C_2)h_2. \tag{18}$$

Лема 5. $\mathcal{P}D_h = R_h$, *де*

$$R_h = \{u \in \ker\Gamma_2^{(\Psi)} : \Gamma_1^{(\Psi)}u = -(\mathcal{A}_{12}^* h_1 + \mathcal{A}_{22}^* C_2 h_2), \quad \chi u = -Fh\}.$$

Доведення. Включення $\mathcal{P}D_h \subset R_h$ випливає безпосередньо з (10), (11), (17), (18).

Навпаки, нехай $u \in R_h$, $z \in D_h$, а $v = z + u - \mathcal{P}z = u + Z_0\Gamma_2^{(\Psi)}z$. Маємо: $\Gamma_2^{(\Psi)}v = \mathcal{A}_{11}^* h_1 + \mathcal{A}_{21}^* C_2 h_2$, $\Gamma_1^{(\Psi)}v = -(\mathcal{A}_{12}^* h_1 + \mathcal{A}_{22}^* C_2 h_2)$, $\chi v = -h_2$ (це також випливає з (10), (11), (17), (18)). Таким чином, $v \in D_h$. Крім цього, $\mathcal{P}v = \mathcal{P}u = u - Z_0\Gamma_2^{(\Psi)}u = u$, тобто $R_h \in \mathcal{P}D_h$. Лему доведено. □

Нижче скрізь розглядається ситуація, коли Φ — скінченновимірний оператор.

Лема 6. *Нехай* $\Phi \in \mathcal{B}^f(H, \mathcal{H})$, $a \in R(\chi)$, $b \in \mathcal{H}$. *Тоді*

$$\overline{\{u \in \ker \Gamma_2^{(\Psi)} : \chi u = a, \Gamma_1^{(\Psi)} u = b\}}^e = \{u \in H_e : \chi u = a\},$$

де $\overline{E}^e$ *— замикання множини* E *за нормою* $||u||_e = (u|u)_e^{\frac{1}{2}}$.

Доведення. Нехай $u \in H_e$ і $\chi u = a$. Позначимо: $\Phi u = a_1$. Таким чином,

$$u \in \{u \in H_e : \Phi u = a_1, \Psi u = a - a_1\} \stackrel{\text{def}}{=} H_e(a, a_1).$$

Відомо [13, с. 195], що:
а) якщо $\dim R(\Phi) = r$, а $\{e_i\}_{i=1}^r$ — ортонормована база в $R(\Phi)$, то

$$(\forall i \in \{1, ..., r\}) \ \ (\exists v_i \in D_{\min}) \quad \{\Phi v_i = e_i\}; \tag{19}$$

б) якщо $u \in H_e(a, a_1)$, то

$$(\forall b \in \mathcal{H}) \ \ (\exists u_0 \in D(L_F) = \ker \Gamma_2^{(\Psi)} \cap \ker \Gamma_3)$$

$$\{\Phi u_0 = a_1, \quad \Psi u_0 = a - a_1, \quad \Gamma_1 u_0 = \Gamma_1^{(\Psi)} u_0 = b\}.$$

Зрозуміло, що $u - u_0 \in H_e \cap \ker \Psi$. Але $H_e \cap \ker \Psi$ — це енергетичний простір оператора $L_{\min}$ (див. [21] та цитовану там літературу), тому існує послідовність $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D_{\min}$, яка збігається до $u - u_0$ за нормою $||.||_e$.

Нехай $u_n = w_n + \sum_{i=1}^r \alpha_{n,i} v_i$, де $w_n \in D_{\min} \cap \ker \Psi$, $\alpha_{n,1}, ..., \alpha_{n,r} \in C$, а $v_1, ..., v_r$ ті самі, що в (19).

Оскільки $\Phi u_n = \sum_{i=1}^r \alpha_{n,i} e_i$, а $\lim_{n\to\infty} \Phi u_n = \Phi(u - u_0) = 0$, то $\lim_{n\to\infty} \alpha_{n,i} = 0$ ($i \in \{1, \ldots, r\}$), а отже послідовність $\{u_0 + w_n\}_{n=1}^{\infty}$ збігається до u за нормою $||.||_e$. Оскільки $\Gamma_1^{(\Psi)}(u_0 + w_n) = b$, $\Gamma_2^{(\Psi)}(u_0 + w_n) = 0$, $\Phi(u_0 + w_n) = a_1$, $\Psi(u_0 + w_n) = a - a_1$, то включення " $\supset$ " доведено. Обернене включення є очевидним. □

Лема 7. *Якщо* $\dim R(\Phi) < \infty$, $a \in R(\chi)$, $b \in \mathcal{H}$, *то*

$$\inf\{||u||_e^2 : u \in \ker \Gamma_2^{(\Psi)}, \chi u = a, \Gamma_1^{(\Psi)} u = b\} = ((\chi\chi^{\bullet})^{-1} a | a)_{\mathcal{H}},$$

де $\chi\chi^{\bullet}$ *трактуємо як відображення* $R(\chi) \to R(\chi)$.

Доведення. Перш за все, зазначимо, що в даній ситуації χ, а отже $\chi^{\bullet}$ та $\chi\chi^{\bullet}$, — нормально розв'язні оператори. Далі, з леми 6 зрозуміло, що рівність, яку потрібно довести, рівносильна до такої:

$$\inf\{||u||_e^2 : u \in H_e, \chi u = a\} = ((\chi\chi^{\bullet})^{-1} a | a)_{\mathcal{H}}. \tag{20}$$

З теореми про ортогональну проекцію та рівнсті $H_e = \ker \chi \oplus_e R(\chi^{\bullet})$ випливає, що ліва частина рівності (20) — це квадрат норми $(.|.)_e$ – ортогональної проекції u_0 довільного елемента $u \in H_e$ такого, що $\chi u = a$ на $R(\chi^{\bullet})$. Легко бачити, що $u_0 = \chi^{\bullet}(\chi\chi^{\bullet})^{-1} a$, а отже $||u_0||^2 = ((\chi\chi^{\bullet})^{-1} a | a)_{\mathcal{H}}$. Лему доведено. □

Введемо позначення:

$$\mathcal{F} = PF^*(\chi\chi^\bullet)^{-1}FP, \tag{21}$$

де F визначено згідно з (18).

Твердження 1. *Нехай* $\Phi \in \mathcal{B}^f(H, \mathcal{H})$. *Оператор* T^* $(-\theta)$*– акретивний (невід'ємний) тоді і тільки тоді, коли*

$$\cos\theta \cdot \mathcal{F} + \mathrm{Re}\,(e^{i\theta}\mathcal{Y}) \geq 0, \tag{22}$$

відповідно

$$\mathcal{F} + \mathcal{Y} \geq 0, \tag{23}$$

де $\mathcal{Y}$ *та* $\mathcal{F}$ *такі самі, як в (13), (21).*

Доведення. З лем 4–7 випливає, що

$$\inf_{z \in D_h}[(\widehat{L}_F\widehat{\mathcal{P}}z|\widehat{\mathcal{P}}z) + ((\Psi\Psi^\bullet)^{-1}\Gamma_4 z|\Gamma_4 z)] = \inf_{z \in R_h}||u||_e^2 = (\mathcal{F}h|h)_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}}.$$

Оскільки $D(T^*) = \cup D_h$, де об'єднання беремо за всеможливими $h \in \mathcal{H} \oplus R(\chi)$ (див. леми 1,2), то для завершення доведення досить застосувати лему 3. $\square$

Проілюструємо сказане вище на прикладах, нагадавши попередньо, що у всіх цих прикладах $\chi = \Psi\mathcal{P} + \Phi$, де $\Psi \in \mathcal{B}(H_e, \mathcal{H})$ задовольняє умови (2)–(4), а $\Phi \in \mathcal{B}^f(H, \mathcal{H})$, причому припускаємо, що справджуються наведені в [16] співвідношення, які гарантують замкненість та щільну визначеність розглядуваного оператора.

Приклад 1. Нехай

$$D(T) = \{y \in D(L) : \mathcal{A}_{11}\Gamma_1 y + \mathcal{A}_{12}\Gamma_2 y = \chi y\}, T \subset L, \tag{24}$$

де $\mathcal{A}_{11}, \mathcal{A}_{12} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, причому існують $\mathcal{A}_{21}, \mathcal{A}_{22} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ такі, що $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_{ij})_{i,j=1}^2$ оборотний в $\mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$, а $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Оператор T^* є $(-\theta)$– акретивним тоді і тільки тоді, коли

$$4\mathrm{Re}\,[e^{i\theta}\mathcal{A}_{11}(\chi Z_0 - \mathcal{A}_{12})^*] \geq \sec\theta \cdot \chi\chi^\bullet. \tag{25}$$

Щоб переконатися в цьому, досить застосувати твердження 1 при $C_1 = \mathbf{1}_\mathcal{H}$, $C_2 = 0$, а також використати таке узагальнення критерію Сильвестра: *якщо* $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ *— гільбертові простори,* $B_{ij} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_j, H_i)$ $(i, j \in \{1, 2\})$*, причому* B_{22} *— додатно визначений оператор, то самоспряжений матричний оператор* $(B_{ij})_{i,j=1}^2$ *є невід'ємним тоді і тільки тоді, коли* $B_{11} \geq B_{12}B_{22}^{-1}B_{21}$.

Приклад 2. Нехай $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$,

$$D(T) = \{y \in D_{\max} : y + \chi^\bullet\Gamma_2^{(\Psi)}y \in D(L), \quad \Gamma_1^{(\Psi)}y - B\Gamma_2^{(\Psi)}y = \chi y\}, \tag{26}$$

$$\forall y \in D(T) \qquad Ty = L(y + \chi^\bullet\Gamma_2^{(\Psi)}y). \tag{27}$$

Застосовуючи згадане узагальнення критерію Сильвестра та наслідок 1 при $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_\mathcal{H} & -B \\ 0 & \mathbf{1}_\mathcal{H} \end{pmatrix}$, $C_1 = C_2 = \mathbf{1}_\mathcal{H}$, переконуємось, що T^* є $(-\theta)$– акретивним, відповідно невід'ємним, тоді і тільки тоді, коли

$$\mathrm{Re}\,(2\cos\theta \cdot \chi Z_0 + e^{i\theta}B) \geq \cos\theta \cdot \chi\chi^\bullet,$$

відповідно
$$B = B^*, \quad 2\mathrm{Re}\,(\chi Z_0) + B \geq \chi\chi^\bullet. \tag{28}$$

Але з результатів, викладених в [16], випливає, що самоспряженість оператора B рівносильна самоспряженості оператора (26)–(27), тому цей оператор є максимально невід'ємним тоді і тільки тоді, коли справджуються умови (28).

Введемо позначення $\Lambda \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\chi Z_0)^*(\chi\chi^\bullet)^{-1}\chi Z_0$.

Теорема 3. *Припустимо, що* $\dim R(\chi) < \infty$. *Оператор (6)–(7) максимально* θ*– акретивний, відповідно максимально невід'ємний, тоді і тільки тоді, коли справджується (22), відповідно (23), і*
$$\ker\,[e^{-i\theta}\mathcal{A}_{12} - \mathcal{A}_{11}(\mathbf{1}_{\mathcal{H}} + \cos\theta \cdot \Lambda)] = \{0\},$$
відповідно
$$\ker\,[\mathcal{A}_{12} - \mathcal{A}_{11}(\mathbf{1}_{\mathcal{H}} + \Lambda)] = \{0\}.$$

Доведення аналогічне доведенню теореми 1 з праці [14].

Теорема 4. *Нехай* $\dim R(\chi) < \infty$, *а* $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. *Оператор (24), описаний у прикладі 1, максимально* θ*– акретивний тоді і тільки тоді, коли має місце (25) і*
$$\ker\,[\mathcal{A}_{11} - e^{-i\theta}(\mathcal{A}_{12} - \chi Z_0)] = 0. \tag{29}$$

Доведення. Нехай справджується (25). Тоді
$$4\mathrm{Re}\,[e^{i\theta}\mathcal{A}_{11}(\chi Z_0 - \mathcal{A}_{12})^*] \geq 0. \tag{30}$$

Введемо позначення
$$B_1 = \mathcal{A}_{11}, \qquad B_2 = e^{-i\theta}(\mathcal{A}_{12} - \chi Z_0). \tag{31}$$

Підставляючи (31) в (30), отримуємо: $-4\mathrm{Re}\,(B_1 B_2^*) \geq 0$. Але, як показує безпосередня перевірка, для будь-яких $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$
$$-4\mathrm{Re}\,(B_1 B_2^*) = (B_2 - B_1)(B_2 - B_1)^* - (B_2 + B_1)(B_2 + B_1)^*,$$
тому
$$(B_2 - B_1)(B_2 - B_1)^* \geq (B_2 + B_1)(B_2 + B_1)^*.$$

Звідси і з леми про трійку [13, с. 23] випливає, що існує оператор $K \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ($||K|| \leq 1$) такий, що
$$B_2 + B_1 = (B_2 - B_1)K. \tag{32}$$

Введемо позначення
$$C = \frac{1}{2}(B_2 - B_1) \tag{33}$$
і розв'яжемо систему (32)–(33) відносно B_1, B_2. Отримуємо
$$B_1 = C(K - \mathbf{1}_{\mathcal{H}}), \quad B_2 = C(K + \mathbf{1}_{\mathcal{H}}).$$

Враховуючи (31), (33), приходимо до такого висновку:
$$\mathcal{A}_{11} = C(K - \mathbf{1}_{\mathcal{H}}), \quad \mathcal{A}_{12} - \chi Z_0 = e^{i\theta}C(K + \mathbf{1}_{\mathcal{H}}), \tag{34}$$

де

$$C = \frac{1}{2}[e^{-i\theta}(\mathcal{A}_{12} - \chi Z_0) - \mathcal{A}_{11}]. \tag{35}$$

З (34) випливає, що

$$D(T) = \{y \in D(L) : C(K - \mathbf{1}_{\mathcal{H}})\Gamma_1 y + e^{i\theta} C(K + \mathbf{1}_{\mathcal{H}})\Gamma_2 y = \chi \mathcal{P} y\}.$$

Введемо в розгляд оператори $\widetilde{L} \subset L$, $L_K \subset L$, $\widehat{L} \subset L$ такі, що

$$D(\widetilde{L}) = \{y \in D(L) : \mathcal{A}_{11}\Gamma_1 y + (\mathcal{A}_{12} - \chi Z_0)\Gamma_2 y = 0\} =$$

$$= \{y \in D(L) : C(K - \mathbf{1}_{\mathcal{H}})\Gamma_1 y + e^{i\theta} C(K + \mathbf{1}_{\mathcal{H}})\Gamma_2 y = 0\}.$$

(див. (34)),

$$D(L_K) = \{y \in D(L) : (K - \mathbf{1}_{\mathcal{H}})\Gamma_1 y + e^{i\theta}(K + \mathbf{1}_{\mathcal{H}})\Gamma_2 y = 0\},$$

$$\widehat{L} = T|\ker \chi\mathcal{P} (= \widetilde{L}|\ker \chi\mathcal{P})$$

(нагадаємо, що $\forall y \in D(L) \quad \mathcal{P}y = y - Z_0\Gamma_2 y$ [14]).

Оскільки $\dim R(\chi) < \infty$, то, як легко бачити,

$$R(\chi\mathcal{P}|D(L_0)) = R(\chi|D(L_0)) = R(\chi\mathcal{P}),$$

тому

$$\dim [D(T)/D(\widehat{L})] = \dim [D(\widetilde{L})/D(\widehat{L})] (= \dim R(\chi\mathcal{P})). \tag{36}$$

Далі, L_K — максимально θ– акретивний оператор (див. [5, 18]) і $L_K \subset \widetilde{L}$, тому умова

$$\ker C = \{0\} \tag{37}$$

(тобто умова $L_K = \widetilde{L}$), з огляду на (36), рівносильна такій:

$$\dim [D(T)/D(\widehat{L})] = \dim [D(L_K)/D(\widehat{L})] (< \infty) \tag{38}$$

Оскільки T^* — $(-\theta)$– акретивний оператор, то рівність (38) еквівалентна максимальній θ– акретивності оператора T, див. [1, 19], а також [12] (теорема про індекс). Таким чином, T є максимально θ– акретивним тоді і тільки тоді, коли справджується умова (37), яка (див. (35)) рівносильна до умови (29). $\square$

ЛІТЕРАТУРА

1. Филлипс Р.С. *Диссипативные операторы и гиперболические системы дифференциальных уравнений в частных производных* // Математика (переводы). – 1962. – 6, №4. – С. 11–70.
2. Иосида К. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1967. – 624 с.
3. Функциональный анализ: Сер. Справоч. мат. библиот. Под ред. С.Г. Крейна. – М:. Наука, 1972. – 544 с.

4. Лянце В.Э. *Об одной краевой задаче для параболических систем дифференциальных уравнений с сильно эллиптической правой частью* // Мат. сборник. – 1954. – 35, №2. – С. 357–368.

5. Кочубей А.Н. *Про розширення додатно визначеного симетричного оператора* // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1979. – №3. – С. 168–171.

6. Михайлец В.А. *Спектры операторов и граничные задачи* // Спектр. анализ дифференц. операторов. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1980. – С. 106–131.

7. Evans W.D., Knowles J. *On the extension problem for accretive differential operators* // J. of Funct. Anal. – 1985. – 63, №3. – P. 276–298.

8. Деркач В.А., Маламуд М.М., Цекановский Э.Р. *Секториальные расширения положительного оператора и характеристическая функция* // Докл. АН СССР. – 1988. – 298, №1. – С. 537–541.

9. Арлинский Ю.М. *Максимально секториальные расширения секториальных операторов* // Доп. АН України. – 1993. – №6. – С. 22–28.

10. Арлінський Ю.М. Максимальні акретивні розширення секторіальних операторів. Авторефер. ... д-ра фіз.-мат. н. – К.: 2000. – 36 с.

11. Горбачук В.И., Горбачук М.Л., Кочубей А.Н. *Теория расширений симметрических операторов и граничные задачи для дифференциальных уравнений* // Укр. мат. журн. – 1989. – 41, №10. – С. 1299–1313.

12. Лянце В.Э. *О некоторых соотношениях между замкнутыми операторами* // Докл. АН СССР. – 1972. – 204, №3. – С. 542–545.

13. Лянце В.Э., Сторож О.Г. Методы теории неограниченных операторов. – К.: Наук. думка, – 1983. – 210 с.

14. Сторож О.Г. Аккретивные оперторы, родственные положительно определенному // Укр. мат. журн. – 1989. – 41, №6. – С. 789–794.

15. Мильо О.Я., Сторож О.Г. *Умови максимальної акретивності та максимальної невід'ємності одного класу скінченновимірних збурень додатно визначеного оператора* // Матем. студії. – 1999. – Т. 12, №1. – С. 90–100.

16. Піпа Г.М., Сторож О.Г. *Про один клас збурень власних розширень додатно визначеного оператора* // Доп. НАН України. – 2004, №8. – С. 29–33.

17. Михлин С.Г. Курс математической физики – М.: Наука, 1968. – 576 с.

18. Горбачук В.И., Горбачук М.Л. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – К.: Наукова думка, 1984. – 284 с.

19. Штраус А.В. *О расширениях и характеристической функции симметрического оператора* // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1968. – Т.32, №1. – С. 186–207.

20. Крейн М.Г. *Теория самосопряженных расширений полуограниченых операторов и ее приложения* // Мат. сб. – 1947. – Т. 20, №3. – С. 431–495.

21. Піпа Г.М., Сторож О.Г. *Напівгладкі звуження додатно визначеного оператора та їхні власні розширення* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004, – Т. 47, №2. – С. 84–89.

22. Сторож О.Г., Шувар О.Б. *Умови максимальної дисипативності майже обмежених збурень гладких звужень операторів, спряжених з симетричними* // Укр. мат. журн. – 2004. – Т. 55, №7. – С. 966–976.

Львівський національний університет імені Івана Франка
storozh@franko.lviv.ua

Надійшло 08.09.2005