УДК 517.91: 532.2

І. М. Конет, М. П. Ленюк

УЗАГАЛЬНЕНЕ ІНТЕГРАЛЬНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ТИПУ МЕЛЕРА-ФОКА НА ПОЛЯРНІЙ ОСІ $r \geq R_0 > 0$ З n ТОЧКАМИ СПРЯЖЕННЯ

I. M. Konet, M. P. Lenyuk. *Generalized integral transform of the Meler-Fock type on the polar axis $r \geq R_0 > 0$ with n contact points*, Matematychni Studii, **25** (2006) 169–180.

An integral transform of the Meler-Fock type generated by the hybrid second order differential Legendre operator with n contact points is constructed in the polar axis $r \geq R_0 > 0$ by the method of the delta-shaped sequence (the Dirichlet kernel). The asymptotics of the generalized joined Legendre functions and their derivatives plays an essential role.

И. М. Конет, М. П. Ленюк. *Обобщенное интегральное преобразование типа Мелера-Фока на полярной оси $r \geq R_0 > 0$ с n точками сопряжения* // Математичні Студії. – 2006. – Т.25, №2. – С.169–180.

Методом дельта-образной последовательности (ядро Дирихле) на полярной оси $r \geq R_0 > 0$ с n точками сопряжения интегральное преобразование типа Мелера-Фока, порожденное гибридным дифференциальным оператором Лежандра 2-го порядка. Существенную роль играет асимптотика обобщенных присоединенных функций Лежандра и их производных.

У монографії [1] запроваджено методом дельта-подібної послідовності (ядро Коші) інтегральне перетворення типу Мелера-Фока на полярній осі $r \geq R_0$, а також на полярній осі $r \geq R_0$ з однією та двома точками спряження. Випадок n точок спряження фактично залишився не обгрунтований тому, що ядро Коші вимагає великої технічної роботи: до поставленої змішаної задачі спряження для сепаратної системи із n рівнянь теплопровідності параболічного типу з узагальненим оператором Лежандра застосувати інтегральне перетворення Лапласа; одержану крайову задачу для сепаратної системи узагальнених модифікованих диференціальних рівнянь Лежандра на $(n+1)$-шаровій полярній вісі розв'язати методом Коші (методом функцій впливу), знайшовши таким чином зображення за Лапласом фундаментальної матриці розв'язку задачі Коші для вихідної параболічної задачі; здійснивши повернення до оригіналу, що є самою важчою операцією, одержати структуру ядра Коші - як дельта-подібної послідовності. В цій роботі дамо доведення теореми про інтегральне зображення, використовуючи в якості дельта-подібної послідовності ядро Діріхле [2].

2000 *Mathematics Subject Classification:* 44A15.

Запровадимо інтегральне перетворення, породжене на множині

$$I_{2n}^{+} = \{r : r \in \bigcup_{k=1}^{n+1} (R_{k-1}, R_k);\ R_0 > 0,\ R_{n+1} = \infty\}$$

узагальненим гібридним диференціальним оператором Лежандра 2-го порядку [1]

$$\Lambda_{(\mu)} = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \Theta(r - R_{k-1})\Theta(R_k - r)\Lambda_{(\mu)_k} + a_{n+1}^2 \Theta(r - R_n)\Lambda_{(\mu)_{n+1}}, \tag{1}$$

де $\Theta(x)$ — одинична функція Хевісайда [2], $(\mu)_k = (\mu_{1k}, \mu_{2k})$, $(\mu) = ((\mu)_1, (\mu)_2; \cdots ; (\mu)_n, (\mu)_{n+1}\}$, $\mu_{1k} \geq \mu_{2k} \geq 0$, $k \in \{1, \ldots, n+1\}$; $a_k > 0$,

$$\Lambda_{(\mu)_k} = \frac{d^2}{dr^2} + \operatorname{cth} r \frac{d}{dr} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\Big(\frac{\mu_{1k}^2}{1 - \operatorname{ch} r} + \frac{\mu_{2k}^2}{1 + \operatorname{ch} r}\Big).$$

Означення 1. *Областю визначення оператора* $\Lambda_{(\mu)}$ назвемо множину G вектор-функцій $g(r) = \{g_1(r); g_2(r); \cdots ; g_n(r); g_{n+1}(r)\}$ з такими властивостями:

1) вектор-функція

$$f(r) = \{\Lambda_{(\mu)_1}[g_1(r)]; \Lambda_{(\mu)_2}[g_2(r)]; \cdots ; \Lambda_{(\mu)_n}[g_n(r)]; \Lambda_{(\mu)_{n+1}}[g_{n+1}(r)]\}$$

неперервна на множині I_{2n}^{+};

2) справджуються крайові умови

$$\lim_{r \to 0} \left(\alpha_{11}^0 \frac{d}{dr} + \beta_{11}^0\right) g_1(r) = 0 \qquad \lim_{r \to \infty} e^{\gamma r} g_{n+1}(r) = 0 \tag{2}$$

3) справджуються умови спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j1}^k\right) g_k - \left(\alpha_{j2}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j2}^k\right) g_{k+1}(r)\right]\Bigg|_{r=R_k} = 0,\ j \in \{1, 2\};\ k \in \{1, \ldots, n\}. \tag{3}$$

Будемо вважати, що виконані умови на коефіцієнти: $|\alpha_{11}^0| + |\beta_{11}^0| \neq 0$, $\alpha_{jk}^m \geq 0$, $\beta_{jk}^m \geq 0$; $c_{1m} \cdot c_{2m} > 0$; $c_{jm} = \alpha_{2j}^m \beta_{1j}^m - \alpha_{1j}^m \beta_{2j}^m$.

Розглянемо диференціальне рівняння Лежандра

$$\Big(\Lambda_{(\mu)_k} + b_k^2\Big) u(r) = 0, \quad b_k = a_k^{-1}(\beta^2 + \gamma_k^2)^{1/2}, \quad \gamma_k^2 \geq 0. \tag{4}$$

Фундаментальну систему розв'язків для рівняння Лежандра 2-го порядку (4) утворюють функції $P_{-1/2+ib_k}^{(\mu)_k}(\operatorname{ch} r)$ і

$$\mathcal{L}_{-1/2+ib_k}^{(\mu)_k}(\operatorname{ch} r) \equiv \frac{2}{\pi} e^{-i\mu_{1k}\pi} \Theta_{-1/2+ib_k}^{(\mu)_k}(\operatorname{ch} r)$$

або дві дійсні функції [1]:

$$A_{-1/2+ib_k}^{(\mu)_k}(\operatorname{ch} r) = \frac{1}{z_{(\mu)_k}(\beta)}\Big[\cos \mu_{1k}\pi \mathcal{L}_{-1/2+ib_k}^{(\mu)_k}(\operatorname{ch} r) + i\gamma_{(\mu)_k}(\beta) P_{-1/2+ib_k}^{(\mu)_k}(\operatorname{ch} r)\Big],$$

$$B^{(\mu)_k}_{-1/2+ib_k}(\operatorname{ch} r) = \frac{1}{z_{(\mu)_k}(\beta)}\Big[P^{(\mu)_k}_{-1/2+ib_k}(\operatorname{ch} r) - \sin\mu_{1k}\pi\mathcal{L}^{(\mu)_k}_{-1/2+ib_k}(\operatorname{ch} r)\Big], \tag{5}$$

$$z_{(\mu)_k}(\beta) = \cos\mu_{1k}\pi + i\gamma_{(\mu)_k}(\beta)\sin\mu_{1k}\pi, \quad \gamma_{(\mu)_k}(\beta) = \cos\mu_{1k}\pi\operatorname{sh} 2\pi b_k\times$$
$$\times\Big(\cos\mu_{2k}\pi + \operatorname{ch} 2\pi b_k\cos\mu_{1k}\pi\Big)^{-1}.$$

Для $u \in G$ та $v \in G$ внаслідок умов спряження встановлюємо базову тотожність

$$\Big(u_j\frac{dv_j}{dr} - v_j\frac{du_j}{dr}\Big)\Big|_{r=R_j} = \frac{c_{2j}}{c_{1j}}\Big(u_{j+1}\frac{dv_{j+1}}{dr} - v_{j+1}\frac{du_{j+1}}{dr}\Big)\Big|_{r=R_j}, \ j\in\{1,\dots,n\}. \tag{6}$$

Визначимо скалярний добуток

$$(u,v) = \int\limits_{R_0}^{\infty} u(r)v(r)\sigma(r)dr \equiv \sum_{k=1}^{n}\int\limits_{R_{k-1}}^{R_k} u_k(r)v_k(r)\sigma_k\operatorname{sh} r dr +$$

$$+\int\limits_{R_n}^{\infty} u_{n+1}(r)v_{n+1}(r)\sigma_{n+1}\operatorname{sh} r dr; \quad \sigma_{n+1} = a_{n+1}^{-2},\ \sigma_k = \frac{c_{1k}c_{1,k+1}\cdots c_{1n}}{c_{2k}c_{2,k+1}\cdots c_{2n}}\frac{1}{a_k^2} \tag{7}$$

З використанням базової тотожності (6), безпосередньо інтегруючи під знаком інтегралів в (7) двічі частинами, встановлюємо, що

$$\Big(\Lambda_{(\mu)}[u],v\Big) = \Big(u,\Lambda_{(\mu)}[v]\Big). \tag{8}$$

Рівність (8) показує, що диференціальний оператор $\Lambda_{(\mu)}$, визначений рівністю (1), самоспряжений. Це значить, що спектр оператора $\Lambda_{(\mu)}$ дійсний [3]. Оскільки оператор $\Lambda_{(\mu)}$ має одну особливу точку $r=\infty$, то його спектр неперервний. Отже, спектр диференціального оператора $\Lambda_{(\mu)}$ дійсний і неперервний.

Компоненти $V_{(\mu);k}(r,\beta)$ спектральної вектор-функції

$$V_{(\mu)}(r,\beta) = \{V_{(\mu);1}(r,\beta); V_{(\mu);2}(r,\beta);\cdots; V_{(\mu);k}(r,\beta);\cdots; V_{(\mu);n}(r,\beta); V_{(\mu);n+1}(r,\beta)\}$$

задовольняють диференціальне рівняння Лежандра (4). При цьому виконуються крайові умови

$$(\alpha_{11}^0\frac{d}{dr} + \beta_{11}^0)V_{(\mu);1}(r,\beta)\Big|_{r=R_0} = 0, \quad \lim_{r\to\infty}\Big[\operatorname{sh} r V'_{(\mu);n+1}(r,\beta)\Big] = 0 \tag{9}$$

і умови спряження

$$[(\alpha_{j1}^k\frac{d}{dr} + \beta_{j1}^k)V_{(\mu);k}(r,\beta) - (\alpha_{j2}^k\frac{d}{dr} + \beta_{j2}^k)V_{(\mu);k+1}(r,\beta)]|_{r=R_k} = 0, j\in\{1,2\}; k\in\{1,\dots,n\} \tag{10}$$

Визначимо величини та функції:

$$(k) = 123...k; \quad \nu_k = -\frac{1}{2} + ib_k; \quad (\bar\nu)_k = (\nu_1,\nu_2,...,\nu_k);, \quad \nu_k^{\pm} = \frac{1}{2}(\mu_{1k}\pm\mu_{2k});$$

$$(\bar\mu)_k = \{(\mu)_1;(\mu)_2;...;(\mu)_k\}, \quad \delta_n(\beta) = \prod_{k=1}^{n}\frac{c_{2k}}{\operatorname{sh} R_k}\frac{1}{S_{k+1}(\beta)},$$

$$S_k(\beta) \equiv S_{(\mu)_k}(\beta) = \frac{\pi^3 2^{\mu_{1k}-\mu_{2k}}\gamma_{(\mu)_k}(\beta)}{(\operatorname{sh} 2\pi b_k)\Big|\Gamma(1/2+ib_k+\nu_k^-)\Big|^2\Big|\Gamma(1/2+ib_k+\nu_k^+)\Big|^2};$$

$$Y^{(\mu)_k;k1}_{\nu_k;jm}(\operatorname{ch} R_k) = \alpha^k_{jm}\operatorname{sh} R_k A'^{(\mu)_k}_{\nu_k}(\operatorname{ch} R_k) + \beta^k_{jm} A^{(\mu)_k}_{\nu_k}(\operatorname{ch} R_k),$$

$$Y^{(\mu)_k;k2}_{\nu_k;jm}(\operatorname{ch} R_k) = \alpha^k_{jm}\operatorname{sh} R_k B'^{(\mu)_k}_{\nu_k}(\operatorname{ch} R_k) + \beta^k_{jm} B^{(\mu)_k}_{\nu_k}(\operatorname{ch} R_k),$$

$$\Psi^{((\mu)_k;(\mu)_{k+1});k}_{(\nu_k;\nu_{k+1});mj}(\operatorname{ch} R_k) = Y^{(\mu)_k;km}_{\nu_k;11}(\operatorname{ch} R_k) Y^{(\mu)_{k+1};kj}_{\nu_{k+1};22}(\operatorname{ch} R_k) -$$

$$-Y^{(\mu)_k;km}_{\nu_k;21}(\operatorname{ch} R_k) Y^{(\mu)_{k+1};kj}_{\nu_{k+1};12}(\operatorname{ch} R_k);$$

$$\omega^{(\bar\mu)_1;0}_{(\bar\nu)_1;2}(\beta) = Y^{(\mu)_1;02}_{\nu_1;11}(\operatorname{ch} R_0), \quad \omega^{(\bar\mu)_1;0}_{(\bar\nu)_1;1}(\beta) = Y^{(\mu)_1;01}_{\nu_1;11}(\operatorname{ch} R_0);$$

$$\omega^{(\bar\mu)_{k+1};(k)}_{(\bar\nu)_{k+1};j}(\beta) = \omega^{(\bar\mu)_k;(k-1)}_{(\bar\nu)_k;2}(\beta)\Psi^{((\mu)_k;(\mu)_{k+1});k}_{(\nu_k;\nu_{k+1});1j}(\operatorname{ch} R_k) -$$

$$-\omega^{(\bar\mu)_k;(k-1)}_{(\bar\nu)_k;1}(\beta)\Psi^{((\mu)_k;(\mu)_{k+1});k}_{(\nu_k;\nu_{k+1});2j}(\operatorname{ch} R_k); \quad j \in \{1,2\};\ k \in \{1,\dots,n\}.$$

Безпосередньо перевіряється, що

$$V_{(\mu);1}(r,\beta) = \delta_n(\beta)\Big[\omega^{(\bar\mu)_1;0}_{(\bar\nu)_1;2}(\beta)A^{(\mu)_1}_{\nu_1}(\operatorname{ch} r) - \omega^{(\bar\mu)_1;0}_{(\bar\nu)_1;1}(\beta)B^{(\mu)_1}_{\nu_1}(\operatorname{ch} r)\Big],$$

$$V_{(\mu);k+1}(r,\beta) = \Big(\prod_{j=k+1}^{n}\delta_j(\beta)\Big)\Big[\omega^{(\bar\mu)_{k+1};(k)}_{(\bar\nu)_{k+1};2}(\beta)A^{(\mu)_{k+1}}_{\nu_{k+1}}(\operatorname{ch} r) - \tag{11}$$

$$-\omega^{(\bar\mu)_{k+1};(k)}_{(\bar\nu)_{k+1};1}(\beta)B^{(\mu)_{k+1}}_{\nu_{k+1}}(\operatorname{ch} r)\Big], \quad k \in \{1,\dots,n-1\}$$

$$V_{(\mu);n+1}(r,\beta) = \omega^{(\bar\mu)_{n+1};(n)}_{(\bar\nu)_{n+1};2}(\beta)A^{(\mu)_{n+1}}_{\nu_{n+1}}(\operatorname{ch} r) - \omega^{(\bar\mu)_{n+1};(n)}_{(\bar\nu)_{n+1};1}(\beta)B^{(\mu)_{n+1}}_{\nu_{n+1}}(\operatorname{ch} r).$$

Наявність спектральної функції

$$V_{(\mu)}(r,\beta) = \sum_{k=1}^{n}\Theta(r-R_{k-1})\Theta(R_k-r)V_{(\mu);k}(r,\beta) + \Theta(r-R_n)V_{(\mu);n+1}(r,\beta),$$

спектральної густини

$$\Omega_{(\mu)}(\beta) = \frac{\beta\gamma_{(\mu)_{n+1}}(\beta)S_{n+1}(\beta)}{[\omega^{(\bar\mu)_{n+1};(n)}_{(\bar\nu)_{n+1};1}(\beta)]^2 + [\gamma_{(\mu)_{n+1}}(\beta)]^2[\omega^{(\bar\mu)_{n+1};(n)}_{(\bar\nu)_{n+1};2}(\beta)]^2} \tag{12}$$

і вагової функції

$$\sigma(r) = \Big[\sum_{k=1}^{n}\sigma_k\Theta(r-R_{k-1})\Theta(R_k-r) + \sigma_{n+1}\Theta(r-R_n)\Big]\operatorname{sh} r$$

дозволяє визначити пряме $\mathcal{M}_{(\mu);2n}$ та обернене $\mathcal{M}^{-1}_{(\mu);2n}$ узагальнене гібридне інтегральне перетворення типу Мелера-Фока 2-го роду, породжене на множині I^+_{2n} диференціальним оператором $\Lambda_{(\mu)}$, визначеним рівністю (1) [1]:

$$\mathcal{M}_{(\mu);2n}[g(r)] = \int_{R_0}^{\infty} g(r)V_{(\mu)}(r,\beta)\sigma(r)dr \equiv \tilde g(\beta) = \sum_{j=1}^{n+1}\tilde g_j(\beta) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{R_{j-1}}^{R_j} g_j(r) V_{(\mu);j}(r,\beta)\sigma_j \operatorname{sh} r dr + \int\limits_{R_n}^{\infty} g_{n+1}(r) V_{(\mu);n+1}(r,\beta)\sigma_{n+1}\operatorname{sh} r dr, \tag{13}$$

$$\mathcal{M}^{-1}_{(\mu);2n}[\tilde{g}(\beta)] = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \tilde{g}(\beta) V_{(\mu)}(r,\beta)\Omega_{(\mu)}(\beta)d\beta \equiv g(r). \tag{14}$$

Підставивши (13) в (14), маємо:

$$g(r) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \left(\int\limits_{R_0}^\infty g(\rho)V_{(\mu)}(\rho,\beta)\sigma(\rho)d\rho\right) V_{(\mu)}(r,\beta)\Omega_{(\mu)}(\beta)d\beta = \tag{15}$$

$$= \lim_{M\to\infty}\int\limits_{R_0}^\infty g(\rho)\left(\frac{2}{\pi}\int\limits_0^M V_{(\mu)}(\rho,\beta)V_{(\mu)}(r,\beta)\Omega_{(\mu)}(\beta)d\beta\right)\sigma(\rho)d\rho.$$

Оскільки в розумінні узагальнених функцій

$$\lim_{M\to\infty}\frac{2}{\pi}\int\limits_0^M V_{(\mu)}(r,\beta)V_{(\mu)}(\rho,\beta)\Omega_{(\mu)}(\beta)d\beta = \delta(r-\rho)\Big[\sigma(\rho)\Big]^{-1}, \tag{16}$$

то внутрішній інтеграл є дельта-подібною послідовністю. Встановлення рівності (16) вимагає знання асимптотики функцій $V_{(\mu)}(r,\beta)$ та $\Omega_{(\mu)}(\beta)$ при великих значеннях β, що приводить до технічно громіздкої роботи. Простіше встановити асимптотику функції $V_{(\mu)}(r,\beta)$ при великих значеннях r ($r \vec{=} R >> R_n$). Більше того, формула (13) показує, що треба знати асимптотику функції $V_{(\mu);n+1}(r,\beta)$ та її похідної по r при $r = R \to \infty$.

Опустимо індекс n і будемо вважати, що $(\mu) = (\mu_1,\mu_2)$, де $\mu_1 \geq \mu_2 \geq 0$, а $1/2(\mu_1 \pm \mu_2) = \nu^{\pm}_{(\mu)} \equiv \nu^{\pm}$.

Скористаємо тим, що при великих значеннях r ($r \approx \infty$) [4]

$$e^{-\mu_1\pi i}\Theta^{(\mu)}_{-1/2+i\lambda}(\operatorname{ch} r) \approx 2^{-\nu^-}e^{2i\lambda}e^{-(1/2+i\lambda)r}\frac{\Gamma(1/2+i\lambda+\nu^+)\Gamma(1/2+i\lambda+\nu^-)}{\Gamma(1+2i\lambda)}.$$

На підставі рівності [5]

$$\Gamma(1+2i\lambda) = 2i\lambda\Gamma(2i\lambda) = \pi^{-1/2}2^{2i\lambda}\Gamma(1+i\lambda)\Gamma(1/2+i\lambda)$$

одержуємо, що при $r \approx \infty$

$$\mathcal{L}^{(\mu)}_{-1/2+i\lambda}(\operatorname{ch} r) = \frac{2}{\pi}e^{-\mu_1\pi i}\Theta^{(\mu)}_{-1/2+i\lambda}(\operatorname{ch} r) \approx \frac{e^{-r/2}}{2^{\nu^-}\sqrt{\pi}}e^{-i\lambda r}\frac{\Gamma(1/2+i\lambda+\nu^+)\Gamma(1/2+i\lambda+\nu^-)}{\Gamma(1+2i\lambda)\Gamma(1/2+i\lambda)} \tag{17}$$

Узагальнена приєднана функція Лежандра 1-го роду [4]

$$P^{(\mu)}_{-1/2+i\lambda}(\operatorname{ch} r) = \frac{i}{\operatorname{sh} 2\pi\lambda}\Big[B_1(\lambda)\Theta^{(\mu)}_{-1/2+i\lambda}(\operatorname{ch} r) - B_2(\lambda)\Theta^{(\mu)}_{-1/2-i\lambda}(\operatorname{ch} r)\Big],$$

$$B_1(\lambda) = \cos\pi(\nu^+ + i\lambda)\cos\pi(\nu^- + i\lambda), \quad B_2(\lambda) = \cos\pi(i\lambda-\nu^+)\cos\pi(i\lambda-\nu^-).$$

Внаслідок співвідношень [5]

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+x\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-x\right)=\frac{\pi}{\cos\pi x},\quad \Gamma(1-i\lambda)\Gamma(i\lambda)=-\frac{\pi}{\operatorname{sh}\pi\lambda}i,\quad i^2=-1,$$

та асимпотичної рівності (17) маємо:

$$P^{(\mu)}_{-1/2+i\lambda}(\operatorname{ch} r)\approx\frac{2^{-\nu^-}\sqrt{\pi}}{\operatorname{ch}\pi\lambda}e^{-r/2}\times$$

$$\times\Big[\frac{\Gamma(-i\lambda)}{\Gamma(1/2+i\lambda)\Gamma(1/2-i\lambda-\nu^+)\Gamma(1/2-i\lambda-\nu^-)}e^{-i\lambda r}+$$

$$+\frac{\Gamma(i\lambda)}{\Gamma(1/2-i\lambda)\Gamma(1/2+i\lambda-\nu^+)\Gamma(1/2+i\lambda-\nu^-)}e^{+i\lambda r}\Big].\tag{18}$$

Визначимо функції:

$$a_{(\mu)}(\lambda)=\frac{\sqrt{\pi}}{\operatorname{ch}\pi\lambda}\frac{1}{z_{(\mu)}(\lambda)}\frac{\Gamma(-i\lambda)}{\Gamma(1/2+i\lambda)\Gamma(1/2-i\lambda-\nu^-)\Gamma(1/2-i\lambda-\nu^+)},$$

$$b_{(\mu)}(\lambda)=\frac{\sqrt{\pi}}{\operatorname{ch}\pi\lambda}\frac{1}{z_{(\mu)}(\lambda)}\frac{\Gamma(i\lambda)}{\Gamma(1/2-i\lambda)\Gamma(1/2+i\lambda-\nu^-)\Gamma(1/2+i\lambda-\nu^+)},$$

$$c_{(\mu)}(\lambda)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{z_{(\mu)}(\lambda)}\frac{\Gamma(1/2+i\lambda+\nu^+)\Gamma(1/2+i\lambda+\nu^-)}{\Gamma(1+i\lambda)\Gamma(1/2+i\lambda)},\tag{19}$$

$$z_{(\mu)}(\lambda)=\cos\mu_1\pi+i\gamma_{(\mu)}(\lambda)\sin\mu_1\pi;\quad \gamma_{(\mu)}(\lambda)=\frac{\cos\mu_1\pi\operatorname{sh}2\pi\lambda}{\cos\mu_2\pi+\cos\mu_1\pi\operatorname{ch}2\pi\lambda},$$

$$\gamma_{(\mu);1}(\lambda)=i\gamma_{(\mu)}(\lambda)\Big(a_{(\mu)}(\lambda)+b_{(\mu)}(\lambda)\Big)+\cos\mu_1\pi c_{(\mu)}(\lambda),$$

$$\gamma_{(\mu);2}(\lambda)=\gamma_{(\mu)}(\lambda)\Big(a_{(\mu)}(\lambda)-b_{(\mu)}(\lambda)\Big)-i\cos\mu_1\pi c_{(\mu)}(\lambda),$$

$$\gamma_{(\mu);3}(\lambda)=a_{(\mu)}(\lambda)+b_{(\mu)}(\lambda)-\sin\mu_1\pi c_{(\mu)}(\lambda),$$

$$\gamma_{(\mu);4}(\lambda)=-i\Big(a_{(\mu)}(\lambda)-b_{(\mu)}(\lambda)\Big)+i\sin\mu_1\pi c_{(\mu)}(\lambda).$$

На підставі рівностей [5] і асимтотичних рівностей (17) та (18) отримуємо:

$$A^{(\mu)}_{-1/2+i\lambda}(\operatorname{ch} r)\approx 2^{-\nu^-}e^{-1/2\,r}\Big[\gamma_{(\mu);1}(\lambda)\cos\lambda r+\gamma_{(\mu);2}(\lambda)\sin\lambda r\Big]$$

$$B^{(\mu)}_{-1/2+i\lambda}(\operatorname{ch} r)\approx 2^{-\nu^-}e^{-1/2\,r}\Big[\gamma_{(\mu);3}(\lambda)\cos\lambda r+\gamma_{(\mu);4}(\lambda)\sin\lambda r\Big].\tag{20}$$

При цьому безпосередньо встановлюється, що

$$\gamma_{(\mu+1)}(\lambda)=\gamma_{(\mu)}(\lambda),\quad z_{(\mu+1)}(\lambda)=-z_{(\mu)}(\lambda),\quad a_{(\mu+1)}(\lambda)=\left(\frac{1}{2}+\nu^++i\lambda\right)a_{(\mu)}(\lambda),$$

$$b_{(\mu+1)}(\lambda)=\left(\frac{1}{2}+\nu^+-i\lambda\right)b_{(\mu)}(\lambda),\quad c_{(\mu+1)}(\lambda)=-\left(\frac{1}{2}+\nu^++i\lambda\right)c_{(\mu)}(\lambda);\tag{21}$$

$$\gamma_{(\mu+1);1}(\lambda) = \left(\frac{1}{2} + \nu^+\right)\gamma_{(\mu);1}(\lambda) - \lambda\gamma_{(\mu);2}(\lambda);$$

$$\gamma_{(\mu+1);2}(\lambda) = \left(\frac{1}{2} + \nu^+\right)\gamma_{(\mu);2}(\lambda) + \lambda\gamma_{(\mu);1}(\lambda);$$

$$\gamma_{(\mu+1);3}(\lambda) = \left(\frac{1}{2} + \nu^+\right)\gamma_{(\mu);3}(\lambda) - \lambda\gamma_{(\mu);4}(\lambda);$$

$$\gamma_{(\mu+1);4}(\lambda) = \left(\frac{1}{2} + \nu^+\right)\gamma_{(\mu);4}(\lambda) + \lambda\gamma_{(\mu);3}(\lambda).$$

Якщо скористатися співвідношеннями для похідних [4]

$$\frac{dP^{(\mu)}_{-1/2+i\lambda}(\operatorname{ch} r)}{dr} = \Big(\nu^+\operatorname{cth} r + \nu^-(\operatorname{sh} r)^{-1}\Big)P^{(\mu)}_{-1/2+i\lambda}(\operatorname{ch} r) + P^{(\mu+1)}_{-1/2+i\lambda}(\operatorname{ch} r), \tag{22}$$

$$\frac{d\mathcal{L}^{(\mu)}_{-1/2+i\lambda}(\operatorname{ch} r)}{dr} = \Big(\nu^+\operatorname{cth} r + \nu^-(\operatorname{sh} r)^{-1}\Big)\mathcal{L}^{(\mu)}_{-1/2+i\lambda}(\operatorname{ch} r) - \mathcal{L}^{(\mu+1)}_{-1/2+i\lambda}(\operatorname{ch} r),$$

рівностями (21) і асимптотичними рівностями (20), то одержимо, що

$$\begin{gathered}\frac{dA^{(\mu)}_{-1/2+i\lambda}(\operatorname{ch} r)}{dr} \approx 2^{-\nu^-}e^{-1/2\,r}\Big[\Big(\lambda\gamma_{(\mu);2}(\lambda) - \frac{1}{2}\gamma_{(\mu);1}(\lambda)\Big)\cos\lambda r - \\ -\Big(\lambda\gamma_{(\mu);1}(\lambda) + \frac{1}{2}\gamma_{(\mu);2}(\lambda)\Big)\sin\lambda r\Big], \\ \frac{dB^{(\mu)}_{-1/2+i\lambda}(\operatorname{ch} r)}{dr} \approx 2^{-\nu^-}e^{-1/2\,r}\Big[\Big(\lambda\gamma_{(\mu);4}(\lambda) - \frac{1}{2}\gamma_{(\mu);3}(\lambda)\Big)\cos\lambda r - \\ -\Big(\lambda\gamma_{(\mu);3}(\lambda) + \frac{1}{2}\gamma_{(\mu);4}(\lambda)\Big)\sin\lambda r\Big].\end{gathered} \tag{23}$$

Розглянемо функції:

$$V_{(\mu)}(r,\lambda) = \omega_{(\mu);1}(\lambda)B^{(\mu)}_{-1/2+i\lambda}(\operatorname{ch} r) - \omega_{(\mu);2}(\lambda)A^{(\mu)}_{-1/2+i\lambda}(\operatorname{ch} r),$$

$$\frac{dV_{(\mu)}(r,\lambda)}{dr} = \omega_{(\mu);1}(\lambda)\frac{dB^{(\mu)}_{-1/2+i\lambda}(\operatorname{ch} r)}{dr} - \omega_{(\mu);2}(\lambda)\frac{dA^{(\mu)}_{-1/2+i\lambda}(\operatorname{ch} r)}{dr}.$$

Внаслідок асимтотичних рівностей (20) і (23) маємо асимтотичні рівності:

$$\begin{gathered}V_{(\mu)}(r,\lambda) \approx 2^{-\nu^-}e^{-r/2}\Big[g_{(\mu);1}(\lambda)\cos\lambda r + g_{(\mu);2}(\lambda)\sin\lambda r\Big], \\ \frac{dV_{(\mu)}(r,\lambda)}{dr} \approx 2^{-\nu^-}e^{-r/2}\Big[g_{(\mu);3}(\lambda)\cos\lambda r + g_{(\mu);4}(\lambda)\sin\lambda r\Big].\end{gathered} \tag{24}$$

У рівностях (24) беруть участь функції:

$$\begin{gathered}g_{(\mu);1}(\lambda) = \gamma_{(\mu);3}(\lambda)\omega_{(\mu);1}(\lambda) - \gamma_{(\mu);1}(\lambda)\omega_{(\mu);2}(\lambda); \\ g_{(\mu);2}(\lambda) = \gamma_{(\mu);4}(\lambda)\omega_{(\mu);1}(\lambda) - \gamma_{(\mu);2}(\lambda)\omega_{(\mu);2}(\lambda); \\ g_{(\mu);3}(\lambda) = \Big(\lambda\gamma_{(\mu);4}(\lambda) - \frac{1}{2}\gamma_{(\mu);3}(\lambda)\Big)\omega_{(\mu);1}(\lambda) - \Big(\lambda\gamma_{(\mu);2}(\lambda) - \frac{1}{2}\gamma_{(\mu);1}(\lambda)\Big)\omega_{(\mu);2}(\lambda);\end{gathered} \tag{25}$$

$$g_{(\mu);4}(\lambda)=\Big(\lambda\gamma_{(\mu);1}(\lambda)+\frac{1}{2}\gamma_{(\mu);2}(\lambda)\Big)\omega_{(\mu);2}(\lambda)-\Big(\lambda\gamma_{(\mu);3}(\lambda)+\frac{1}{2}\gamma_{(\mu);4}(\lambda)\Big)\omega_{(\mu);1}(\lambda).$$

Введемо до розгляду функції:

$$\begin{aligned}
G_{(\mu);1}(\lambda,\beta)&=g_{(\mu);1}(\beta)g_{(\mu);3}(\lambda)-g_{(\mu);1}(\lambda)g_{(\mu);3}(\beta)+g_{(\mu);2}(\beta)g_{(\mu);4}(\lambda)-g_{(\mu);2}(\lambda)g_{(\mu);4}(\beta),\\
G_{(\mu);2}(\lambda,\beta)&=g_{(\mu);1}(\beta)g_{(\mu);3}(\lambda)-g_{(\mu);1}(\lambda)g_{(\mu);3}(\beta)-\Big[g_{(\mu);2}(\beta)g_{(\mu);4}(\lambda)-g_{(\mu);2}(\lambda)g_{(\mu);4}(\beta)\Big],\\
G_{(\mu);3}(\lambda,\beta)&=g_{(\mu);2}(\beta)g_{(\mu);3}(\lambda)-g_{(\mu);2}(\lambda)g_{(\mu);3}(\beta)+g_{(\mu);1}(\beta)g_{(\mu);4}(\lambda)-g_{(\mu);1}(\lambda)g_{(\mu);4}(\beta),\\
G_{(\mu);4}(\lambda,\beta)&=g_{(\mu);2}(\beta)g_{(\mu);3}(\lambda)+g_{(\mu);2}(\lambda)g_{(\mu);3}(\beta)-\Big[g_{(\mu);1}(\lambda)g_{(\mu);4}(\beta)+g_{(\mu);1}(\beta)g_{(\mu);4}(\lambda)\Big].
\end{aligned}\tag{26}$$

Зауважимо, що $G_{(\mu);j}(\beta,\beta)=0$, $j\in\{1,2,3\}$,

$$G_{(\mu);4}(\beta,\beta)=2\Big[g_{(\mu);2}(\beta)g_{(\mu);3}(\beta)-g_{(\mu);1}(\beta)g_{(\mu);4}(\beta)\Big].\tag{27}$$

На основі асимтотичних рівностей (24) встановлюємо, що

$$\begin{aligned}
&V_{(\mu)}(r,\beta)\frac{dV_{(\mu)}(r,\lambda)}{dr}-V_{(\mu)}(r,\lambda)\frac{dV_{(\mu)}(r,\beta)}{dr}\approx 2^{-1-\nu^-}e^{-r}\times\\
&\times\Big[G_{(\mu);1}(\lambda,\beta)\cos(\beta-\lambda)r+G_{(\mu);2}(\lambda,\beta)\cos(\beta+\lambda)r+\\
&+G_{(\mu);3}(\lambda,\beta)\sin(\beta+\lambda)r+G_{(\mu);4}(\lambda,\beta)\sin(\beta-\lambda)r\Big].
\end{aligned}\tag{28}$$

Безпосередньо маємо:

$$\begin{aligned}
&g_{(\mu);2}(\beta)g_{(\mu);3}(\beta)-g_{(\mu);1}(\beta)g_{(\mu);4}(\beta)=\beta\Big[\gamma^2_{(\mu);3}(\beta)+\gamma^2_{(\mu);4}(\beta)\Big]\omega^2_{(\mu);1}(\beta)+\\
&+\beta\Big[\gamma^2_{(\mu);1}(\beta)+\gamma^2_{(\mu);2}(\beta)\Big]\omega^2_{(\mu);2}(\beta)-2\beta\omega_{(\mu);1}(\beta)\omega_{(\mu);2}(\beta)\times\\
&\times\Big[\gamma_{(\mu);2}(\beta)\gamma_{(\mu);4}(\beta)+\gamma_{(\mu);1}(\beta)\gamma_{(\mu);3}(\beta)\Big].
\end{aligned}\tag{29}$$

Якщо скористатися виразами для $\gamma_{(\mu);j}(\beta)$, то в результаті елементарних перетворень знаходимо, що

$$\gamma_{(\mu);1}(\beta)\gamma_{(\mu);3}(\beta)+\gamma_{(\mu);2}(\beta)\gamma_{(\mu);4}(\beta)=0,$$

$$\gamma^2_{(\mu);1}(\beta)+\gamma^2_{(\mu);2}(\beta)=\frac{2\mathrm{sh}\,2\pi\beta}{\pi^3\beta}\Big|\Gamma(\frac{1}{2}+i\beta+\nu^+)\Big|^2\Big|\Gamma(\frac{1}{2}+i\beta+\nu^-)\Big|^2,$$

$$\gamma^2_{(\mu);3}(\beta)+\gamma^2_{(\mu);4}(\beta)=\frac{2\pi^{-3}}{\beta\gamma^2_{(\mu)}(\beta)}\mathrm{sh}\,2\pi\beta\Big|\Gamma(\frac{1}{2}+i\beta+\nu^+)\Big|^2\Big|\Gamma(\frac{1}{2}+i\beta+\nu^-)\Big|^2.$$

Якщо покласти

$$S_{(\mu)}(\beta)=\frac{\pi^3 2^{\nu^-}\gamma_{(\mu)}(\beta)}{(\mathrm{sh}\,2\pi\beta)\Big|\Gamma(1/2+i\beta+\nu^+)\Big|^2\Big|\Gamma(1/2+i\beta+\nu^-)\Big|^2},$$

то рівність (29) набуває вигляду:

$$g_{(\mu);2}(\beta)g_{(\mu);3}(\beta)-g_{(\mu);1}(\beta)g_{(\mu);4}(\beta)=\frac{2\,2^{\nu^-}}{\gamma_{(\mu)}(\beta)S_{(\mu)}(\beta)}\Big[\omega^2_{(\mu);1}(\beta)+\gamma^2_{(\mu)}(\beta)\omega^2_{(\mu);2}(\beta)\Big]. \qquad (30)$$

Тоді згідно рівності (27) на підставі формули (30), одержуємо, що

$$G_{(\mu);4}(\beta,\beta)=\frac{4\cdot 2^{\nu^-}}{\gamma_{(\mu)}(\beta)S_{(\mu)}(\beta)}\Big[\omega^2_{(\mu);1}(\beta)+\gamma^2_{(\mu)}(\beta)\omega^2_{(\mu);2}(\beta)\Big]. \qquad (31)$$

Звернемось до формул (13), (14).

Математичним обгрунтуванням формул (13), (14) служить теорема про інтегральне зображення.

Теорема 1. *Якщо вектор-функція*

$$f(r)=\Big[\sum_{k=1}^{n}\Theta(r-R_{k-1})\Theta(R_k-r)\sqrt{\operatorname{sh} r}+e^{1/2\cdot r}\Theta(r-R_n)\Big]g(r)$$

кусково-неперервна, абсолютно сумовна й має обмежену варіацію на множині $[R_0,\infty)$, *то для будь-якого* $r\in I^+_{2n}$ *справджується інтегральне зображення*

$$\frac{1}{2}\Big[g(r+0)+g(r-0)\Big]=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty V_{(\mu)}(r,\beta)\Omega_{(\mu)}(\beta)\int_{R_0}^\infty g(\rho)V_{(\mu)}(\rho,\beta)d\rho d\beta. \qquad (32)$$

Доведення. Для функцій $V_{(\mu);k}(r,\beta)$ та $V_{(\mu);k}(r,\lambda)$, де $\lambda\neq\beta\in(0,\infty)$ і $k\in\{1,\dots,n+1\}$ справджуються рівності

$$\Big[\Lambda_{(\mu)_k}+b_k^2(\beta)\Big]V_{(\mu);k}(r,\beta)=0, \qquad (33)$$

$$\Big[\Lambda_{(\mu)_k}+b_k^2(\lambda)\Big]V_{(\mu);k}(r,\lambda)=0. \qquad (34)$$

Помножимо рівність (33) на функцію $V_{(\mu);k}(r,\lambda)\operatorname{sh} r$, а рівність (34) — на функцію $V_{(\mu);k}(r,\beta)\operatorname{sh} r$ і віднімемо від першої другу:

$$V_{(\mu);k}(r,\lambda)V_{(\mu);k}(r,\beta)\operatorname{sh} r=\frac{a_k^2}{\beta^2-\lambda^2}\frac{d}{dr}\Big[\operatorname{sh} r\Big(V_{(\mu);k}(r,\beta)\times$$

$$\times\frac{dV_{(\mu);k}(r,\lambda)}{dr}-V_{(\mu);k}(r,\lambda)\frac{dV_{(\mu);k}(r,\beta)}{dr}\Big)\Big],\quad k\in\{1,\dots,n+1\}. \qquad (35)$$

Рівність (35) помножимо на $\sigma_k dr$ і проінтегруємо від $r=R_{k-1}$ до $r=R_k$ для $k\in\{1,\dots,n\}$ та від $r=R_n$ до $r=R>>R_n$ для $k=n+1$. Просумуємо одержані вирази. Внаслідок крайової умови в точці $r=R_0$ та базової тотожності (6) одержимо, що

$$\int_0^R V_{(\mu)}(r,\beta)V_{(\mu)}(r,\lambda)\sigma(r)dr=\frac{\operatorname{sh} R}{\beta^2-\lambda^2}\Big[V_{(\mu);n+1}(R,\beta)V'_{(\mu);n+1}(R,\lambda)-$$

$$-V'_{(\mu);n+1}(R,\beta)V_{(\mu);n+1}(r,\lambda)\Big]. \qquad (36)$$

Візьмемо функцію $\psi(\lambda)$, визначену, неперервну, абсолютно сумовну й з обмеженою варіацією на сегменті $[c,d]$, де $0<c<d$.

Знайдемо величину інтегралу

$$J=\frac{2}{\pi}\int\limits_{R_0}^{\infty}\left(\int\limits_{c}^{d}\psi(\lambda)V_{(\mu)}(r,\lambda)\Omega_{(\mu)}(\lambda)d\lambda\right)V_{(\mu)}(r,\beta)\sigma(r)dr. \tag{37}$$

За означенням збіжності невласного інтегралу

$$J=\frac{2}{\pi}\lim_{R\to\infty}\int\limits_{R_0}^{R}\int\limits_{c}^{d}\psi(\lambda)V_{(\mu)}(r,\lambda)\Omega_{(\mu)}(\lambda)d\lambda V_{(\mu)}(r,\beta)\sigma(r)dr=$$

$$=\lim_{R\to\infty}\frac{2}{\pi}\int\limits_{c}^{d}\psi(\lambda)\left(\int\limits_{R_0}^{R}V_{(\mu)}(r,\lambda)V_{(\mu)}(r,\beta)\sigma(r)dr\right)\Omega_{(\mu)}(\lambda)d\lambda=$$

$$=\lim_{R\to\infty}\frac{2}{\pi}\int\limits_{c}^{d}\psi(\lambda)\frac{\Omega_{(\mu)}(\lambda)}{\beta^2-\lambda^2}\Big[V_{(\mu);n+1}(R,\beta)V'_{(\mu);n+1}(R,\lambda)-V'_{(\mu);n+1}(R,\beta)\times$$

$$\times V_{(\mu);n+1}(R,\lambda)\Big]d\lambda\,\mathrm{sh}\,R=\lim_{R\to\infty}2^{-1-\nu^-}e^{-R}\mathrm{sh}\,R\times$$

$$\times\frac{2}{\pi}\int\limits_{c}^{d}\psi(\lambda)\frac{\Omega_{(\mu)}(\lambda)}{\beta^2-\lambda^2}\Big[G_{(\mu);1,n+1}(\lambda,\beta)\cos q^-_{n+1}(\beta,\lambda)R+G_{(\mu);2,n+1}(\lambda,\beta)\times$$

$$\times\cos q^+_{n+1}(\beta,\lambda)R+G_{(\mu);3,n+1}(\lambda,\beta)\sin q^+_{n+1}(\beta,\lambda)R+G_{(\mu);4,n+1}(\lambda,\beta)\times$$

$$\times\sin q^-_{n+1}(\beta,\lambda)R\Big]d\lambda;\quad q^{\pm}(\beta,\lambda)=b_{n+1}(\beta)\pm b_{n+1}(\lambda). \tag{38}$$

Перепишемо (38) у вигляді суми чотирьох інтегралів, врахувавши те, що $\lim\limits_{R\to\infty}e^{-R}\,\mathrm{sh}\,R=2^{-1}$:

$$\begin{aligned}
&\lim_{R\to\infty}2^{-1-\nu^-}\frac{1}{\pi}\int\limits_{c}^{d}\frac{\psi(\lambda)\Omega_{(\mu)}(\lambda)}{\beta+\lambda}\frac{G_{(\mu);1,n+1}(\lambda,\beta)}{(\beta-\lambda)}\cos q^-_{n+1}(\beta,\lambda)Rd\lambda+\\
&+\lim_{R\to\infty}2^{-1-\nu^-}\frac{1}{\pi}\int\limits_{c}^{d}\frac{\psi(\lambda)\Omega_{(\mu)}(\lambda)}{\beta+\lambda}\frac{G_{(\mu);2,n+1}(\lambda,\beta)}{\beta-\lambda}\cos q^+_{n+1}(\beta,\lambda)Rd\lambda+\\
&+\lim_{R\to\infty}2^{-1-\nu^-}\frac{1}{\pi}\int\limits_{c}^{d}\frac{\psi(\lambda)\Omega_{(\mu)}(\lambda)}{\beta+\lambda}\frac{G_{(\mu);3,n+1}(\lambda,\beta)}{\beta-\lambda}\sin q^+_{n+1}(\beta,\lambda)Rd\lambda+\\
&+\lim_{R\to\infty}2^{-1-\nu^-}\int\limits_{c}^{d}\frac{\psi(\lambda)\Omega_{(\mu)}(\lambda)}{a^2_{n+1}q^+_{n+1}}G_{(\mu);4,n+1}(\lambda,\beta)\frac{1}{\pi}\frac{\sin q^-_{n+1}(\beta,\lambda)R}{q^-_{n+1}(\beta,\lambda)}d\lambda.
\end{aligned} \tag{39}$$

Функції $G_{(\mu);j,n+1}(\lambda,\beta)$ мають неперервні похідні стосовно λ як аналітичні функції. Оскільки $G_{(\mu);j,n+1}(\lambda,\lambda)=0$ для $j\in\{1,2,3\}$, то при $\beta\neq 0$

$$\lim_{\lambda\to\beta}\frac{G_{(\mu);j,n+1}(\lambda,\beta)}{\beta^2-\lambda^2}=\lim_{\lambda\to\beta}\frac{G'_{(\mu);j,n+1}(\lambda,\beta)}{-2\lambda}=\frac{G'_{(\mu);j,n+1}(\beta,\beta)}{-2\beta}.$$

Оскільки $G'_{(\mu);j,n+1}$ на $[c,d]$ обмежені, то функції $(\beta^2-\lambda^2)^{-1}G_{(\mu);j,n+1}(\lambda,\beta)$ є абсолютно інтегровані на кожному скінченному сегменті $[c,d]$ і мають обмежену варіацію [6]. За лемою Рімана [6] границя перших трьох доданків в (39) рівна нулеві. Такий же результат одержуємо і для четвертого доданку, якщо $\beta\bar{\in}[c,d]$.

Нехай $\beta\in(c,d)$. Зробимо заміну змінних:

$$q^-_{n+1}(\beta,\lambda)\equiv b_{n+1}(\beta)-b_{n+1}(\lambda)=-t;\quad \lambda\equiv\lambda(t,\beta)=\sqrt{a^2_{n+1}(b_{n+1}(\beta)+t)^2-\gamma^2_{n+1}},$$

$$d\lambda=a^2_{n+1}\Big(b_{n+1}(\beta)+t\Big)\Big[a^2_{n+1}\Big(b_{n+1}(\beta)+t\Big)^2-\gamma^2_{n+1}\Big]^{-1/2}dt.$$

За лемою Діріхле [6] отримуємо:

$$\lim_{R\to\infty}2^{-1-\nu^-}\int\limits_{b_{n+1}(c)-b_{n+1}(\beta)}^{b_{n+1}(d)-b_{n+1}(\beta)}\frac{\psi(\lambda)\Omega_{(\mu)}(\lambda(t,\beta))}{a^2_{n+1}(b_{n+1}(\beta)+b_{n+1}(\lambda(t,\beta)))}G_{(\mu);4,n+1}(\lambda,\beta)\times$$

$$\times\frac{a^2_{n+1}(b_{n+1}(\beta)+t)dt}{\sqrt{a^2_{n+1}(b_{n+1}(\beta)+t)^2-\gamma^2_{n+1}}}=\frac{1}{2\beta}\psi(\beta)\Omega_{(\mu)}(\beta)G_{(\mu);4,n+1}(\beta,\beta)\cdot 2^{-1-\nu^-}. \tag{40}$$

Із формул (12) і (31) знаходимо, що

$$G_{(\mu);4,(n+1)}(\beta,\beta)=4\cdot 2^{\nu^-}\beta\Big[\Omega_{(\mu)}(\beta)\Big]^{-1}. \tag{41}$$

Тоді в правій частині рівності (40) маємо $\psi(\beta)$.

Отже, шуканий інтеграл

$$J\equiv\frac{2}{\pi}\int\limits_{R_0}^{\infty}\int\limits_{c}^{d}\psi(\lambda)V_{(\mu)}(r,\lambda)\Omega_{(\mu)}(\lambda)d\lambda V_{(\mu)}(r,\beta)\sigma(r)dr=\begin{cases}\psi(\beta), & \beta\in[c,d],\\ 0, & \beta\bar{\in}[c,d].\end{cases}$$

Якщо функція $\psi(\lambda)$ володіє вказаними вище властивостями на множині $(0,\infty)$, то

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_{R_0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\psi(\lambda)V_{(\mu)}(r,\lambda)\Omega_{(\mu)}(\lambda)d\lambda V_{(\mu)}(r,\beta)\sigma(r)dr=\psi(\beta),\quad \beta\in(0,\infty). \tag{42}$$

Припустимо тепер, що функція

$$g(r)=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\psi(\beta)V_{(\mu)}(r,\beta)\Omega_{(\mu)}(\beta)d\beta. \tag{43}$$

Помножимо рівність (43) на $V_{(\mu)}(r,\lambda)\sigma(r)dr$, де λ — довільне додатне число, і проінтегруємо по r від $r = R_0$ до $r = \infty$. Внаслідок рівності (42) маємо:

$$\int_{R_0}^{\infty} g(r)V_{(\mu)}(r,\lambda)\sigma(r)dr = \psi(\lambda).$$

Підставивши в рівність (43) функцію

$$\psi(\beta) = \int_{R_0}^{\infty} g(\rho)V_{(\mu)}(\rho,\lambda)\sigma(\rho)d\rho,$$

приходимо до інтегрального зображення

$$g(r) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} V_{(\mu)}(r,\beta)\Omega_{(\mu)}(\beta)\int_{R_0}^{\infty} g(\rho)V_{(\mu)}(\rho,\lambda)\sigma(\rho)d\rho d\beta. \tag{44}$$

Якщо $g(r)$ — кусково-неперервна, то маємо інтегральне зображення (32). □

ЛІТЕРАТУРА

1. Конет І.М., Ленюк М.П. Інтегральні перетворення типу Мелера-Фока. – Чернівці: Прут, 2002. – 248 с.
2. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. – М.: Наука, 1965. – 328 с.
3. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 895 с.
4. Вирченко Н.А., Федотова И.А. Обобщенные функции Лежандра и их применение. – Киев, 1998. – 158 с.
5. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.
6. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3-х т. -М.: Наука, 1969. – Т.3. – 656 с.

Кам'янець-Подільський державний університет

Чернівецький національний університет ім. Ю.Федьковича

Надійшло 12.01.2004

Після переробки 24.04.2006