УДК 517.576

М. М. Шеремета, Л. Л. Лугова

ТРИЧЛЕННА СТЕПЕНЕВА АСИМПТОТИКА ЛОГАРИФМА МАКСИМАЛЬНОГО ЧЛЕНА ЦІЛОГО РЯДУ ДІРІХЛЕ

M. M. Sheremeta, L. L. Lugova. *Three-term power asymptotics of the maximal term logarithm for an entire Dirichlet series*, Matematychni Studii, **25** (2006) 149–168.

Conditions on the coefficients and the exponents of an entire Dirichlet series, under which for its maximal term $\mu(\sigma)$ the asymptotic equality $\ln\mu(\sigma) = T_1\sigma^{p_1} + T_2\sigma^{p_2} + (\tau + o(1))\sigma^p$ $(\sigma \to +\infty)$, is valid, where $p_1 > 1$, $0 < p < p_2 < p_1$, $T_1 > 0$, $T_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ and $\tau \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ are found.

М. Н. Шеремета, Л. Л. Лугова. *Трехчленная степенная асимптотика логарифма максимального члена целого ряда Дирихле* // Математичні Студії. – 2006. – Т.25, №2. – С.149–168.

Найдены условия на коэффициенты и показатели целого ряда Дирихле, при которых для его максимального члена $\mu(\sigma)$ справедливо асимптотическое равенство $\ln\mu(\sigma) = T_1\sigma^{p_1} + T_2\sigma^{p_2} + (\tau + o(1))\sigma^p$ $(\sigma \to +\infty)$, где $p_1 > 1$, $0 < p < p_2 < p_1$, $T_1 > 0$, $T_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ и $\tau \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

1. Вступ. Нехай (λ_n) — зростаюча до $+\infty$ послідовних невід'ємних чисел $(\lambda_0 = 0)$, ряд Діріхле $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{z\lambda_n}$, $z = \sigma + it$, є цілим, а $\mu(\sigma) = \max\{|a_n|\exp(\sigma\lambda_n) : n \geq 0\}$ — його максимальний член.

Для цілих рядів Діріхле R-порядку $\rho_R \in (0, +\infty)$ і R-типу $T_R \in (0, +\infty)$ в [1] вказано умови на a_n і λ_n, за яких $\ln\mu(\sigma) = T_R\exp\{\rho_R\sigma\} + (T + o(1))\exp\{\rho\sigma\}$ $(\sigma \to +\infty)$, де $0 < \rho < \rho_R$ і $T \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. У випадку, коли $\rho_R = 0$, для характеристики зростання $\ln\mu(\sigma)$ вводяться логарифмічні R-порядок p_R і R-тип t_R (за умови $1 < p_R < \infty$) за формулами $p_R = \varlimsup\limits_{\sigma\to+\infty} \frac{\ln\ln\mu(\sigma)}{\ln\sigma}$, $t_R = \varlimsup\limits_{\sigma\to+\infty} \frac{\ln\mu(\sigma)}{\sigma^{p_R}}$. Двочленну асимптотику вигляду $\ln\mu(\sigma) = t_R\sigma^{p_R} + (\tau + o(1))\sigma^p$ $(\sigma \to +\infty)$, де $0 < p < p_R$ і $\tau \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, у випадку, коли $\lambda_n = n$ (тобто для степеневих рядів) вивчено в [2]. Цей результат нескладно переноситься на цілі ряди Діріхле з довільними показниками. Власне, якщо $T_1 > 0$, $\tau \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $p_1 > 1$ і $0 < p < p_1$, то для того, щоб $\ln\mu(\sigma) = T_1\sigma^{p_1} + (1 + o(1))\tau\sigma^p$ $(\sigma \to +\infty)$, необхідно і досить, щоб для будь-якого $\varepsilon > 0$:

1) існувало $n_0 = n_0(\varepsilon)$ таке, що для всіх $n \geq n_0$

$$\ln|a_n| \leq -T_1(p_1 - 1)\Big(\frac{\lambda_n}{T_1 p_1}\Big)^{p_1/(p_1-1)} + (\tau + \varepsilon)\Big(\frac{\lambda_n}{T_1 p_1}\Big)^{p/(p_1-1)};$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 30D15.

2) існувала зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що

$$\ln|a_{n_k}| \ge -T_1(p_1-1)\Big(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\Big)^{p_1/(p_1-1)} + (\tau-\varepsilon)\Big(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\Big)^{p/(p_1-1)}$$

і

$$\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k} = o\Big(\lambda_{n_k}^{\frac{p_1+p-2}{2(p_1-1)}}\Big) \quad (k\to\infty).$$

Метою цієї статті є встановлення умов на a_n і λ_n, за яких $\ln\mu(\sigma)$ має тричленну степеневу асимптотику вигляду

$$\ln\mu(\sigma) = T_1\sigma^{p_1} + T_2\sigma^{p_2} + (\tau+o(1))\sigma^{p} \quad (\sigma\to+\infty), \tag{1}$$

де $p_1>1$, $0<p<p_2<p_1$, $T_1>0$, $T_2\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ і $\tau\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Для цього позначимо

$$\tau^* = \tau\cdot\mathbf{I}_{\{p:\ p\ge 2p_2-p_1\}}(p) - \frac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}\cdot\mathbf{I}_{\{p:\ p\le 2p_2-p_1\}}(p),$$

де $\mathbf{I}_E(p)$ — характеристична функція множини E, тобто $\mathbf{I}_E(p)=1$, коли $p\in E$ і $\mathbf{I}_E(p)=0$ $(p\notin E)$. Основний результат статті містить така теорема.

Теорема 1. *Для того, щоб виконувалось співвідношення (1), необхідно, а у випадку, коли $p\ge 2p_2-p_1$, і досить, щоб для будь-якого $\varepsilon>0$:*

1) існувало $n_0=n_0(\varepsilon)$ таке, що для всіх $n\ge n_0$

$$\ln|a_n| \le -T_1(p_1-1)\Big(\frac{\lambda_n}{T_1p_1}\Big)^{p_1/(p_1-1)} + T_2\Big(\frac{\lambda_n}{T_1p_1}\Big)^{p_2/(p_1-1)} + (\tau^*+\varepsilon)\Big(\frac{\lambda_n}{T_1p_1}\Big)^{\frac{\max\{p,\,2p_2-p_1\}}{p_1-1}};$$

2) існувала зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що

$$\ln|a_{n_k}| \ge -T_1(p_1-1)\Big(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\Big)^{p_1/(p_1-1)} + T_2\Big(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\Big)^{p_2/(p_1-1)} + (\tau^*-\varepsilon)\Big(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\Big)^{\frac{\max\{p,\,2p_2-p_1\}}{p_1-1}}$$

і

$$\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k} = o\left(\lambda_{n_k}^{\frac{p_1+\max\{p,\,2p_2-p_1\}-2}{2(p_1-1)}}\right) \quad (k\to+\infty).$$

Зауважимо, що у випадку, коли $p<2p_2-p_1$, умови 1) і 2) у теоремі 1 не є достатніми для того, щоб для $\ln\mu(\sigma)$ була правильною тричленна степенева асимптотика (1). Зауважимо також, що якщо $p=2p_2-p_1$, $\tau=\frac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}$, а третій член асимптотики в (1) має вигляд $(\tau+o(1))\sigma^p = \tau\sigma^p + o(\sigma^s)$ при $\sigma\to+\infty$, де $s<p$, то теорему 1 можна уточнити. Наприклад, правильною є наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай $2p_2-p_1>0$ і $(3p_2-2p_1)(3p_2-2p_1+1)\ne 0$. Для того, щоб*

$$\ln\mu(\sigma) = T_1\sigma^{p_1} + T_2\sigma^{p_2} + \frac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}\sigma^{2p_2-p_1} + o(\sigma^{3p_2-2p_1}) \quad (\sigma\to+\infty), \tag{2}$$

необхідно і досить, щоб для будь-якого $\varepsilon>0$:

1) існувало $n_0 = n_0(\varepsilon)$ таке, що для всіх $n \geq n_0$

$$\ln|a_n| \leq -T_1(p_1-1)\Big(\frac{\lambda_n}{T_1p_1}\Big)^{p_1/(p_1-1)} + T_2\Big(\frac{\lambda_n}{T_1p_1}\Big)^{p_2/(p_1-1)} -$$

$$-\left(\frac{(3p_2-2p_1+1)(T_2p_2)^3}{6(T_1p_1(p_1-1))^2} - \varepsilon\right)\left(\frac{\lambda_n}{T_1p_1}\right)^{\frac{3p_2-2p_1}{p_1-1}};$$

2) існувала зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що

$$\ln|a_{n_k}| \geq -T_1(p_1-1)\Big(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\Big)^{p_1/(p_1-1)} + T_2\Big(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\Big)^{p_2/(p_1-1)} -$$

$$-\left(\frac{(3p_2-2p_1+1)(T_2p_2)^3}{6(T_1p_1(p_1-1))^2} + \varepsilon\right)\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\right)^{\frac{3p_2-2p_1}{p_1-1}}$$

і

$$\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k} = o\Big(\lambda_{n_k}^{\frac{3p_2-2p_1-2}{2(p_1-1)}}\Big) \quad (k\to\infty).$$

Для доведення цих теорем нам будуть потрібні деякі твердження зі статті [3].

Нехай $\Omega(+\infty)$ — клас додатних на $(-\infty,+\infty)$ функцій Φ таких, що похідні Φ' є неперервно диференційовні, додатні і зростають до $+\infty$ на $(-\infty,+\infty)$. Через φ позначатимемо функцію, обернену до Φ', і нехай $\Psi(\sigma) = \sigma - \Phi(\sigma)/\Phi'(\sigma)$ — функція, асоційована з Φ за Ньютоном.

Лема 1. [3, 4] *Нехай $\Phi \in \Omega(+\infty)$. Для того, щоб $\ln\mu(\sigma, F) \leq \Phi(\sigma)$ для всіх $\sigma \geq \sigma_0$, необхідно і досить, щоб $\ln|a_n| \leq -\lambda_n\Psi(\varphi(\lambda_n))$ для всіх $n \geq n_0$.*

Для $\Phi \in \Omega(+\infty)$ і $0 < a < b < +\infty$ приймемо

$$G_1(a,b,\Phi) = \frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{\Phi(\varphi(t))}{t^2}dt, \quad G_2(a,b,\Phi) = \Phi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(t)dt\right).$$

Лема 2. [3, 5] *Нехай $\Phi \in \Omega(+\infty)$. Для кожних $0 < a < b < +\infty$ виконується нерівність $G_1(a,b,\Phi) < G_2(a,b,\Phi)$.*

Лема 3. [3, 4] *Нехай $\Phi \in \Omega(+\infty)$ і $\ln|a_{n_k}| \leq -\lambda_{n_k}\Psi(\varphi(\lambda_{n_k}))$ для деякої зростаючої послідовності (n_k) натуральних чисел. Тоді для всіх $\sigma \in [\varphi(\lambda_{n_k}), \varphi(\lambda_{n_{k+1}})]$ і всіх $k \geq k_0$ правильна нерівність*

$$\ln\mu(\sigma,F) \geq \Phi(\sigma) - (G_2(\lambda_{n_k},\lambda_{n_{k+1}},\Phi) - G_1(\lambda_{n_k},\lambda_{n_{k+1}},\Phi)). \tag{3}$$

Лема 4. [3] *Нехай $\Phi_1 \in \Omega(+\infty)$, $\Phi_2 \in \Omega(+\infty)$ і для всіх $\sigma \geq \sigma_0$*

$$\Phi_1(\sigma) \leq \ln\mu(\sigma,F) \leq \Phi_2(\sigma). \tag{4}$$

Тоді

$$\ln|a_n| \leq -\lambda_n\Psi_2(\varphi_2(\lambda_n)) \quad (n \geq n_0) \tag{5}$$

та існує зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що

$$\ln|a_{n_k}| \geq -\lambda_{n_k}\Psi_1(\varphi_1(\lambda_{n_k})) \tag{6}$$

і

$$G_1(\lambda_{n_k},\lambda_{n_{k+1}},\Phi_2) \geq \Phi_1\left(\frac{1}{\lambda_{n_{k+1}}-\lambda_{n_k}}\int_{\lambda_{n_k}}^{\lambda_{n_{k+1}}}\varphi_2(t)dt\right), \tag{7}$$

де Ψ_j і φ_j побудовані, як і вище, за Φ_j.

2. Основна лема. Нехай $\Phi \in \Omega(+\infty)$ — така функція, що

$$\Phi(\sigma) = T_1\sigma^{p_1} + T_2\sigma^{p_2} + \tau\sigma^{p} + \delta\sigma^{s} \quad (\sigma \geq \sigma_0), \tag{8}$$

де $T_1 > 0$, $p_1 > 1$, $0 < p < p_2 < p_1$, $s \leq p$, $T_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\tau \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ і $\delta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, а φ — обернена функція до $\Phi^{'}$. Позначимо

$$U(x) = \left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{1}{p_1-1}} - \frac{T_2p_2}{T_1p_1(p_1-1)}\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_2-p_1+1}{p_1-1}}.$$

Асимптотику функції φ описує наступна основна лема.

Лема 5. *Якщо функція $\Phi \in \Omega(+\infty)$ така, що виконується (8), то для функції φ при $x \to +\infty$ правильні наступні асимптотичні рівності:*

1) якщо $s = p > 2p_2 - p_1$ і $\tau + \delta \neq 0$, то

$$\varphi(x) = U(x) - \frac{(\tau + \delta + o(1))p}{T_1p_1(p_1-1)}\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{p-p_1+1}{p_1-1}};$$

2) якщо $s = p < 2p_2 - p_1$, то

$$\varphi(x) = U(x) + \frac{2p_2 - p_1 + o(1)}{2}\left(\frac{T_2p_2}{T_1p_1(p_1-1)}\right)^2\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{2p_2-2p_1+1}{p_1-1}};$$

3) якщо $s = p = 2p_2 - p_1$, $\tau \neq \frac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}$ і $\tau + \delta \neq \frac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}$, то

$$\varphi(x) = U(x) - \frac{2p_2 - p_1}{T_1p_1(p_1-1)}\left(\tau + \delta - \frac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)} + o(1)\right)\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{2p_2-2p_1+1}{p_1-1}};$$

4) якщо $p = 2p_2 - p_1$, $s = 3p_2 - 2p_1$, $\tau = \frac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}$, $(3p_2 - 2p_1)(3p_2 - 2p_1 + 1) \neq 0$ і $\delta \neq \frac{(3p_2-2p_1+1)(T_2p_2)^3}{6(T_1p_1(p_1-1))^2}$, то

$$\varphi(x) = U(x) + \frac{3p_2 - 2p_1}{T_1p_1(p_1-1)}\left(\frac{(3p_2 - 2p_1 + 1)(T_2p_2)^3}{6(T_1p_1(p_1-1))^2} - \delta + o(1)\right)\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{3p_2-3p_1+1}{p_1-1}};$$

5) якщо $p = 2p_2 - p_1$, $s = 4p_2 - 3p_1$, $\tau = \frac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}$, $3p_2 - 2p_1 + 1 = 0$ і $\delta \neq \frac{(p_1+1)(p_1-2)(T_2p_2)^4}{216(T_1p_1(p_1-1))^3}$, то

$$\varphi(x) = U(x) - \frac{p_1 + 4}{3T_1p_1(p_1-1)}\left(\frac{(p_1+1)(p_1-2)(T_2p_2)^4}{216(T_1p_1(p_1-1))^3} - \delta + o(1)\right)\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{4p_2-4p_1+1}{p_1-1}};$$

6) якщо $p = 2p_2 - p_1$, $s = 4p_2 - 3p_1$, $\tau = \frac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}$, $3p_2 - 2p_1 = 0$, $(p_1 - 3)(p_1 - 6) \neq 0$ і $\delta \neq \frac{(p_1-3)(p_1-6)(T_2p_2)^4}{216(T_1p_1(p_1-1))^3}$, то

$$\varphi(x) = U(x) - \frac{p_1}{3T_1p_1(p_1-1)}\left(\frac{(p_1-3)(p_1-6)(T_2p_2)^4}{216(T_1p_1(p_1-1))^3} - \delta + o(1)\right)\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{4p_2-4p_1+1}{p_1-1}};$$

7) якщо $p = 2p_2 - p_1$, $\tau = \frac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}$, $3p_2 - 2p_1 = 0$, $p_1 = 6$, $s = -4 = 5p_2 - 4p_1$ *і* $\delta \neq -\frac{(2T_2)^5}{10(15T_1)^4}$, *то*

$$\varphi(x) = \left(\frac{x}{6T_1}\right)^{1/5} - \frac{2T_2}{15T_1}\left(\frac{x}{6T_1}\right)^{-1/5} + \frac{2}{15T_1}\left(\frac{(2T_2)^5}{10(15T_1)^4} + \delta + o(1)\right)\left(\frac{x}{6T_1}\right)^{-9/5};$$

8) якщо $p = 2p_2 - p_1$, $\tau = \frac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}$, $3p_2 - 2p_1 = 0$, $p_1 = 3$ *і* $s = -2 = 5p_2 - 4p_1$, *то*

$$\varphi(x) = \left(\frac{x}{3T_1}\right)^{1/2} - \frac{T_2}{3T_1} + \left(\frac{\delta}{3T_1} + o(1)\right)\left(\frac{x}{3T_1}\right)^{-2}.$$

Доведення. Лема 5 доводиться нескладними, але доволі громіздкими обчисленнями. Проілюструємо це, довівши твердження 1) леми 5. Оскільки $\Phi'(\sigma) = T_1p_1\sigma^{p_1-1} + T_2p_2\sigma^{p_2-1} + \tau p\sigma^{p-1} + \delta s\sigma^{s-1}$, $\sigma \geq \sigma_0$, то для знаходження асимптотики функції φ треба розв'язати рівняння

$$T_1p_1\sigma^{p_1-1} + T_2p_2\sigma^{p_2-1} + \tau p\sigma^{p-1} + \delta s\sigma^{s-1} = x. \tag{9}$$

Легко побачити, що розв'язок $\sigma = \sigma(x)$ цього рівняння задовольняє умову $T_1p_1\sigma^{p_1-1}(1 + o(1)) = x$ $(x \to +\infty)$, і тому будемо шукати його у вигляді

$$\sigma = \left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{1}{p_1-1}} - \alpha, \tag{10}$$

де $\alpha = \alpha(x) = o\left(x^{\frac{1}{p_1-1}}\right)$ $(x \to +\infty)$. Підставляючи (10) в (9), дістанемо

$$\left(\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{1}{p_1-1}} - \alpha\right)^{p_1-1} + \frac{T_2p_2}{T_1p_1}\left(\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{1}{p_1-1}} - \alpha\right)^{p_2-1} +$$

$$+\frac{\tau p}{T_1p_1}\left(\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{1}{p_1-1}} - \alpha\right)^{p-1} + \frac{\delta s}{T_1p_1}\left(\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{1}{p_1-1}} - \alpha\right)^{s-1} = \frac{x}{T_1p_1},$$

тобто

$$\left(1 - \alpha\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{-1}{p_1-1}}\right)^{p_1-1} + \frac{T_2p_2}{T_1p_1}\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_2-p_1}{p_1-1}}\left(1 - \alpha\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{-1}{p_1-1}}\right)^{p_2-1} +$$

$$+\frac{\tau p}{T_1p_1}\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{p-p_1}{p_1-1}}\left(1 - \alpha\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{-1}{p_1-1}}\right)^{p-1} +$$

$$+\frac{\delta s}{T_1p_1}\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{s-p_1}{p_1-1}}\left(1 - \alpha\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{-1}{p_1-1}}\right)^{s-1} = 1.$$

Використовуючи асимптотичні розвинення $(1 + t)^\beta$ при $t \to 0$, звідси при $x \to +\infty$ отримуємо

$$1 - (p_1 - 1)\alpha\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{-1}{p_1-1}} + \frac{(p_1-1)(p_1-2)}{2}\alpha^2\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{-2}{p_1-1}} -$$

$$-\frac{(p_1-1)(p_1-2)(p_1-3)}{6}\alpha^3\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{-3}{p_1-1}}+$$

$$+\frac{(p_1-1)(p_1-2)(p_1-3)(p_1-4)}{24}\alpha^4\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{-4}{p_1-1}}+O\left(\alpha^5x^{\frac{-5}{p_1-1}}\right)+$$

$$+\frac{T_2p_2}{T_1p_1}\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_2-p_1}{p_1-1}}\left(1-(p_2-1)\alpha\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{-1}{p_1-1}}+\frac{(p_2-1)(p_2-2)}{2}\alpha^2\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{-2}{p_1-1}}-\right.$$

$$\left.-\frac{(p_2-1)(p_2-2)(p_2-3)}{6}\alpha^3\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{-3}{p_1-1}}+O\left(\alpha^4x^{\frac{-4}{p_1-1}}\right)\right)+$$

$$+\frac{\tau p}{T_1p_1}\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{p-p_1}{p_1-1}}\left(1-(p-1)\alpha\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{-1}{p_1-1}}+\frac{(p-1)(p-2)}{2}\alpha^2\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{-2}{p_1-1}}+\right.$$

$$\left.+O\left(\alpha^3x^{\frac{-3}{p_1-1}}\right)\right)+\frac{\delta s}{T_1p_1}\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{s-p_1}{p_1-1}}\left(1+O\left(\alpha x^{\frac{-1}{p_1-1}}\right)\right)=1,$$

тобто

$$\alpha=\frac{p_1-2}{2}\alpha^2\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{-1}{p_1-1}}-\frac{(p_1-2)(p_1-3)}{6}\alpha^3\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{-2}{p_1-1}}+$$

$$+\frac{(p_1-2)(p_1-3)(p_1-4)}{24}\alpha^4\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{-3}{p_1-1}}+$$

$$+\frac{T_2p_2}{T_1p_1(p_1-1)}\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_2-p_1+1}{p_1-1}}-\frac{T_2p_2(p_2-1)}{T_1p_1(p_1-1)}\alpha\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_2-p_1}{p_1-1}}+$$

$$+\frac{T_2p_2(p_2-1)(p_2-2)}{2T_1p_1(p_1-1)}\alpha^2\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_2-p_1-1}{p_1-1}}-\frac{T_2p_2(p_2-1)(p_2-2)(p_2-3)}{6T_1p_1(p_1-1)}\alpha^3\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_2-p_1-2}{p_1-1}}+$$

$$+\frac{\tau p}{T_1p_1(p_1-1)}\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{p-p_1+1}{p_1-1}}-\frac{\tau p(p-1)}{T_1p_1(p_1-1)}\alpha\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{p-p_1}{p_1-1}}+$$

$$+\frac{\tau p(p-1)(p-2)}{2T_1p_1(p_1-1)}\alpha^2\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{p-p_1-1}{p_1-1}}+\frac{\delta s}{T_1p_1(p_1-1)}\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{s-p_1+1}{p_1-1}}+$$

$$+O\left(\alpha^5x^{\frac{-4}{p_1-1}}\right)+O\left(\alpha^4x^{\frac{p_2-p_1-3}{p_1-1}}\right)+O\left(\alpha^3x^{\frac{p-p_1-2}{p_1-1}}\right)+O\left(\alpha x^{\frac{s-p_1}{p_1-1}}\right)\quad(x\to+\infty).$$

Оскільки $\alpha x^{-\frac{1}{p_1-1}}\to 0\ \ (x\to+\infty)$, то звідси випливає, що

$$\alpha=\frac{T_2p_2(1+o(1))}{T_1p_1(p_1-1)}\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_2-p_1+1}{p_1-1}}=\frac{T_2p_2}{T_1p_1(p_1-1)}\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_2-p_1+1}{p_1-1}}+\beta,$$

де $\beta=\beta(x)=o\left(x^{\frac{p_2-p_1+1}{p_1-1}}\right)$ $(x\to+\infty)$ і, отже,

$$\frac{T_2p_2}{T_1p_1(p_1-1)}\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_2-p_1+1}{p_1-1}}+\beta=\frac{T_2p_2}{T_1p_1(p_1-1)}\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_2-p_1+1}{p_1-1}}+$$

$$+\frac{\tau p}{T_1p_1(p_1-1)}\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{p-p_1+1}{p_1-1}}+\frac{\delta s}{T_1p_1(p_1-1)}\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{s-p_1+1}{p_1-1}}-$$

$$-\frac{T_2p_2(p_2-1)}{T_1p_1(p_1-1)}\left(\frac{T_2p_2}{T_1p_1(p_1-1)}\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_2-p_1+1}{p_1-1}}+\beta\right)\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_2-p_1}{p_1-1}}-$$

$$-\frac{\tau p(p-1)}{T_1p_1(p_1-1)}\left(\frac{T_2p_2}{T_1p_1(p_1-1)}\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_2-p_1+1}{p_1-1}}+\beta\right)\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{p-p_1}{p_1-1}}+$$

$$+\frac{p_1-2}{2}\left(\frac{T_2p_2}{T_1p_1(p_1-1)}\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_2-p_1+1}{p_1-1}}+\beta\right)^2\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{-1}{p_1-1}}+$$

$$+\frac{T_2p_2(p_2-1)(p_2-2)}{2T_1p_1(p_1-1)}\left(\frac{T_2p_2}{T_1p_1(p_1-1)}\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_2-p_1+1}{p_1-1}}+\beta\right)^2\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_2-p_1-1}{p_1-1}}+$$

$$+\frac{\tau p(p-1)(p-2)}{2T_1p_1(p_1-1)}\left(\frac{T_2p_2}{T_1p_1(p_1-1)}\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_2-p_1+1}{p_1-1}}+\beta\right)^2\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{p-p_1-1}{p_1-1}}-$$

$$-\frac{(p_1-2)(p_1-3)}{6}\left(\frac{T_2p_2}{T_1p_1(p_1-1)}\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_2-p_1+1}{p_1-1}}+\beta\right)^3\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{-2}{p_1-1}}-$$

$$-\frac{T_2p_2(p_2-1)(p_2-2)(p_2-3)}{6T_1p_1(p_1-1)}\left(\frac{T_2p_2}{T_1p_1(p_1-1)}\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_2-p_1+1}{p_1-1}}+\beta\right)^3\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_2-p_1-2}{p_1-1}}+$$

$$+\frac{(p_1-2)(p_1-3)(p_1-4)}{24}\left(\frac{T_2p_2}{T_1p_1(p_1-1)}\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_2-p_1+1}{p_1-1}}+\beta\right)^4\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{-3}{p_1-1}}+$$

$$+O\left(x^{\frac{5p_2-5p_1+1}{p_1-1}}\right)+O\left(x^{\frac{3p_2+p-4p_1+1}{p_1-1}}\right)+O\left(x^{\frac{p_2+s-2p_1+1}{p_1-1}}\right)\quad (x\to+\infty),$$

тобто

$$(1+o(1))\beta(x)=\frac{\tau p}{T_1p_1(p_1-1)}\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{p-p_1+1}{p_1-1}}+\frac{\delta s}{T_1p_1(p_1-1)}\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{s-p_1+1}{p_1-1}}-$$

$$-\left(\frac{T_2p_2}{T_1p_1(p_1-1)}\right)^2(p_2-1)\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{2p_2-2p_1+1}{p_1-1}}-\frac{T_2p_2\tau p(p-1)}{(T_1p_1(p_1-1))^2}\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_2+p-2p_1+1}{p_1-1}}+$$

$$+\frac{p_1-2}{2}\left(\frac{T_2p_2}{T_1p_1(p_1-1)}\right)^2\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{2p_2-2p_1+1}{p_1-1}}+$$

$$+\frac{(p_2-1)(p_2-2)}{2}\left(\frac{T_2p_2}{T_1p_1(p_1-1)}\right)^3\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{3p_2-3p_1+1}{p_1-1}}+$$

$$+\frac{\tau p(p-1)(p-2)}{2T_1p_1(p_1-1)}\left(\frac{T_2p_2}{T_1p_1(p_1-1)}\right)^2\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{2p_2+p-3p_1+1}{p_1-1}}-$$

$$-\frac{(p_1-2)(p_1-3)}{6}\left(\frac{T_2p_2}{T_1p_1(p_1-1)}\right)^3\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{3p_2-3p_1+1}{p_1-1}}-$$

$$-\frac{(p_2-1)(p_2-2)(p_2-3)}{6}\left(\frac{T_2p_2}{T_1p_1(p_1-1)}\right)^4\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{4p_2-4p_1+1}{p_1-1}}+$$

$$+\frac{(p_1-2)(p_1-3)(p_1-4)}{24}\left(\frac{T_2p_2}{T_1p_1(p_1-1)}\right)^4\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{4p_2-4p_1+1}{p_1-1}}+$$

$$+O\left(x^{\frac{5p_2-5p_1+1}{p_1-1}}\right)+O\left(x^{\frac{3p_2+p-4p_1+1}{p_1-1}}\right)+O\left(x^{\frac{p_2+s-2p_1+1}{p_1-1}}\right)\quad (x\to+\infty). \tag{11}$$

Якщо $p>2p_2-p_1$, то $p-p_1+1>2p_2-2p_1+1>3p_2-3p_1+1>4p_2-4p_1+1>5p_2-5p_1+1$, тому з (11) при $x\to+\infty$ отримуємо

$$(1+o(1))\beta(x)=\frac{\tau p}{T_1p_1(p_1-1)}\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{p-p_1+1}{p_1-1}}+\frac{\delta s}{T_1p_1(p_1-1)}\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{s-p_1+1}{p_1-1}}+o\left(x^{\frac{p-p_1+1}{p_1-1}}\right),$$

тобто за умов $s=p$ і $\tau+\delta\neq 0$

$$\beta=\frac{(\tau+\delta+o(1))p}{T_1p_1(p_1-1)}\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{p-p_1+1}{p_1-1}}\qquad (x\to+\infty).$$

Тому, враховуючи, що

$$\varphi(x)=\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{1}{p_1-1}}-\alpha=\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{1}{p_1-1}}-\frac{T_2p_2}{T_1p_1(p_1-1)}\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_2-p_1+1}{p_1-1}}-\beta, \tag{12}$$

одержуємо твердження 1) леми 5.

Інші твердження леми 5 доводяться подібно. □

Використовуючи рівність (8) і лему 5, можна знайти асимптотику функції $\Phi(\varphi(x))$, а оскільки $x\Psi(\varphi(x))=x\varphi(x)-\Phi(\varphi(x))$, то тоді неважко знайти і асимптотику функції $x\Psi(\varphi(x))$. Іншими словами, якщо позначимо

$$V(x)=T_1\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_1}{p_1-1}}+\frac{T_2(p_1-p_2-1)}{p_1-1}\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_2}{p_1-1}},$$

$$W(x)=T_1(p_1-1)\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_1}{p_1-1}}-T_2\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_2}{p_1-1}},$$

то з леми 5 випливає наступне твердження.

Лема 6. *Якщо функція $\Phi\in\Omega(+\infty)$ така, що виконується (8), то при $x\to+\infty$ правильні наступні асимптотичні рівності:*

1) якщо $s=p>2p_2-p_1$ і $\tau+\delta\neq 0$, то

$$\Phi(\varphi(x))=V(x)+\left(\frac{(\tau+\delta)(p_1-p-1)}{p_1-1}+o(1)\right)\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{p}{p_1-1}},$$

$$x\Psi(\varphi(x))=W(x)-(\tau+\delta+o(1))\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{p}{p_1-1}};$$

2) якщо $s = p < 2p_2 - p_1$, *то*

$$\Phi(\varphi(x)) = V(x) + \left(\frac{2p_2 - 2p_1 + 1}{p_1 - 1}\frac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)} + o(1)\right)\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{2p_2-p_1}{p_1-1}},$$

$$x\Psi(\varphi(x)) = W(x) + \left(\frac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)} + o(1)\right)\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{2p_2-p_1}{p_1-1}};$$

3) якщо $s = p = 2p_2 - p_1$, $\tau \neq \frac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}$ *і* $\tau + \delta \neq \frac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}$, *то*

$$\Phi(\varphi(x)) = V(x) + \left(\frac{2p_1 - 2p_2 - 1}{p_1 - 1}\left(\tau + \delta - \frac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}\right) + o(1)\right)\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{2p_2-p_1}{p_1-1}},$$

$$x\Psi(\varphi(x)) = W(x) - \left(\tau + \delta - \frac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)} + o(1)\right)\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{2p_2-p_1}{p_1-1}};$$

4) якщо $p = 2p_2 - p_1$, $s = 3p_2 - 2p_1$, $\tau = \frac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}$, $(3p_2 - 2p_1)(3p_2 - 2p_1 + 1) \neq 0$ *і* $\delta \neq \frac{(3p_2-2p_1+1)(T_2p_2)^3}{6(T_1p_1(p_1-1))^2}$, *то*

$$\Phi(\varphi(x)) = V(x) + \frac{3p_2 - 3p_1 + 1}{p_1 - 1}\left(\frac{(3p_2 - 2p_1 + 1)(T_2p_2)^3}{6(T_1p_1(p_1-1))^2} - \delta + o(1)\right)\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{3p_2-2p_1}{p_1-1}},$$

$$x\Psi(\varphi(x)) = W(x) + \left(\frac{(3p_2 - 2p_1 + 1)(T_2p_2)^3}{6(T_1p_1(p_1-1))^2} - \delta + o(1)\right)\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{3p_2-2p_1}{p_1-1}};$$

5) якщо $p = 2p_2 - p_1$, $s = 4p_2 - 3p_1$, $\tau = \frac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}$, $3p_2 - 2p_1 + 1 = 0$ *і* $\delta \neq \frac{(p_1+1)(p_1-2)(T_2p_2)^4}{216(T_1p_1(p_1-1))^3}$, *то*

$$\Phi(\varphi(x)) = V(x) - \frac{4p_1 + 1}{3(p_1 - 1)}\left(\frac{(p_1 + 1)(p_1 - 2)(T_2p_2)^4}{216(T_1p_1(p_1-1))^3} - \delta + o(1)\right)\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{4p_2-3p_1}{p_1-1}},$$

$$x\Psi(\varphi(x)) = W(x) + \left(\frac{(p_1 + 1)(p_1 - 2)(T_2p_2)^4}{216(T_1p_1(p_1-1))^3} - \delta + o(1)\right)\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{4p_2-3p_1}{p_1-1}};$$

6) якщо $p = 2p_2 - p_1$, $s = 4p_2 - 3p_1$, $\tau = \frac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}$, $3p_2 - 2p_1 = 0$, $(p_1 - 3)(p_1 - 6) \neq 0$ *і* $\delta \neq \frac{(p_1-3)(p_1-6)(T_2p_2)^4}{216(T_1p_1(p_1-1))^3}$, *то*

$$\Phi(\varphi(x)) = V(x) - \frac{(T_2p_2)^3}{6(T_1p_1(p_1-1))^2} -$$

$$-\frac{4p_1 - 3}{3(p_1 - 1)}\left(\frac{(p_1 - 3)(p_1 - 6)(T_2p_2)^4}{216(T_1p_1(p_1-1))^3} - \delta + o(1)\right)\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{4p_2-3p_1}{p_1-1}},$$

$$x\Psi(\varphi(x)) = W(x) + \frac{(T_2p_2)^3}{6(T_1p_1(p_1-1))^2} +$$

$$+\left(\frac{(p_1 - 3)(p_1 - 6)(T_2p_2)^4}{216(T_1p_1(p_1-1))^3} - \delta + o(1)\right)\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{4p_2-3p_1}{p_1-1}};$$

7) якщо $p = 2p_2 - p_1$, $\tau = \frac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}$, $3p_2 - 2p_1 = 0$, $p_1 = 6$, $s = -4 = 5p_2 - 4p_1$ *і* $\delta \neq -\frac{(2T_2)^5}{10(15T_1)^4}$, *то*

$$\Phi(\varphi(x)) = T_1\left(\frac{x}{6T_1}\right)^{6/5} + \frac{T_2}{5}\left(\frac{x}{6T_1}\right)^{4/5} - 5T_1\left(\frac{2T_2}{15T_1}\right)^3 +$$

$$+\frac{9}{5}\left(\frac{(2T_2)^5}{10(15T_1)^4} + \delta + o(1)\right)\left(\frac{x}{6T_1}\right)^{-4/5},$$

$$x\Psi(\varphi(x)) = 5T_1\left(\frac{x}{6T_1}\right)^{6/5} - T_2\left(\frac{x}{6T_1}\right)^{4/5} + 5T_1\left(\frac{2T_2}{15T_1}\right)^3 -$$

$$-\left(\frac{(2T_2)^5}{10(15T_1)^4} + \delta + o(1)\right)\left(\frac{x}{6T_1}\right)^{-4/5};$$

8) якщо $p = 2p_2 - p_1$, $\tau = \frac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}$, $3p_2 - 2p_1 = 0$, $p_1 = 3$ *і* $s = -2 = 5p_2 - 4p_1$, *то*

$$\Phi(\varphi(x)) = T_1\left(\frac{x}{3T_1}\right)^{3/2} - T_1\left(\frac{T_2}{3T_1}\right)^3 + (2\delta + o(1))\left(\frac{x}{3T_1}\right)^{-1},$$

$$x\Psi(\varphi(x)) = 2T_1\left(\frac{x}{3T_1}\right)^{3/2} - T_2\frac{x}{3T_1} + T_1\left(\frac{T_2}{3T_1}\right)^3 - (\delta + o(1))\left(\frac{x}{3T_1}\right)^{-1}.$$

3. Зв'язок між $G_1(t_k, t_{k+1}, \Phi)$ і $G_2(t_k, t_{k+1}, \Phi)$. Нехай $0 < t_k \uparrow +\infty$ $(k \to +\infty)$, $t_{k+1} = (1 + \theta_k)t_k$, а $G_1(t_k, t_{k+1}, \Phi)$ і $G_2(t_k, t_{k+1}, \Phi)$ означені, як у п. 1. Наведемо спочатку три леми, які вказують на асимптотику $G_1(t_k, (1 + \theta_k)t_k, \Phi)$ при $k \to +\infty$ і доводяться за допомогою леми 6.

Лема 7. *Якщо існує зростаюча послідовність* (k_j) *натуральних чисел така, що* $\theta_{k_j} \to +\infty$ $(j \to +\infty)$, *то для цієї послідовності за умов усіх тверджень леми 5*

$$G_1(t_{k_j}, t_{k_j}(1 + \theta_{k_j}), \Phi) = (1 + o(1))T_1(p_1 - 1)\left(\frac{t_{k_j}}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_1}{p_1-1}}\theta_{k_j}^{\frac{1}{p_1-1}} \quad (j \to +\infty).$$

Лема 8. *Якщо існує зростаюча послідовність* (k_j) *натуральних чисел така, що* $\theta_{k_j} \to \theta \in (0, +\infty)$ $(j \to +\infty)$, *то для цієї послідовності за умов усіх тверджень леми 5 при* $j \to +\infty$

$$G_1(t_{k_j}, t_{k_j}(1 + \theta_{k_j}), \Phi) = (1 + o(1))T_1(p_1 - 1)\left(\frac{t_{k_j}}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_1}{p_1-1}}\frac{1 + \theta}{\theta}\left((1 + \theta)^{\frac{1}{p_1-1}} - 1\right).$$

Припустимо тепер, що $\theta_k \to 0$ $(k \to +\infty)$ і приймемо

$$A(t_k, \theta_k) = T_1\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_1}{p_1-1}} + \frac{T_1p_1\theta_k}{2(p_1 - 1)}\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_1}{p_1-1}} + \frac{T_1p_1(2 - p_1)\theta_k^2}{6(p_1 - 1)^2}\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_1}{p_1-1}} -$$

$$-\frac{T_2(p_2 - p_1 + 1)}{p_1 - 1}\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_2}{p_1-1}} - \frac{T_2p_2(p_2 - p_1 + 1)\theta_k}{2(p_1 - 1)^2}\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_2}{p_1-1}}. \quad (13)$$

Лема 9. *Якщо* $\theta_k \to 0$ $(k \to +\infty)$, *то при* $k \to +\infty$ *правильні наступні асимптотичні рівності:*

1) якщо $s = p > 2p_2 - p_1$ *і* $\tau + \delta \neq 0$, *то*

$$G_1(t_k, t_k(1+\theta_k), \Phi) = A(t_k, \theta_k) + O\left(t_k^{\frac{p_1}{p_1-1}}\theta_k^3\right) + O\left(t_k^{\frac{p_2}{p_1-1}}\theta_k^2\right) -$$

$$-\frac{p - p_1 + 1}{p_1 - 1}(\tau + \delta + o(1))\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{\frac{p}{p_1-1}};$$

2) якщо $s = p < 2p_2 - p_1$, *то*

$$G_1(t_k, t_k(1+\theta_k), \Phi) = A(t_k, \theta_k) + O\left(t_k^{\frac{p_1}{p_1-1}}\theta_k^3\right) + O\left(t_k^{\frac{p_2}{p_1-1}}\theta_k^2\right) +$$

$$+\frac{2p_2 - 2p_1 + 1}{p_1 - 1}\left(\frac{(T_2p_2)^2}{2(p_1-1)} + o(1)\right)\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{\frac{2p_2-p_1}{p_1-1}};$$

3) якщо $s = p = 2p_2 - p_1$, $\tau \neq \frac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}$ *і* $\tau + \delta \neq \frac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}$, *то*

$$G_1(t_k, t_k(1+\theta_k), \Phi) = A(t_k, \theta_k) + O\left(t_k^{\frac{p_1}{p_1-1}}\theta_k^3\right) + O\left(t_k^{\frac{p_2}{p_1-1}}\theta_k^2\right) -$$

$$-\frac{2p_2 - 2p_1 + 1}{p_1 - 1}\left(\tau + \delta - \frac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)} + o(1)\right)\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{\frac{2p_2-p_1}{p_1-1}};$$

4) якщо $p = 2p_2 - p_1$, $s = 3p_2 - 2p_1$, $\tau = \frac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}$, $(3p_2 - 2p_1)(3p_2 - 2p_1 + 1) \neq 0$ *і* $\delta \neq \frac{(3p_2-2p_1+1)(T_2p_2)^3}{6(T_1p_1(p_1-1))^2}$, *то*

$$G_1(t_k, t_k(1+\theta_k), \Phi) = A(t_k, \theta_k) + O\left(t_k^{\frac{p_1}{p_1-1}}\theta_k^3\right) + O\left(t_k^{\frac{p_2}{p_1-1}}\theta_k^2\right) +$$

$$+\frac{3p_2 - 3p_1 + 1}{p_1 - 1}\left(\frac{(3p_2 - 2p_1 + 1)(T_2p_2)^3}{6(T_1p_1(p_1-1))^2} - \delta + o(1)\right)\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{\frac{3p_2-2p_1}{p_1-1}};$$

5) якщо $p = 2p_2 - p_1$, $s = 4p_2 - 3p_1$, $\tau = \frac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}$, $3p_2 - 2p_1 + 1 = 0$ *і* $\delta \neq \frac{(p_1+1)(p_1-2)(T_2p_2)^4}{216(T_1p_1(p_1-1))^3}$, *то*

$$G_1(t_k, t_k(1+\theta_k), \Phi) = A(t_k, \theta_k) + O\left(t_k^{\frac{p_1}{p_1-1}}\theta_k^3\right) + O\left(t_k^{\frac{p_2}{p_1-1}}\theta_k^2\right) -$$

$$-\frac{4p_1 + 1}{3(p_1 - 1)}\left(\frac{(p_1 + 1)(p_1 - 2)(T_2p_2)^4}{216(T_1p_1(p_1-1))^3} - \delta + o(1)\right)\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{\frac{4p_2-3p_1}{p_1-1}};$$

6) якщо $p = 2p_2 - p_1$, $s = 4p_2 - 3p_1$, $\tau = \frac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}$, $3p_2 - 2p_1 = 0$, $(p_1 - 3)(p_1 - 6) \neq 0$ *і* $\delta \neq \frac{(p_1-3)(p_1-6)(T_2p_2)^4}{216(T_1p_1(p_1-1))^3}$, *то*

$$G_1(t_k, t_k(1+\theta_k), \Phi) = A(t_k, \theta_k) + O\left(t_k^{\frac{p_1}{p_1-1}}\theta_k^3\right) + O\left(t_k^{\frac{p_2}{p_1-1}}\theta_k^2\right) - \frac{(T_2p_2)^3}{6(T_1p_1(p_1-1))^2} -$$

$$-\frac{4p_1-3}{3(p_1-1)}\left(\frac{(p_1-3)(p_1-6)(T_2p_2)^4}{216(T_1p_1(p_1-1))^3}-\delta+o(1)\right)\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{\frac{4p_2-3p_1}{p_1-1}};$$

7) якщо $p=2p_2-p_1$, $\tau=\frac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}$, $3p_2-2p_1=0$, $p_1=6$, $s=-4=5p_2-4p_1$ *і* $\delta\neq-\frac{(2T_2)^5}{10(15T_1)^4}$, *то*

$$G_1(t_k,t_k(1+\theta_k),\Phi)=T_1\left(\frac{t_k}{6T_1}\right)^{6/5}+\frac{3T_1\theta_k}{5}\left(\frac{t_k}{6T_1}\right)^{6/5}-\frac{4T_1\theta_k^2}{25}\left(\frac{t_k}{6T_1}\right)^{6/5}+$$

$$+\frac{T_2}{5}\left(\frac{t_k}{6T_1}\right)^{4/5}+\frac{2T_2\theta_k}{25}\left(\frac{t_k}{6T_1}\right)^{4/5}-5T_1\left(\frac{2T_2}{15T_1}\right)^3+O(t_k^{6/5}\theta_k^3)+O(t_k^{4/5}\theta_k^2)+$$

$$+\frac{9}{5}\left(\frac{(2T_2)^5}{10(15T_1)^4}+\delta+o(1)\right)\left(\frac{t_k}{6T_1}\right)^{-4/5};$$

8) якщо $p=2p_2-p_1$, $\tau=\frac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}$, $3p_2-2p_1=0$, $p_1=3$ *і* $s=-2=5p_2-4p_1$, *то*

$$G_1(t_k,t_k(1+\theta_k),\Phi)=T_1\left(\frac{t_k}{3T_1}\right)^{3/2}+\frac{3T_1\theta_k}{4}\left(\frac{t_k}{3T_1}\right)^{3/2}-\frac{T_1\theta_k^2}{8}\left(\frac{t_k}{3T_1}\right)^{3/2}-$$

$$-T_1\left(\frac{T_2}{3T_1}\right)^3+O(t_k^{3/2}\theta_k^3)+(2\delta+o(1))\left(\frac{t_k}{3T_1}\right)^{-1}.$$

Перейдемо до дослідження $G_2(t_k,t_{k+1},\Phi)$. Якщо позначимо $\varkappa(t_k,t_{k+1},\Phi)=\frac{1}{t_{k+1}-t_k}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\varphi(t)dt$, то $G_2(t_k,t_{k+1},\Phi)=\Phi(\varkappa(t_k,t_{k+1},\Phi))$. Асимптотику $\varkappa(t_k,t_{k+1},\Phi)$ неважко знайти, використовуючи лему 5, а з використанням таких результатів можна отримати і асиптотику $G_2(t_k,t_{k+1},\Phi)$. Правильні наступні аналоги трьох останніх лем.

Лема 10. *Якщо існує зростаюча послідовність* (k_j) *натуральних чисел така, що* $\theta_{k_j}\to+\infty$ $(j\to+\infty)$, *то для цієї послідовності за умов будь-якого з тверджень леми 5*

$$G_2(t_{k_j},t_{k_j}(1+\theta_{k_j}),\Phi)=(1+o(1))T_1\left(\frac{p_1-1}{p_1})\right)^{p_1}\left(\frac{t_{k_j}}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_1}{p_1-1}}\theta_{k_j}^{\frac{p_1}{p_1-1}}\quad(j\to+\infty).$$

Лема 11. *Якщо існує зростаюча послідовність* (k_j) *натуральних чисел така, що* $\theta_{k_j}\to\theta\in(0,+\infty)$ $(j\to+\infty)$, *то для цієї послідовності за умов будь-якого з тверджень леми 5 при* $j\to+\infty$

$$G_2(t_{k_j},t_{k_j}(1+\theta_{k_j}),\Phi)=(1+o(1))T_1\left(\frac{p_1-1}{p_1}\right)^{p_1}\left(\frac{t_{k_j}}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_1}{p_1-1}}\left(\frac{(1+\theta)^{\frac{p_1}{p_1-1}}-1}{\theta}\right)^{p_1}.$$

Приймемо

$$B(t_k,\theta_k)=T_1\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_1}{p_1-1}}-\frac{T_2(p_2-p_1+1)}{p_1-1}\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_2}{p_1-1}}+\frac{T_1\theta_k}{2(p_1-1)}\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_1}{p_1-1}}-$$

$$-\frac{p_2T_2(p_2-p_1+1)}{2(p_1-1)^2}\theta_k\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_2}{p_1-1}}+\frac{T_1p_1(5-p_1)\theta_k^2}{24(p_1-1)^2}\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_1}{p_1-1}}. \tag{14}$$

Лема 12. *Якщо $\theta_k \to 0$ $(k \to +\infty)$, то при $k \to +\infty$ правильні наступні асимптотичні рівності:*

1) якщо $s = p > 2p_2 - p_1$ і $\tau + \delta \neq 0$, то

$$G_2(t_k, t_k(1+\theta_k), \Phi) = B(t_k, \theta_k) + O\left(\theta_k^3 t_k^{\frac{p_1}{p_1-1}}\right) + O\left(\theta_k^2 t_k^{\frac{p_2}{p_1-1}}\right) - -\frac{p-p_1+1}{p_1-1}(\tau+\delta+o(1))\left(\frac{t_k}{T_1 p_1}\right)^{\frac{p}{p_1-1}};$$

2) якщо $s = p < 2p_2 - p_1$, то

$$G_2(t_k, t_k(1+\theta_k), \Phi) = B(t_k, \theta_k) + O\left(\theta_k^3 t_k^{\frac{p_1}{p_1-1}}\right) + O\left(\theta_k^2 t_k^{\frac{p_2}{p_1-1}}\right) + +\frac{2p_2-2p_1+1}{p_1-1}\left(\frac{(T_2p_2)^2}{2(p_1-1)} + o(1)\right)\left(\frac{t_k}{T_1 p_1}\right)^{\frac{2p_2-p_1}{p_1-1}};$$

3) якщо $s = p = 2p_2 - p_1$, $\tau \neq \frac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}$ і $\tau + \delta \neq \frac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}$, то

$$G_2(t_k, t_k(1+\theta_k), \Phi) = B(t_k, \theta_k) + O\left(t_k^{\frac{p_1}{p_1-1}}\theta_k^3\right) + O\left(t_k^{\frac{p_2}{p_1-1}}\theta_k^2\right) - -\frac{2p_2-2p_1+1}{p_1-1}\left(\tau+\delta-\frac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)} + o(1)\right)\left(\frac{t_k}{T_1 p_1}\right)^{\frac{2p_2-p_1}{p_1-1}};$$

4) якщо $p = 2p_2 - p_1$, $s = 3p_2 - 2p_1$, $\tau = \frac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}$, $(3p_2-2p_1)(3p_2-2p_1+1) \neq 0$ і $\delta \neq \frac{(3p_2-2p_1+1)(T_2p_2)^3}{6(T_1p_1(p_1-1))^2}$, то

$$G_2(t_k, t_k(1+\theta_k), \Phi) = B(t_k, \theta_k) + O\left(t_k^{\frac{p_1}{p_1-1}}\theta_k^3\right) + O\left(t_k^{\frac{p_2}{p_1-1}}\theta_k^2\right) + +\frac{3p_2-3p_1+1}{p_1-1}\left(\frac{(3p_2-2p_1+1)(T_2p_2)^3}{6(T_1p_1(p_1-1))^2} - \delta + o(1)\right)\left(\frac{t_k}{T_1 p_1}\right)^{\frac{3p_2-2p_1}{p_1-1}};$$

5) якщо $p = 2p_2 - p_1$, $s = 4p_2 - 3p_1$, $\tau = \frac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}$, $3p_2 - 2p_1 + 1 = 0$ і $\delta \neq \frac{(p_1+1)(p_1-2)(T_2p_2)^4}{216(T_1p_1(p_1-1))^3}$, то

$$G_2(t_k, t_k(1+\theta_k), \Phi) = B(t_k, \theta_k) + O\left(t_k^{\frac{p_1}{p_1-1}}\theta_k^3\right) + O\left(t_k^{\frac{p_2}{p_1-1}}\theta_k^2\right) - -\frac{4p_1+1}{3(p_1-1)}\left(\frac{(p_1+1)(p_1-2)(T_2p_2)^4}{216(T_1p_1(p_1-1))^3} - \delta + o(1)\right)\left(\frac{t_k}{T_1 p_1}\right)^{\frac{4p_2-3p_1}{p_1-1}};$$

6) якщо $p = 2p_2 - p_1$, $s = 4p_2 - 3p_1$, $\tau = \frac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}$, $3p_2 - 2p_1 = 0$, $(p_1-3)(p_1-6) \neq 0$ і $\delta \neq \frac{(p_1-3)(p_1-6)(T_2p_2)^4}{216(T_1p_1(p_1-1))^3}$, то

$$G_2(t_k, t_k(1+\theta_k), \Phi) = B(t_k, \theta_k) + O\left(t_k^{\frac{p_1}{p_1-1}}\theta_k^3\right) + O\left(t_k^{\frac{p_2}{p_1-1}}\theta_k^2\right) - \frac{(T_2p_2)^3}{6(T_1p_1(p_1-1))^2} -$$

$$-\frac{4p_1-3}{3(p_1-1)}\left(\frac{(p_1-3)(p_1-6)(T_2p_2)^4}{216(T_1p_1(p_1-1))^3}-\delta+o(1)\right)\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{\frac{4p_2-3p_1}{p_1-1}};$$

7) якщо $p=2p_2-p_1$, $\tau=\frac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}$, $3p_2-2p_1=0$, $p_1=6$, $s=-4=5p_2-4p_1$ *і* $\delta\neq-\frac{(2T_2)^5}{10(15T_1)^4}$, *то*

$$G_2(t_k,t_k(1+\theta_k),\Phi)=T_1\left(\frac{t_k}{6T_1}\right)^{6/5}+\frac{3T_1\theta_k}{5}\left(\frac{t_k}{6T_1}\right)^{6/5}-\frac{T_1\theta_k^2}{100}\left(\frac{t_k}{6T_1}\right)^{6/5}+$$

$$+\frac{T_2}{5}\left(\frac{t_k}{6T_1}\right)^{4/5}+\frac{2T_2\theta_k}{25}\left(\frac{t_k}{6T_1}\right)^{4/5}-5T_1\left(\frac{2T_2}{15T_1}\right)^3+O(t_k^{6/5}\theta_k^3)+O(t_k^{4/5}\theta_k^2)+$$

$$+\frac{9}{5}\left(\frac{(2T_2)^5}{10(15T_1)^4}+\delta+o(1)\right)\left(\frac{t_k}{6T_1}\right)^{-4/5};$$

8) якщо $p=2p_2-p_1$, $\tau=\frac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}$, $3p_2-2p_1=0$, $p_1=3$ *і* $s=-2=5p_2-4p_1$, *то*

$$G_2(t_k,t_k(1+\theta_k),\Phi)=T_1\left(\frac{t_k}{3T_1}\right)^{3/2}+\frac{3T_1\theta_k}{4}\left(\frac{t_k}{3T_1}\right)^{3/2}+\frac{T_1\theta_k^2}{16}\left(\frac{t_k}{3T_1}\right)^{3/2}+$$

$$+T_1\left(\frac{T_2}{3T_1}\right)^3+O(t_k^{3/2}\theta_k^3)+O(t_k\theta_k^2)+(2\delta+o(1))\left(\frac{t_k}{3T_1}\right)^{-1}.$$

З огляду на (13) і (14) $B(t_k,\theta_k)-A(t_k,\theta_k)=\frac{T_1p_1\theta_k^2}{8(p_1-1)}\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_1}{p_1-1}}$. Тому з лем 9 і 12 випливає наступна лема.

Лема 13. *Якщо* $\theta_k\to 0$ $(k\to+\infty)$, *то*

$$G_2(t_k,t_k(1+\theta_k),\Phi)-G_1(t_k,t_k(1+\theta_k),\Phi)=\frac{T_1p_1\theta_k^2}{8(p_1-1)}\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_1}{p_1-1}}+$$

$$+O\left(\theta_k^3t_k^{\frac{p_1}{p_1-1}}\right)+O\left(\theta_k^2t_k^{\frac{p_2}{p_1-1}}\right)+g(t_k,\theta_k),$$

де при $k\to+\infty$ *правильні наступні асимптотичні рівності:*

1) якщо $s=p>2p_2-p_1$ *і* $\tau+\delta\neq0$, *то* $g(t_k,\theta_k)=o\left(t_k^{\frac{p}{p_1-1}}\right)$;

2) якщо $s=p<2p_2-p_1$, *то* $g(t_k,\theta_k)=o\left(t_k^{\frac{2p_2-p_1}{p_1-1}}\right)$;

3) якщо $s=p=2p_2-p_1$, $\tau\neq\frac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}$ *і* $\tau+\delta\neq\frac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}$, *то* $g(t_k,\theta_k)=o\left(t_k^{\frac{2p_2-p_1}{p_1-1}}\right)$;

4) якщо $p=2p_2-p_1$, $s=3p_2-2p_1$, $\tau=\frac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}$, $(3p_2-2p_1)(3p_2-2p_1+1)\neq0$ *і* $\delta\neq\frac{(3p_2-2p_1+1)(T_2p_2)^3}{6(T_1p_1(p_1-1))^2}$, *то* $g(t_k,\theta_k)=o\left(t_k^{\frac{3p_2-2p_1}{p_1-1}}\right)$;

5) якщо $p=2p_2-p_1$, $s=4p_2-3p_1$, $\tau=\frac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}$, $3p_2-2p_1+1=0$ *і* $\delta\neq\frac{(p_1+1)(p_1-2)(T_2p_2)^4}{216(T_1p_1(p_1-1))^3}$, *то* $g(t_k,\theta_k)=o\left(t_k^{\frac{4p_2-3p_1}{p_1-1}}\right)$;

6) якщо $p = 2p_2 - p_1$, $s = 4p_2 - 3p_1$, $\tau = \frac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}$, $3p_2 - 2p_1 = 0$, $(p_1-3)(p_1-6) \neq 0$ *і* $\delta \neq \frac{(p_1-3)(p_1-6)(T_2p_2)^4}{216(T_1p_1(p_1-1))^3}$, *то* $g(t_k,\theta_k) = o\left(t_k^{\frac{4p_2-3p_1}{p_1-1}}\right)$;

7) якщо $p = 2p_2 - p_1$, $\tau = \frac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}$, $3p_2 - 2p_1 = 0$, $p_1 = 6$, $s = -4 = 5p_2 - 4p_1$ *і* $\delta \neq -\frac{(2T_2)^5}{10(15T_1)^4}$, *то* $g(t_k,\theta_k) = o\left(t_k^{-4/5}\right)$;

8) якщо $p = 2p_2 - p_1$, $\tau = \frac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}$, $3p_2 - 2p_1 = 0$, $p_1 = 3$ *і* $s = -2 = 5p_2 - 4p_1$, *то* $g(t_k,\theta_k) = o\left(t_k^{-1}\right)$;

Використовуючи лему 13, доведемо тепер наступну лему.

Лема 14. *Нехай*

$$\Phi_1(\sigma) = T_1\sigma^{p_1} + T_2\sigma^{p_2} + \tau\sigma^p - \delta\sigma^s, \quad \Phi_2(\sigma) = T_1\sigma^{p_1} + T_2\sigma^{p_2} + \tau\sigma^p + \delta\sigma^s \quad (\sigma \geq \sigma_0),$$

де $\delta > 0$ *і* $s \leq p$. *Припустимо, що* $t_{k+1} = (1+\theta_k)t_k$ *і*

$$G_1(t_k, t_{k+1}, \Phi_2) \geq \Phi_1(\varkappa(t_k, t_{k+1}, \Phi_2)). \tag{15}$$

Тоді $\theta_k \to 0$ $(k \to +\infty)$ *і*

$$\theta_k^2 \leq \frac{16(p_1-1)}{T_1p_1}(\delta + o(1))\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{\frac{s-p_1}{p_1-1}} + g^*(t_k,\theta_k),$$

де при $k \to +\infty$ *правильні наступні асимптотичні рівності:*

1) якщо $s = p > 2p_2 - p_1$ *і* $\tau \pm \delta \neq 0$, *то* $g^*(t_k,\theta_k) = o\left(t_k^{\frac{p-1}{p_1-1}}\right)$;

2) якщо $s = p < 2p_2 - p_1$, *то* $g^*(t_k,\theta_k) = o\left(t_k^{\frac{2(p_2-p_1)}{p_1-1}}\right)$;

3) якщо $s = p = 2p_2 - p_1$, $\tau \neq \frac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}$ *і* $\tau \pm \delta \neq \frac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}$, *то* $g^*(t_k,\theta_k) = o\left(t_k^{\frac{2(p_2-p_1)}{p_1-1}}\right)$;

4) якщо $p = 2p_2 - p_1$, $s = 3p_2 - 2p_1$, $\tau = \frac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}$, $(3p_2-2p_1)(3p_2-2p_1+1) \neq 0$ *і* $\delta \neq \pm\frac{(3p_2-2p_1+1)(T_2p_2)^3}{6(T_1p_1(p_1-1))^2}$, *то* $g^*(t_k,\theta_k) = o\left(t_k^{\frac{3(p_2-p_1)}{p_1-1}}\right)$;

5) якщо $p = 2p_2 - p_1$, $s = 4p_2 - 3p_1$, $\tau = \frac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}$, $3p_2 - 2p_1 + 1 = 0$ *і* $\delta \neq \pm\frac{(p_1+1)(p_1-2)(T_2p_2)^4}{216(T_1p_1(p_1-1))^3}$, *то* $g^*(t_k,\theta_k) = o\left(t_k^{\frac{4(p_2-p_1)}{p_1-1}}\right)$;

6) якщо $p = 2p_2 - p_1$, $s = 4p_2 - 3p_1$, $\tau = \frac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}$, $3p_2 - 2p_1 = 0$, $(p_1-3)(p_1-6) \neq 0$ *і* $\delta \neq \pm\frac{(p_1-3)(p_1-6)(T_2p_2)^4}{216(T_1p_1(p_1-1))^3}$, *то* $g^*(t_k,\theta_k) = o\left(t_k^{\frac{4(p_2-p_1)}{p_1-1}}\right)$;

7) якщо $p = 2p_2 - p_1$, $\tau = \frac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}$, $3p_2 - 2p_1 = 0$, $p_1 = 6$, $s = -4 = 5p_2 - 4p_1$ *і* $\delta \neq \pm\frac{(2T_2)^5}{10(15T_1)^4}$, *то* $g^*(t_k,\theta_k) = o\left(t_k^{-2}\right)$;

8) якщо $p = 2p_2 - p_1$, $\tau = \frac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}$, $3p_2 - 2p_1 = 0$, $p_1 = 3$ *і* $s = -2 = 5p_2 - 4p_1$, *то* $g^*(t_k,\theta_k) = o\left(t_k^{-5/2}\right)$;

Доведення. Доведемо п. 1). Оскільки $\Phi_1(\sigma) = \Phi_2(\sigma) - 2\delta\sigma^s$ і $\Phi_2(\varkappa(t_k, t_{k+1}, \Phi_2)) = G_2(t_k, t_k(1+\theta_k), \Phi_2)$, то з (15) маємо

$$G_1(t_k, t_{k+1}, \Phi_2) \geq G_2(t_k, t_k(1+\theta_k), \Phi_2) - 2\delta\varkappa^s(t_k, t_{k+1}, \Phi_2). \tag{16}$$

Припустимо, що $\overline{\lim\limits_{k\to+\infty}}\,\theta_k = +\infty$. Тоді існує зростаюча послідовність (k_j) натуральних чисел така, що $\theta_{k_j} \to +\infty$ $(j \to +\infty)$, а для цієї послідовності з (15) за лемами 7 і 10 маємо

$$T_1(p_1-1)\left(\frac{t_{k_j}}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_1}{p_1-1}} \theta_{k_j}^{\frac{1}{p_1-1}} \geq (1+o(1))T_1\left(\frac{p_1-1}{p_1}\right)^{p_1}\left(\frac{t_{k_j}}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_1}{p_1-1}} \theta_{k_j}^{\frac{p_1}{p_1-1}} \quad (j \to +\infty),$$

що неможливо, бо $p_1 > 1$ і $\theta_{k_j} \to +\infty$ $(j \to +\infty)$.

Якщо $\overline{\lim\limits_{k\to+\infty}}\,\theta_k = \theta \in (0, +\infty)$, то існує зростаюча послідовність (k_j) натуральних чисел така, що $\theta_{k_j} \to \theta \in (0, +\infty)$ $(j \to +\infty)$, а для цієї послідовності з (15) за лемами 8 і 11 при $j \to +\infty$ маємо

$$T_1(p_1-1)\left(\frac{t_{k_j}}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_1}{p_1-1}} \frac{1+\theta}{\theta}\left((1+\theta)^{\frac{1}{p_1-1}} - 1\right) \geq$$

$$\geq (1+o(1))T_1\left(\frac{p_1-1}{p_1}\right)^{p_1}\left(\frac{t_{k_j}}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_1}{p_1-1}}\left(\frac{(1+\theta)^{\frac{p_1}{p_1-1}}-1}{\theta}\right)^{p_1},$$

звідки випливає, що

$$(p_1-1)\frac{(1+\theta)^{\frac{p_1}{p_1-1}}-1}{\theta} - (p_1-1) - \left(\frac{p_1-1}{p_1}\right)^{p_1}\left(\frac{(1+\theta)^{\frac{p_1}{p_1-1}}-1}{\theta}\right)^{p_1} \geq 0.$$

Оскільки $\frac{(1+\theta)^{\frac{p_1}{p_1-1}}-1}{\theta} > \frac{p_1}{p_1-1}$ для всіх $\theta > 0$, то остання нерівність рівносильна до нерівності $g(x) := (p_1-1)x - (p_1-1) - \left(\frac{p_1-1}{p_1}\right)^{p_1} x^{p_1} \geq 0$, $x > x_0 = \frac{p_1}{p_1-1}$. Але $g(x_0) = 0$ і $g'(x) = p_1\left(\frac{p_1-1}{p_1}\right)^{p_1}\left\{\left(\frac{p_1}{p_1-1}\right)^{p_1-1} - x^{p_1-1}\right\} < 0$, $x > x_0 = \frac{p_1}{p_1-1}$. Тому $g(x) < 0$ для всіх $x > x_0$, що неможливо.

Отже, $\theta_k \to 0$ $(k \to +\infty)$, а у цьому випадку, наприклад, за твердженням 1) леми 13 з огляду на (19)

$$\frac{T_1p_1\theta_k^2}{8(p_1-1)}\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_1}{p_1-1}} \leq 2\delta\varkappa_k^s(\Phi_2) + O\left(\theta_k^3 t_k^{\frac{p_1}{p_1-1}}\right) + O\left(\theta_k^2 t_k^{\frac{p_2}{p_1-1}}\right) + o\left(t_k^{\frac{p}{p_1-1}}\right)$$

при $k \to +\infty$. Але можна перевірити, що $\varkappa^s(t_k, t_{k+1}, \Phi_2) = (1+o(1))\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{\frac{s}{p_1-1}}$ $(k \to +\infty)$. Тому

$$\frac{T_1p_1\theta_k^2}{8(p_1-1)} \leq 2\delta\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{\frac{s-p_1}{p_1-1}} + O\left(\theta_k^3 t_k^{\frac{p_1}{p_1-1}}\right) + O\left(\theta_k^2 t_k^{\frac{p_2-p_1}{p_1-1}}\right) + o\left(t_k^{\frac{p-p_1}{p_1-1}}\right) \quad (k \to +\infty),$$

звідки випливає твердження 1) леми 14. Решта тверджень цієї леми доводяться подібно.

4. Доведення теореми 1. Справедливість теореми 1 випливає з наступних чотирьох тверджень.

Твердження 1. *Якщо $p > 2p_2 - p_1$, то для того, щоб $\ln \mu(\sigma)$ мав тричленну степеневу асимптотику (1), необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $\varepsilon > 0$:*

1) існувало $n_0 = n_0(\varepsilon)$ таке, що для всіх $n \geq n_0$

$$\ln |a_n| \leq -T_1(p_1-1)\Big(\frac{\lambda_n}{T_1p_1}\Big)^{p_1/(p_1-1)} + T_2\Big(\frac{\lambda_n}{T_1p_1}\Big)^{p_2/(p_1-1)} + (\tau+\varepsilon)\Big(\frac{\lambda_n}{T_1p_1}\Big)^{p/(p_1-1)}; \tag{17}$$

2) існувала зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що

$$\ln |a_{n_k}| \geq -T_1(p_1-1)\Big(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\Big)^{p_1/(p_1-1)} + T_2\Big(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\Big)^{p_2/(p_1-1)} + (\tau-\varepsilon)\Big(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\Big)^{p/(p_1-1)} \tag{18}$$

і

$$\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k} = o\Big(\lambda_{n_k}^{\frac{p_1+p-2}{2(p_1-1)}}\Big) \quad (k \to +\infty). \tag{19}$$

Доведення. Спочатку доведемо необхідність. З (1) для довільного $\delta \in (0, |\tau|)$ і всіх $\sigma \geq \sigma_0(\delta)$ маємо $T_1\sigma^{p_1} + T_2\sigma^{p_2} + (\tau-\delta)\sigma^p \leq \ln \mu(\sigma, F) \leq T_1\sigma^{p_1} + T_2\sigma^{p_2} + (\tau+\delta)\sigma^p$, тобто виконується умова (4) леми 4 з $\Phi_1(\sigma) = T_1\sigma^{p_1} + T_2\sigma^{p_2} + (\tau-\delta)\sigma^p$ і $\Phi_2(\sigma) = T_1\sigma^{p_1} + T_2\sigma^{p_2} + (\tau+\delta)\sigma^p$ (зауважимо, що $\tau \pm \delta \neq 0$). За цією лемою правильні нерівності (5) – (7). Але за твердженням 1) леми 6 при $n \to +\infty$

$$\lambda_n\Psi_2(\varphi_2(\lambda_n)) = T_1(p_1-1)\Big(\frac{\lambda_n}{T_1p_1}\Big)^{p_1/(p_1-1)} - T_2\Big(\frac{\lambda_n}{T_1p_1}\Big)^{p_2/(p_1-1)} - (\tau+\delta+o(1))\Big(\frac{\lambda_n}{T_1p_1}\Big)^{p/(p_1-1)},$$

$$\lambda_{n_k}\Psi_1(\varphi_1(\lambda_{n_k})) = T_1(p_1-1)\Big(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\Big)^{p_1/(p_1-1)} - T_2\Big(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\Big)^{p_2/(p_1-1)} - (\tau-\delta+o(1))\Big(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\Big)^{p/(p_1-1)},$$

а за твердженням 1) леми 14 з нерівності (7) випливає

$$\left(\frac{\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k}}{\lambda_{n_k}}\right)^2 \leq \frac{16(p_1-1)}{T_1p_1}(\delta + o(1))\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\right)^{\frac{p-p_1}{p_1-1}} \quad (k \to +\infty),$$

тобто

$$\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k} \leq 4\sqrt{p_1-1}\left(\sqrt{\delta} + o(1)\right)(T_1p_1)^{\frac{p-p_1}{2(p_1-1)}}\lambda_{n_k}^{\frac{p_1+p-2}{2(p_1-1)}} \quad (k \to +\infty).$$

Завдяки довільності δ, з цих співвідношень випливають співвідношення (17) – (19).

Доведемо достатність умов (17) – (19). Використовуючи лему 1 і твердження 1) леми 6, неважко показати, що з огляду на довільність ε з умови (17) випливає асимптотична нерівність

$$\ln \mu(\sigma) \leq T_1\sigma^{p_1} + T_2\sigma^{p_2} + (\tau + o(1))\sigma^p \quad (\sigma \to +\infty). \tag{20}$$

Далі, за лемою 3 і твердженням 1) леми 13 з нерівності (18) для всіх $\sigma \in [\varphi_1(\lambda_{n_k}), \varphi_1(\lambda_{n_{k+1}})]$ і всіх $k \geq k_0$ маємо

$$\ln \mu(\sigma) \geq \Phi_1(\sigma) - (G_2(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_{k+1}}, \Phi_1) - G_1(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_{k+1}}, \Phi_1)) =$$

$$= \Phi_1(\sigma) - \frac{T_1p_1\theta_k^2}{8(p_1-1)}\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_1}{p_1-1}} + O\left(\theta_k^3\lambda_{n_k}^{\frac{p_1}{p_1-1}}\right) + O\left(\theta_k^2\lambda_{n_k}^{\frac{p_2}{p_1-1}}\right) + o\left(\lambda_{n_k}^{\frac{p}{p_1-1}}\right) =$$

$$= \Phi_1(\sigma) + o\left(\lambda_{n_k}^{\frac{p}{p_1-1}}\right) \quad (k \to +\infty), \tag{21}$$

бо з огляду на умову (19), $\theta_k = \frac{\lambda_{n_{k+1}}-\lambda_{n_k}}{\lambda_{n_k}} = o\left(\lambda_{n_k}^{\frac{p-p_1}{2(p_1-1)}}\right)$ $(k\to+\infty)$. Оскільки $\varphi_1(\lambda_{n_k}) \le \sigma \le \varphi_1(\lambda_{n_{k+1}})$, то $\lambda_{n_k} \le \Phi_1'(\sigma) \le \lambda_{n_{k+1}}$ і з (21) маємо

$$\ln\mu(\sigma) \ge \Phi_1(\sigma) + o\left(\Phi_1'(\sigma)^{\frac{p}{p_1-1}}\right) = \Phi_1(\sigma) + o\left((\sigma^{p_1-1})^{\frac{p}{p_1-1}}\right) = \Phi_1(\sigma) + o(\sigma^p) \quad (\sigma\to+\infty),$$

звідки, завдяки довільності δ, отримуємо асимптотичну нерівність

$$\ln\mu(\sigma, F) \ge T_1\sigma^{p_1} + T_2\sigma^{p_2} + (\tau + o(1))\sigma^p \quad (\sigma\to+\infty). \tag{22}$$

З (20) і (22) випливає (1). Твердження 1 доведено. □

Наступні два твердження стосуються випадку, коли $p = 2p_2 - p_1$, і доводяться подібно до твердження 1.

Твердження 2. *Якщо $\tau \ne \frac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}$, то для того, щоб*

$$\ln\mu(\sigma) = T_1\sigma^{p_1} + T_2\sigma^{p_2} + (\tau + o(1))\sigma^{2p_2-p_1} \quad (\sigma\to+\infty), \tag{23}$$

необхідно і досить, щоб для будь-якого $\varepsilon > 0$:

1) існувало $n_0 = n_0(\varepsilon)$ таке, що для всіх $n \ge n_0$

$$\ln|a_n| \le -T_1(p_1-1)\Big(\frac{\lambda_n}{T_1p_1}\Big)^{p_1/(p_1-1)} + T_2\Big(\frac{\lambda_n}{T_1p_1}\Big)^{p_2/(p_1-1)} + \\ + \left(\tau - \frac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)} + \varepsilon\right)\left(\frac{\lambda_n}{T_1p_1}\right)^{(2p_2-p_1)/(p_1-1)}; \tag{24}$$

2) існувала зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що

$$\ln|a_{n_k}| \ge -T_1(p_1-1)\Big(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\Big)^{p_1/(p_1-1)} + T_2\Big(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\Big)^{p_2/(p_1-1)} + \\ + \left(\tau - \frac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)} - \varepsilon\right)\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\right)^{(2p_2-p_1)/(p_1-1)} \tag{25}$$

і

$$\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k} = o\Big(\lambda_{n_k}^{\frac{p_2-1}{p_1-1}}\Big) \quad (k\to+\infty). \tag{26}$$

У випадку, коли $\tau = \frac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}$, правильне наступне твердження.

Твердження 3. *Для того, щоб при $\sigma\to+\infty$*

$$\ln\mu(\sigma) = T_1\sigma^{p_1} + T_2\sigma^{p_2} + \left(\frac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)} + o(1)\right)\sigma^{2p_2-p_1}, \tag{27}$$

необхідно і досить, щоб для будь-якого $\varepsilon > 0$:

1) існувало $n_0 = n_0(\varepsilon)$ таке, що для всіх $n \ge n_0$

$$\ln|a_n| \le -T_1(p_1-1)\Big(\frac{\lambda_n}{T_1p_1}\Big)^{p_1/(p_1-1)} + T_2\Big(\frac{\lambda_n}{T_1p_1}\Big)^{p_2/(p_1-1)} + \varepsilon\Big(\frac{\lambda_n}{T_1p_1}\Big)^{(2p_2-p_1)/(p_1-1)}; \tag{28}$$

2) існувала зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що

$$\ln|a_{n_k}| \ge -T_1(p_1-1)\Big(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\Big)^{p_1/(p_1-1)} + T_2\Big(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\Big)^{p_2/(p_1-1)} - \varepsilon\Big(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\Big)^{(2p_2-p_1)/(p_1-1)} \tag{29}$$

і правильна асимптотична рівність (26).

Як видно з твердження 2) леми 5, у випадку, коли $p < 2p_2 - p_1$, члени $\tau\sigma^p + \delta\sigma^s$ в (1) не дають вкладу у тричленну асимптотику функції φ (вони можуть мати вплив на подальші члени асимптотики функції φ, але ми зупинились тільки на тричленній її асимптотиці). Тому ми можемо отримати у випадку $p < 2p_2 - p_1$ тільки необхідні умови для правильності асимптотичної рівності (1). Наступне твердження доводиться подібно до твердження 1.

Твердження 4. *Якщо $p < 2p_2 - p_1$, то для того, щоб асимптотична рівність (1) була правильною, необхідно, щоб для будь-якого $\varepsilon > 0$:*

1) існувало $n_0 = n_0(\varepsilon)$ таке, що для всіх $n \geq n_0$

$$\ln|a_n| \leq -T_1(p_1-1)\Big(\frac{\lambda_n}{T_1p_1}\Big)^{p_1/(p_1-1)} + T_2\Big(\frac{\lambda_n}{T_1p_1}\Big)^{p_2/(p_1-1)} - \\ -\left(\frac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)} - \varepsilon\right)\left(\frac{\lambda_n}{T_1p_1}\right)^{(2p_2-p_1)/(p_1-1)}; \tag{30}$$

2) існувала зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що

$$\ln|a_{n_k}| \geq -T_1(p_1-1)\Big(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\Big)^{p_1/(p_1-1)} + T_2\Big(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\Big)^{p_2/(p_1-1)} - \\ -\left(\frac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)} + \varepsilon\right)\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\right)^{(2p_2-p_1)/(p_1-1)} \tag{31}$$

і правильна асимптотична рівність (26).

5. Доведення теореми 2. Нехай $0 < \delta < \frac{|(3p_2-2p_1+1)(T_2p_2)^3|}{6(T_1p_1(p_1-1))^2}$. Тоді з (2) для всіх $\sigma \geq \sigma_0(\delta)$ маємо (4) з $\Phi_1(\sigma) = T_1\sigma^{p_1} + T_2\sigma^{p_2} + \frac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}\sigma^{2p_2-p_1} - \delta\sigma^{3p_2-2p_1}$ і $\Phi_2(\sigma) = T_1\sigma^{p_1} + T_2\sigma^{p_2} + \frac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}\sigma^{2p_2-p_1} + \delta\sigma^{3p_2-2p_1}$. Тому за лемою 4 правильні нерівності (5)–(7). Але за твердженням 4) леми 6

$$\lambda_n\Psi_2(\varphi_2(\lambda_n)) = T_1(p_1-1)\Big(\frac{\lambda_n}{T_1p_1}\Big)^{p_1/(p_1-1)} - T_2\Big(\frac{\lambda_n}{T_1p_1}\Big)^{p_2/(p_1-1)} + \\ +\left(\frac{(3p_2-2p_1+1)(T_2p_2)^3}{6(T_1p_1(p_1-1))^2} - \delta + o(1)\right)\left(\frac{\lambda_n}{T_1p_1}\right)^{(3p_2-2p_1)/(p_1-1)} \quad (n\to+\infty),$$

$$\lambda_{n_k}\Psi_1(\varphi_1(\lambda_{n_k})) = T_1(p_1-1)\Big(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\Big)^{p_1/(p_1-1)} - T_2\Big(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\Big)^{p_2/(p_1-1)} + \\ +\left(\frac{(3p_2-2p_1+1)(T_2p_2)^3}{6(T_1p_1(p_1-1))^2} - \delta + o(1)\right)\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\right)^{(3p_2-2p_1)/(p_1-1)} \quad (k\to+\infty),$$

а за твердженням 4) леми 14 з нерівності (7) випливає

$$\left(\frac{\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k}}{\lambda_{n_k}}\right)^2 \leq \frac{16(p_1-1)}{T_1p_1}(\delta + o(1))\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\right)^{\frac{3p_2-3p_1}{p_1-1}} \quad (k\to+\infty).$$

Завдяки довільності δ, з цих співвідношень випливає необхідність умов 1) і 2) у теоремі 2.

Навпаки, з умови 1), за лемою 1 і твердженням 4) леми 6, як звичайно, отримуємо асимптотичну нерівність

$$\ln \mu(\sigma) \le T_1\sigma^{p_1} + T_2\sigma^{p_2} + \frac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}\sigma^{2p_2-p_1} + o(\sigma^{3p_2-2p_1}) \quad (\sigma \to +\infty). \tag{32}$$

Далі, за лемою 3 і твердженням 4) леми 13 з умови 2) для всіх $\sigma \in [\varphi_1(\lambda_{n_k}), \varphi_1(\lambda_{n_{k+1}})]$ і всіх $k \ge k_0$ маємо

$$\ln \mu(\sigma) \ge \Phi_1(\sigma) - \frac{T_1p_1\theta_k^2}{8(p_1-1)}\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_1}{p_1-1}} + O\left(\theta_k^3\lambda_{n_k}^{\frac{p_1}{p_1-1}}\right) + O\left(\theta_k^2\lambda_{n_k}^{\frac{p_2}{p_1-1}}\right) +$$

$$+o\left(\lambda_{n_k}^{\frac{3p_2-2p_1}{p_1-1}}\right) = \Phi_1(\sigma) + o\left(\lambda_{n_k}^{\frac{3p_2-2p_1}{p_1-1}}\right) \quad (k \to +\infty), \tag{33}$$

бо $\theta_k = o\left(\lambda_{n_k}^{\frac{3p_2-3p_1}{2(p_1-1)}}\right)$ $(k \to +\infty)$. Оскільки $\varphi_1(\lambda_{n_k}) \le \sigma \le \varphi_1(\lambda_{n_{k+1}})$, то $\lambda_{n_k} \le \Phi_1'(\sigma) \le \lambda_{n_{k+1}}$ і з (33) маємо $\ln \mu(\sigma) \ge \Phi_1(\sigma) + o\left(\Phi_1'(\sigma)^{\frac{3p_2-2p_1}{p_1-1}}\right) = \Phi_1(\sigma) + o(\sigma^{3p_2-2p_1})\,(\sigma \to +\infty)$, звідки, завдяки довільності δ, отримуємо асимптотичну нерівність

$$\ln \mu(\sigma) \ge T_1\sigma^{p_1} + T_2\sigma^{p_2} + \frac{(T_2p_2)^2}{2T_1p_1(p_1-1)}\sigma^{2p_2-p_1} + o(\sigma^{3p_2-2p_1}) \quad (\sigma \to +\infty). \tag{34}$$

З (32) і (34) випливає (2). Теорему 2 доведено.

Нескладно зрозуміти, як за допомогою тверджень 5)–8) леми 5) отримати твердження, подібні до теорем 1 і 2. Залишимо ці формулювання через їхню громіздкість поза рамками статті.

ЛІТЕРАТУРА

1. Шеремета М.Н. *Двучленная асимптотика целых рядов Дирихле* // Теория функций, функциональный анализ и их приложения (Харьков). – 1990. – Вып. 54. – С. 16–25.
2. Тарасюк Р.І. *Про двочленну асимптотику цілих функцій , представлених степеневими рядами* // Волинськ. матем. вісник. – 1995. – Вип. 2. – С. 162–164.
3. Шеремета М.М., Сумик О.М. *Зв'язок між зростанням спряжених за Юнгом функцій* // Матем. студії. – 1999. – Т. 11, №1. – С. 41–47.
4. Шеремета М.Н., Федыняк С.И. *О производной ряда Дирихле* // Сиб. мат. журн. – 1998. – Т. 39, №1. – С. 206–223.
5. Заболоцький М.В., Шеремета М.М. *Узагальнення теореми Ліндельофа* // Укр. мат. журн. – 1998. – Т. 50, №9. – С. 1177–1192.

Львівський національний університет імені Івана Франка
tftj@franko.lviv.ua

Надійшло 18.01.2005