УДК 517.95

У. М. Федусь

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТА ТЕПЛОЄМНОСТІ

U. M. Fedus'. *Inverse problem for determining a time-dependent coefficient of the thermal capacity*, Matematychni Studii, **25** (2006) 126–140.

We establish conditions for existence and uniqueness of solution of a coefficient inverse problem for one-dimentional heat equation in the case of boundary conditions of the first kind and a nonlocal overdetermination condition.

У. М. Федусь. *Обратная задача определения зависящего от времени коэффициента теплоемкости* // Математичні Студії. – 2006. – Т.25, №2. – С.126–140.

Установлены условия существования и единственности решения коэффициентной обратной задачи для одномерного уравнения теплопроводности в случае краевых условий первого рода и нелокального условия переопределения.

1. Вступ і формулювання результатів. В обернених задачах визначення старшого коефіцієнта в параболічному рівнянні другого порядку традиційними є задачі з невідомим коефіцієнтом при другій похідній за просторовими змінними [1]. У перших працях, присвячених коефіцієнтним оберненим задачам для рівнянь параболічного типу, було встановлено можливість однозначного визначення залежного від часу старшого коефіцієнта (температуропровідності) в одновимірному рівнянні теплопровідності, коли в додатковій умові задається значення теплового потоку або похідної від невідомої функції на межі області [2, 3]. Проте, у рівнянні теплопровідності невідомими можуть бути як коефіцієнт теплопровідності, так і коефіцієнт теплоємності, що приводить до розташування невідомого коефіцієнта або перед другою похідною u_{xx}, або перед похідною по часу u_t [4]. Задача знаходження залежного від часу коефіцієнта в рівнянні теплопровідності, розташованого перед другою похідною u_{xx}, у випадку нелокальних умов (крайових та перевизначення) досліджена в [1].

У цій праці розглянуто задачу, в якій невідомий коефіцієнт, залежний від часу, знаходиться при похідній u_t, а крайові умови та умова перевизначення є нелокальними. Інакше розташування невідомого коефіцієнта в рівнянні призвело до зміни методики зведення оберненої задачі до рівняння відносно невідомого коефіцієнта і до відмінних від раніше встановлених результатів [1].

За допомогою теореми Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора одержано умови існування розв'язку досліджуваної задачі. З урахуванням властивостей інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду встановлено єдиність розв'язку.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 35R30.

В області $Q_T = (0,h) \times (0,T)$ розглядаємо рівняння

$$a(t)u_t = u_{xx} + f(x,t) \tag{1}$$

з невідомим коефіцієнтом $a(t) > 0$, початковою умовою

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0,h], \tag{2}$$

крайовими умовами та умовою перевизначення вигляду

$$\sum_{j=1}^{4} \gamma_{ij}(t)u_j(t) = \kappa_i(t), \quad i \in \{1,2,3\} \quad t \in [0,T], \tag{3}$$

де $u_1(t) = u(0,t)$, $u_2(t) = u_x(0,t)$, $u_3(t) = u(h,t)$, $u_4(t) = u_x(h,t)$. Нехай ранг матриці з коефіцієнтів γ_{ij}, $i \in \{1,2,3\}$, $j \in \{1,\dots,4\}$, дорівнює трьом. В припущенні, що відмінний від нуля мінор третього порядку не змінює свого розташування при $t \in [0,T]$, можемо розв'язати (3) відносно функцій $u_i(t)$. Тоді, в залежності від розташування цього мінора, умови (3) приводять до шести випадків [1, с.5]. Розглянемо один з них:

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(h,t) = \mu_2(t), \quad t \in [0,T], \tag{4}$$

$$\nu_1(t)u_x(0,t) + \nu_2(t)u_x(h,t) = \mu_3(t), \quad t \in [0,T]. \tag{5}$$

Припустимо, що виконуються умови:

(A1) $\varphi \in C^2([0,h])$, $\mu_i \in C^1([0,T]), i \in \{1,2,3\}$, $f \in C^{1,0}(\overline{Q_T})$, $\nu_i \in C^1([0,T])$, $i \in \{1,2\}$;

(A2) $\nu_1(t)f(0,t) - \nu_2(t)f(h,t) \geq 0$, $\nu_1(t)\mu_1'(t) - \nu_2(t)\mu_2'(t) > 0$, $t \in [0,T]$, $\nu_1(t)\varphi''(x) - \nu_2(t)\varphi''(h-x) > 0$, $(x,t) \in \overline{Q}_T$, $\mu_1'(0) \neq 0$, $\mu_2'(0) \neq 0$;

(A3) $\varphi(0) = \mu_1(0)$, $\varphi(h) = \mu_2(0)$, $\nu_1(0)\varphi'(0) + \nu_2(0)\varphi'(h) = \mu_3(0)$, $\frac{1}{\mu_1'(0)}(\varphi''(0) + f(0,0)) = \frac{1}{\mu_2'(0)}(\varphi''(h) + f(h,0))$.

Теорема 1. *При виконанні умов (A1)–(A3) можна вказати таке число T_0, $0 < T_0 \leq T$, що розв'язок $(a(t), u(x,t))$ задачі (1), (2), (4), (5) з класу $C([0,T_0]) \times C^{2,1}(\overline{Q_{T_0}})$ існує.*

Теорема 2. *Нехай існує розв'язок $(a(t), u(x,t)) \in H^{\gamma/2}([0,T]) \times H^{2+\gamma,1+\gamma/2}(\overline{Q_T})$ задачі (1), (2), (4), (5). Тоді, якщо $\nu_1(t)\mu_1'(t) - \nu_2(t)\mu_2'(t) \neq 0$ на [0,T], то цей розв'язок єдиний.*

2. Доведення теореми 1. Спочатку виведемо рівняння відносно $a(t)$. Для цього, тимчасово вважаючи відомою функцію $a(t) \in C([0,T])$, знайдемо за допомогою функції Гріна [4] розв'язок задачі (1), (2), (4):

$$u(x,t) = \int_0^h \varphi(\xi)G_1(x,t,\xi,0)\,d\xi + \int_0^t \frac{\mu_1(\tau)}{a(\tau)}\,G_{1\xi}(x,t,0,\tau)\,d\tau -$$

$$- \int_0^t \frac{\mu_2(\tau)}{a(\tau)}\,G_{1\xi}(x,t,h,\tau)d\tau + \int_0^t\int_0^h \frac{f(\xi,\tau)}{a(\tau)}\,G_1(x,t,\xi,\tau)d\xi\,d\tau, \tag{6}$$

де

$$G_k(x,t,\xi,\tau)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta(t)-\theta(\tau))}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^{[\frac{k-1}{2}]n}\Bigg(\exp\Big(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\Big)+$$

$$+(-1)^k\exp\Big(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\Big)\Bigg),\quad k\in\{1,\ldots,4\},\quad \theta(t)=\int\limits_0^t\frac{d\tau}{a(\tau)}.$$

Продиференціювавши (6) по змінній x з врахуванням означення функції Гріна G_i $(i\in\{1,2\})$, її властивостей та умов узгодження (A3), отримаємо:

$$u_x(x,t)=\int\limits_0^h\varphi'(\xi)G_2(x,t,\xi,0)\,d\xi-\int\limits_0^t\mu_1'(\tau)G_2(x,t,0,\tau)\,d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\mu_2'(\tau)G_2(x,t,h,\tau)\,d\tau+\int\limits_0^t\int\limits_0^h\frac{f(\xi,\tau)}{a(\tau)}\,G_{1x}(x,t,\xi,\tau)d\xi\,d\tau. \tag{7}$$

Для знаходження рівняння відносно $a(t)$ підставимо (7) в (5), покладемо в отриманому виразі $t=\sigma$, домножимо на $\frac{1}{a(\sigma)}G_4(0,t,0,\sigma)$ та проінтегруємо від 0 до t. Подамо отриманий вираз таким чином:

$$\int\limits_0^h\varphi'(\xi)d\xi\int\limits_0^t\frac{\nu_1(\sigma)-\nu_1(t)}{a(\sigma)}\,G_4(0,t,0,\sigma)G_2(0,\sigma,\xi,0)d\sigma+\int\limits_0^t\mu_1'(\tau)d\tau\int\limits_\tau^t\frac{\nu_1(t)-\nu_1(\sigma)}{a(\sigma)}\,G_4(0,t,0,\sigma)\times$$

$$\times G_2(0,\sigma,0,\tau)d\sigma+\int\limits_0^t\mu_2'(\tau)d\tau\int\limits_\tau^t\frac{\nu_1(\sigma)-\nu_1(t)}{a(\sigma)}\,G_4(0,t,0,\sigma)G_2(0,\sigma,h,\tau)d\sigma+\int\limits_0^h d\xi\int\limits_0^t\frac{f(\xi,\tau)}{a(\tau)}\,d\tau\times$$

$$\times\int\limits_\tau^t\frac{\nu_1(\sigma)-\nu_1(t)}{a(\sigma)}\,G_4(0,t,0,\sigma)G_{1x}(0,\sigma,\xi,\tau)d\sigma+\int\limits_0^h\varphi'(\xi)d\xi\int\limits_0^t\frac{\nu_2(\sigma)-\nu_2(t)}{a(\sigma)}\,G_4(0,t,0,\sigma)\times$$

$$\times G_2(h,\sigma,\xi,0)d\sigma+\int\limits_0^t\mu_1'(\tau)d\tau\int\limits_\tau^t\frac{\nu_2(t)-\nu_2(\sigma)}{a(\sigma)}\,G_4(0,t,0,\sigma)G_2(h,\sigma,0,\tau)d\sigma+\int\limits_0^t\mu_2'(\tau)d\tau\times$$

$$\times\int\limits_\tau^t\frac{\nu_2(\sigma)-\nu_2(t)}{a(\sigma)}\,G_4(0,t,0,\sigma)G_2(h,\sigma,h,\tau)d\sigma+\int\limits_0^h d\xi\int\limits_0^t\frac{f(\xi,\tau)}{a(\tau)}\,d\tau\int\limits_\tau^t\frac{\nu_2(\sigma)-\nu_2(t)}{a(\sigma)}\,G_4(0,t,0,\sigma)\times$$

$$\times G_{1x}(h,\sigma,\xi,\tau)d\sigma+\nu_1(t)\Bigg(\int\limits_0^h\varphi'(\xi)d\xi\int\limits_0^t\frac{1}{a(\sigma)}\,G_4(0,t,0,\sigma)G_2(0,\sigma,\xi,0)d\sigma-\int\limits_0^t\mu_1'(\tau)d\tau\int\limits_\tau^t\frac{1}{a(\sigma)}\times$$

$$\times G_4(0,t,0,\sigma)G_2(0,\sigma,0,\tau)d\sigma+\int\limits_0^t\mu_2'(\tau)d\tau\int\limits_\tau^t\frac{1}{a(\sigma)}G_4(0,t,0,\sigma)G_2(0,\sigma,h,\tau)d\sigma+\int\limits_0^h d\xi\int\limits_0^t\frac{f(\xi,\tau)}{a(\tau)}\times$$

$$\times d\tau\int\limits_\tau^t\frac{1}{a(\sigma)}\,G_4(0,t,0,\sigma)G_{1x}(0,\sigma,\xi,\tau)d\sigma\Bigg)+\nu_2(t)\Bigg(\int\limits_0^h\varphi'(\xi)d\xi\int\limits_0^t G_4(0,t,0,\sigma)G_2(h,\sigma,\xi,0)\frac{d\sigma}{a(\sigma)}-$$

$$-\int_0^t \mu_1'(\tau)d\tau\int_\tau^t \frac{1}{a(\sigma)}\,G_4(0,t,0,\sigma)G_2(h,\sigma,0,\tau)d\sigma+\int_0^t \mu_2'(\tau)d\tau\int_\tau^t \frac{1}{a(\sigma)}\,G_4(0,t,0,\sigma)G_2(h,\sigma,h,\tau)d\sigma+$$

$$+\int_0^h d\xi\int_0^t \frac{f(\xi,\tau)}{a(\tau)}\,d\tau\int_\tau^t \frac{1}{a(\sigma)}\,G_4(0,t,0,\sigma)G_{1x}(h,\sigma,\xi,\tau)d\sigma\Bigg)=\int_0^t \frac{\mu_3(\tau)}{a(\tau)}\,G_4(0,t,0,\tau)d\tau. \tag{8}$$

Продиференціювавши (8) по t з урахуванням формул [5, с.13,17] і

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^t\int_0^h \frac{f(\xi,\tau)}{a(\tau)}\,G(x,t,\xi,\tau)d\xi\,d\tau\right)=\frac{1}{a(t)}\left(f(x,t)+\int_0^t \frac{d\tau}{a(\tau)}\int_0^h f(\xi,\tau)G_{xx}(x,t,\xi,\tau)d\xi\right), \tag{9}$$

отримаємо рівняння для $a(t)$:

$$a(t)=\frac{\nu_1(t)f(0,t)-\nu_2(t)f(h,t)+\sum\limits_{i=0}^{4}u_i(t)}{\nu_1(t)\mu_1'(t)-\nu_2(t)\mu_2'(t)},\quad t\in[0,T], \tag{10}$$

де

$$u_0(t)=\int_0^h(\nu_1(t)\varphi''(\xi)-\nu_2(t)\varphi''(h-\xi))G_4(0,t,\xi,0)d\xi+\int_0^t(\nu_1(t)\mu_2'(\tau)-\nu_2(t)\mu_1'(\tau))\times$$

$$\times G_{3\xi}(h,t,0,\tau)d\tau-\int_0^t \mu_3'(\tau)G_4(0,t,0,\tau)d\tau+\int_0^t \frac{\nu_1(t)f(h,\tau)-\nu_2(t)f(0,\tau)}{a(\tau)}\,G_{4\xi}(0,t,h,\tau)d\tau+$$

$$+\int_0^t \frac{d\tau}{a(\tau)}\int_0^h(\nu_2(t)f_x(h-\xi,\tau)-\nu_1(t)f_x(\xi,\tau))G_{4\xi}(0,t,\xi,\tau)d\xi+\Big((\nu_1(t)-\nu_1(0))\varphi'(0)+(\nu_2(t)-$$

$$-\nu_2(0))\varphi'(h)\Big)G_4(0,t,0,0),$$

$$u_1(t)=\int_0^h\varphi'(\xi)d\xi\int_0^t\Big((\nu_1(t)-\nu_1(\sigma))G_2(0,\sigma,\xi,0)+(\nu_2(t)-\nu_2(\sigma))G_2(h,\sigma,\xi,0)\Big)G_{4\sigma}(0,t,0,\sigma)d\sigma,$$

$$u_2(t)=\int_0^t d\tau\int_\tau^t\Big(\mu_1'(\tau)(\nu_1(\sigma)-\nu_1(t))+\mu_2'(\tau)(\nu_2(t)-\nu_2(\sigma))\Big)\,G_{4\sigma}(0,t,0,\sigma)G_2(0,\sigma,0,\tau)d\sigma,$$

$$u_3(t)=\int_0^t d\tau\int_\tau^t\Big(\mu_1'(\tau)(\nu_2(\sigma)-\nu_2(t))+\mu_2'(\tau)(\nu_1(t)-\nu_1(\sigma))\Big)\,G_{4\sigma}(0,t,0,\sigma)G_2(h,\sigma,0,\tau)d\sigma,$$

$$u_4(t)=\int_0^t \frac{d\tau}{a(\tau)}\int_\tau^t(\nu_1(t)-\nu_1(\sigma))G_{4\sigma}(0,t,0,\sigma)d\sigma\int_0^h f(\xi,\tau)G_{1x}(0,\sigma,\xi,\tau)d\xi+\int_0^t\frac{d\tau}{a(\tau)}\int_\tau^t(\nu_2(t)-$$

$$-\nu_2(\sigma))G_{4\sigma}(0,t,0,\sigma)d\sigma\int_0^h f(\xi,\tau)G_{1x}(h,\sigma,\xi,\tau)d\xi.$$

Для доведення існування розв'язку рівняння (10) застосуємо теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора, для чого встановимо апріорні оцінки $a(t)$. При виконанні умов (A2) виконується оцінка

$$\int_0^h (\nu_1(t)\varphi''(\xi)-\nu_2(t)\varphi''(h-\xi))G_4(0,t,\xi,0)d\xi \ge \min_{\overline{Q}_T}(\nu_1(t)\varphi''(x)-\nu_2(t)\varphi''(h-x))\times$$
$$\times\int_0^h G_4(0,t,\xi,0)d\xi > 0. \tag{11}$$

При $t\to 0$ всі інші доданки з $u_0(t)$ та $\sum_{i=1}^4 u_i(t)$ прямують до нуля [6, с.138]. Тому існує таке число $T_1, T_1 \le T$, що на $[0,T_1]$, буде виконуватись нерівність

$$\frac{1}{2}\int_0^h (\nu_1(t)\varphi''(\xi)-\nu_2(t)\varphi''(h-\xi))G_4(0,t,\xi,0)d\xi \ge \int_0^t \mu_3'(\tau)G_4(0,t,0,\tau)d\tau - \int_0^t (\nu_1(t)\mu_2'(\tau)-$$
$$-\nu_2(t)\mu_1'(\tau))G_{3\xi}(h,t,0,\tau)d\tau - \int_0^t \frac{\nu_1(t)f(h,\tau)-\nu_2(t)f(0,\tau)}{a(\tau)}G_{4\xi}(0,t,h,\tau)d\tau - \int_0^t \frac{d\tau}{a(\tau)}\times$$
$$\times\int_0^h (\nu_2(t)f_x(h-\xi,\tau)-\nu_1(t)f_x(\xi,\tau))G_{4\xi}(0,t,\xi,\tau)d\xi - \Big((\nu_1(t)-\nu_1(0))\varphi'(0)+(\nu_2(t)-$$
$$-\nu_2(0))\varphi'(h)\Big)G_4(0,t,0,0) - \sum_{i=1}^4 u_i(t). \tag{12}$$

Тоді, враховуючи (11), отримуємо таку оцінку:

$$\sum_{i=0}^4 u_i(t) \ge \frac{1}{2}\int_0^h (\nu_1(t)\varphi''(\xi)-\nu_2(t)\varphi''(h-\xi))G_4(0,t,\xi,0)d\xi \ge C_1\int_0^h G_4(0,t,\xi,0)d\xi$$

і для $a(t)$ справджується нерівність

$$a(t) \ge C_2\int_0^h G_4(0,t,\xi,0)d\xi \quad \text{або} \quad \frac{1}{a(t)}\int_0^h G_4(0,t,\xi,0)d\xi \le \frac{1}{C_2}. \tag{13}$$

Скористаємося методом доведення нерівності Біхарі [7, с.189]. Для цього покладемо в (13) $t=\tau$ та проінтегруємо від 0 до t. Отримаємо:

$$\int_0^t \frac{d\tau}{a(\tau)\sqrt{\theta(\tau)}}\int_0^h \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n \exp\left(-\frac{(\xi+2nh)^2}{4\theta(\tau)}\right)d\xi \le C_3 t.$$

Зробимо в інтегралі заміну $\sigma=\theta(\tau)$:

$$\int_0^{\theta(t)} \frac{d\sigma}{\sqrt{\sigma}}\int_0^h \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n \exp\left(-\frac{(\xi+2nh)^2}{4\sigma}\right)d\xi \le C_3 t. \tag{14}$$

Якщо розглянути функцію

$$r(s)=\int_0^s \frac{d\sigma}{\sqrt{\sigma}}\int_0^h \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n \exp\left(-\frac{(\xi+2nh)^2}{4\sigma}\right)d\xi,$$

то (14) можна подати у вигляді

$$r(\theta(t))\le C_3 t. \tag{15}$$

Позначимо $R_0=\sup\limits_{[0,\infty)} r(s)$. Очевидно, що $r(s)$ — монотонно зростаюча неперервна на $[0,\infty)$, тоді до неї існує обернена монотонно зростаюча неперервна функція $r^{-1}(\sigma)$ на проміжку $[0,R_0)$. Отже, з (15) маємо $\theta(t)\le r^{-1}(C_3t)\le C_4$, $t\in[0,T_2]$, де число $T_2, 0<T_2\le T$, задовольняє нерівність $C_3T_2<R_0$.

Використовуючи отриману нерівність в (13), встановлюємо оцінку $a(t)\ge A_0>0,\ t\in[0,T_2]$.

Проведемо оцінку $a(t)$ зверху. З нерівності

$$\int_0^h G_4(0,t,\xi,0)d\xi\le\int_0^h G_2(0,t,\xi,0)d\xi=1$$

маємо оцінку першого доданка в u_0

$$\int_0^h(\nu_1(t)\varphi''(\xi)-\nu_2(t)\varphi''(h-\xi))G_4(0,t,\xi,0)d\xi\le M_1.$$

Застосувавши нерівність

$$z^p\exp(-qz^2)\le C_{p,q}<\infty,\ \forall z\in[0,\infty), p,q\in R_+, \tag{16}$$

для оцінки функції

$$G_{3\xi}(h,t,0,\tau)=\frac{1}{\sqrt{\pi}(\theta(t)-\theta(\tau))^{3/2}}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n h(1+2n)\exp\left(-\frac{h^2(1+2n)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right)\le M_2, \tag{17}$$

отримаємо

$$\left|\int_0^t(\nu_1(t)\mu_2'(\tau)-\nu_2(t)\mu_1'(\tau))G_{3\xi}(h,t,0,\tau)d\tau\right|\le M_3.$$

Використовуючи для оцінки третього доданка u_0 наступну нерівність

$$G_4(0,t,0,\tau)=\frac{1}{\sqrt{\pi(\theta(t)-\theta(\tau))}}\left(1-2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\exp\left(-\frac{(nh)^2}{\theta(t)-\theta(\tau)}\right)\right)\le\frac{1}{\sqrt{\pi(\theta(t)-\theta(\tau))}}, \tag{18}$$

маємо

$$\left|\int\limits_0^t \mu_3'(\tau) G_4(0,t,0,\tau)d\tau\right| \le M_4 \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}.$$

З рівності $G_{4\xi}(0,t,h,\tau) = -G_{3\xi}(h,t,0,\tau)$ та (17) отримаємо

$$\left|\int\limits_0^t \frac{\nu_1(t)f(h,\tau)-\nu_2(t)f(0,\tau)}{a(\tau)}\, G_{4\xi}(0,t,h,\tau)\, d\tau\right| \le M_5\theta(t).$$

Оскільки

$$\left|\int\limits_0^h G_{4\xi}(0,t,\xi,\tau)d\xi\right| \le \frac{M_6}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}},$$

то

$$\left|\int\limits_0^t \frac{d\tau}{a(\tau)}\int\limits_0^h (\nu_2(t)f_x(h-\xi,\tau)-\nu_1(t)f_x(\xi,\tau))G_{4\xi}(0,t,\xi,\tau)d\xi\right| \le M_7\sqrt{\theta(t)}.$$

З (18), враховуючи те, що $\nu_i \in C^1([0,T])$, $i \in \{1,2\}$, прийдемо до оцінки

$$\left|\Big((\nu_1(t)-\nu_1(0))\varphi'(0)+(\nu_2(t)-\nu_2(0))\varphi'(h)\Big)G_4(0,t,0,0)\right| \le \frac{M_8 t}{\sqrt{\theta(t)}}.$$

Тут M_i ($i \in \{1,\dots,8\}$) — додатні константи, які залежать від відомих величин.

Отже, враховуючи оцінку для $a(t)$ знизу, маємо:

$$u_0(t) \le C_5 + \frac{C_6 t}{\sqrt{\theta(t)}} + C_7\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}.$$

Позначимо через $a_{\max}(t) = \max\limits_{[0,t]} a(\tau)$. Тоді $u_0(t) \le C_5 + C_8\sqrt{a_{\max}(t)t}$ або за нерівністю Коші $u_0(t) \le C_9 + C_{10}a_{\max}(t)\sqrt{t}$.

З рівності $\int_0^h G_2(x,t,\xi,0)d\xi = 1, \quad x \in [0,h]$, $t \in [0,T]$, маємо

$$|u_1(t)| \le 2\max_{[0,h]}|\varphi'(x)|\max_{\substack{[0,T]\\ i\in\{1,2\}}}|\nu_i'(t)|\int\limits_0^t (t-\sigma)\Big|G_{4\sigma}(0,t,0,\sigma)\Big|d\sigma.$$

Обчислюючи та оцінюючи $G_{4\sigma}(0,t,0,\sigma)$ з допомогою (16), маємо

$$\Big|G_{4\sigma}(0,t,0,\sigma)\Big| \le \frac{1}{2a(\sigma)(\theta(t)-\theta(\sigma))}\, G_4(0,t,0,\sigma) + \frac{2h^2}{a(\sigma)\sqrt{\pi(\theta(t)-\theta(\sigma))^5}} \times$$
$$\times \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \exp\left(-\frac{n^2h^2}{\theta(t)-\theta(\sigma)}\right) \le \frac{1}{2a(\sigma)(\theta(t)-\theta(\sigma))}\, G_4(0,t,0,\sigma) + \frac{C_{11}}{a(\sigma)}. \tag{19}$$

Отже,

$$\int_0^t (t-\sigma)\Big|G_{4\sigma}(0,t,0,\sigma)\Big|d\sigma \le C_{12}a_{\max}(t)\sqrt{\theta(t)}+C_{13}\le C_{14}a_{\max}(t)\sqrt{t}+C_{13}.$$

Тоді $|u_1(t)|\le C_{15}a_{\max}(t)\sqrt{t}+C_{16}$.

Використаємо для оцінки u_2 нерівність (19)

$$|u_2(t)|\le C_{17}\int_0^t (t-\sigma)\Big|G_{4\sigma}(0,t,0,\sigma)\Big|d\sigma\int_0^\sigma G_2(0,\sigma,0,\tau)d\tau \le \frac{C_{17}a_{\max}(t)}{2}\int_0^t d\tau\int_\tau^t \frac{1}{a(\sigma)}\times$$
$$\times\; G_4(0,t,0,\sigma)G_2(0,\sigma,0,\tau)d\sigma + C_{18}\int_0^t d\tau\int_\tau^t\frac{1}{a(\sigma)}\,G_2(0,\sigma,0,\tau)d\sigma\le C_{19}a_{\max}(t)t+C_{20}.$$

Враховуючи те, що $G_2(0,t,h,\tau)\le\frac{1}{h}$, маємо оцінку наступного доданка в чисельнику (10)

$$|u_3(t)|\le C_{21}\int_0^t (t-\sigma)\,\Big|G_{4\sigma}(0,t,0,\sigma)\Big|d\sigma\le C_{22}a_{\max}(t)\sqrt{t}+C_{23}.$$

Зробимо в другому доданку u_4 в підінтегральному виразі заміну $h-\xi=\eta$ і повернемося до змінної ξ, тоді

$$|u_4(t)|\le\left|\int_0^t\frac{d\tau}{a(\tau)}\int_\tau^t(\nu_1(t)-\nu_1(\sigma))G_{4\sigma}(0,t,0,\sigma)d\sigma\int_0^h f(\xi,\tau)G_{1x}(0,\sigma,\xi,\tau)d\xi\right|+\left|\int_0^t\frac{d\tau}{a(\tau)}\times\right.$$
$$\left.\times\int_\tau^t(\nu_2(t)-\nu_2(\sigma))G_{4\sigma}(0,t,0,\sigma)d\sigma\int_0^h f(h-\xi,\tau)G_{1x}(0,\sigma,\xi,\tau)d\xi\right|\le C_{24}\int_0^t d\tau\int_\tau^t(t-\sigma)\times$$

$$\times|G_{4\sigma}(0,t,0,\sigma)|\,d\sigma\int_0^h(-G_{2\xi}(0,\sigma,\xi,\tau))d\xi=C_{24}\int_0^t(t-\sigma)\,|G_{4\sigma}(0,t,0,\sigma)|\,d\sigma\int_0^\sigma(G_2(0,\sigma,0,\tau)-$$
$$-\,G_2(0,\sigma,h,\tau)d\tau\le C_{24}\int_0^t d\tau\int_\tau^t(t-\sigma)\,|G_{4\sigma}(0,t,0,\sigma)|\,G_2(0,\sigma,0,\tau)d\sigma.$$

Використовуючи (19), маємо

$$|u_4(t)|\le\frac{a_{\max}(t)}{2}\,C_{24}\int_0^t d\tau\int_\tau^t\frac{1}{a(\sigma)}\,G_4(0,t,0,\sigma)G_2(0,\sigma,0,\tau)d\sigma+C_{25}\int_0^t d\tau\int_\tau^t\frac{d\sigma}{a(\sigma)\sqrt{\theta(\sigma)-\theta(\tau)}}+$$
$$+C_{26}\le C_{24}\frac{a_{\max}(t)}{2}\,t+C_{27}.$$

Враховуючи встановлені оцінки, отримуємо: $\sum_{i=0}^{4} u_i \le C_{28} + a_{\max}(t)(C_{29}t + C_{30}\sqrt{t})$. Тоді

$$a(t) \le C_{31} + a_{\max}(t)(C_{32}t + C_{33}\sqrt{t}), \quad t \in [0, T_2]. \tag{20}$$

Тому існує таке число $0 < T_3 \le T$, що для довільного $t \in [0, T_3]$ виконується нерівність $C_{32}t + C_{33}\sqrt{t} \le \frac{1}{2}$, звідки, продовжуючи оцінку (20), отримаємо

$$a_{\max}(t) \le C_{34},\ t \in [0, T_3]. \tag{21}$$

При відомих оцінках $a(t)$ і $u_i(t), i = \overline{0,4}$, маємо оцінку

$$\left| \int_0^t \mu_3'(\tau) G_4(0,t,0,\tau)d\tau - \int_0^t \frac{\nu_1(t)f(h,\tau) - \nu_2(t)f(0,\tau)}{a(\tau)} G_{4\xi}(0,t,h,\tau)d\tau - \int_0^t (\nu_1(t)\mu_2'(\tau) - \right.$$
$$-\nu_2(t)\mu_1'(\tau))G_{3\xi}(h,t,0,\tau)d\tau - \int_0^t \frac{d\tau}{a(\tau)} \int_0^h (\nu_2(t)f_x(h-\xi,\tau) - \nu_1(t)f_x(\xi,\tau))G_{4\xi}(0,t,\xi,\tau)d\xi -$$
$$\left. -\Big((\nu_1(t) - \nu_1(0))\varphi'(0) + (\nu_2(t) - \nu_2(0))\varphi'(h) \Big) G_4(0,t,0,0) - \sum_{i=1}^{4} u_i(t) \right| \le C_{35}\sqrt{t} + C_{36}t,$$

тоді з (11) і (12) можемо записати нерівність $C_{35}\sqrt{T_1} + C_{36}T_1 \ge 0$.

Тому, беручи $T_0 = \min\{T_1, T_2, T_3\}$, з (21) маємо $a(t) \le A_1 < +\infty$, $t \in [0, T_0]$.

У встановлених оцінках C_i $(i \in \{1, \dots, 36\}), A_0, A_1$ — додатні константи, які залежать від відомих величин.

Нехай $N = \{a(t) \in C([0, T_0]) \colon 0 < A_0 \le a(t) \le A_1 < \infty\}$. Запишемо рівняння (10) у вигляді $a(t) = Pa(t)$. Внаслідок апріорних оцінок оператор P переводить множину N в себе. Застосування теореми Шаудера вимагає встановлення компактності або, згідно з теоремою Асколі-Арцела, рівномірної обмеженості та одностайної неперервності множини PN у просторі неперервних функцій. Оскільки суму $\sum_{i=1}^{4} u_i(t)$ з (10) можна подати у вигляді

$$\sum_{i=1}^{4} u_i(t) = \sum_{i=1}^{8} \int_0^t (\nu(t) - \nu(\sigma))\psi_i(\sigma) G_{4\sigma}(0,t,0,\sigma)d\sigma, \quad \psi_i(\sigma) \in C^1[0,T],$$

тоді достатньо встановити одностайну неперервність для множин P_0N та P_1N, де

$$(P_0a)(t) = \int_0^h (\nu_1(t)\varphi''(\xi) - \nu_2(t)\varphi''(h-\xi))G_4(0,t,\xi,0)d\xi + \int_0^t (\nu_1(t)\mu_2'(\tau) - \nu_2(t)\mu_1'(\tau)) \times$$
$$\times G_{3\xi}(h,t,0,\tau)d\tau - \int_0^t \mu_3'(\tau)G_4(0,t,0,\tau)d\tau + \int_0^t \frac{\nu_1(t)f(h,\tau) - \nu_2(t)f(0,\tau)}{a(\tau)} G_{4\xi}(0,t,h,\tau)d\tau +$$
$$+ \int_0^t \frac{d\tau}{a(\tau)} \int_0^h (\nu_2(t)f_x(h-\xi,\tau) - \nu_1(t)f_x(\xi,\tau))G_{4\xi}(0,t,\xi,\tau)d\xi + \big((\nu_1(t) - \nu_1(0))\varphi'(0) + (\nu_2(t) -$$

$$-\nu_2(0))\varphi'(h)\big)G_4(0,t,0,0),$$

$$(P_1a)(t)=\int\limits_0^t(\nu(t)-\nu(\sigma))\psi(\sigma)G_{4\sigma}(0,t,0,\sigma)d\sigma,\quad \psi(\sigma)\in C^1[0,T].$$

Оператор P_0 — цілком неперервний як сума цілком неперервних операторів [5, с.27].

Встановимо одностайну неперервність множини P_1N. Задамо довільне $\varepsilon>0$ і розглянемо різницю $\Delta=|(P_1a)(t_2)-(P_1a)(t_1)|$ з довільними $t_1,t_2\in[0,T]$, $t_1\neq t_2$. Оскільки

$$|(P_1a)(t)|\leq\max_{[0,T]}|\psi(t)|\max_{[0,T]}|\nu'(t)|\int\limits_0^t(t-\sigma)\,|G_{4\sigma}(0,t,0,\sigma)|\,d\sigma,$$

то з оцінок (18), (19) та означення множини N маємо

$$(t-\sigma)|G_{4\sigma}(0,t,0,\sigma)|\leq C_1(t-\sigma)+\frac{C_2}{\sqrt{t-\sigma}}.$$

Тоді

$$|(P_1a)(t)|\leq C_3\int\limits_0^t\frac{d\sigma}{\sqrt{t-\sigma}}+C_4\int\limits_0^t(t-\sigma)d\sigma=2C_3\sqrt{t}+\frac{C_4}{2}t^2.$$

Тому для вказаного ε існує таке t_0, що $|P_1a(t)|<\frac{\varepsilon}{6}$. Тоді при $t_i\leq t_0$ $(i\in\{1,2\})$, матимемо $\Delta\leq|(P_1a)(t_2)|+|(P_1a)(t_1)|<\frac{\varepsilon}{3}$. Тут C_i $(i\in\{1,\dots,4\})$ — константи, що залежать від відомих величин.

Розглянемо тепер випадок, коли $t_0<t_i$ $(i\in\{1,2\})$. Вважаємо для визначеності $t_1<t_2$. Зробимо в першому та другому інтегралах з виразу Δ заміни $\theta(t_2)-\theta(\sigma)=z$ і $\theta(t_1)-\theta(\sigma)=z$ відповідно. Функція $\theta(t)$ — монотонно зростаюча, тому до неї існує обернена θ^{-1}. Тоді, використовуючи явний вигляд $G_{4\sigma}(0,t,0,\sigma)$, маємо

$$\Delta=\left|\int\limits_0^{t_2}(\nu(t_2)-\nu(\sigma))\psi(\sigma)G_{4\sigma}(0,t_2,0,\sigma)d\sigma-\int\limits_0^{t_1}(\nu(t_1)-\nu(\sigma))\psi(\sigma)G_{4\sigma}(0,t_1,0,\sigma)d\sigma\right|=$$

$$=\left|\int\limits_0^{\theta(t_2)}(\nu(t_2)-\nu(\theta^{-1}(\theta(t_2)-z)))\psi(\theta^{-1}(\theta(t_2)-z))\left(\frac{1}{\sqrt{\pi z^3}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\exp\left(-\frac{n^2h^2}{z}\right)-\frac{2h^2}{\sqrt{\pi z^5}}\times\right.\right.$$

$$\times\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^2\exp\left(-\frac{n^2h^2}{z}\right)\Bigg)dz-\int\limits_0^{\theta(t_1)}(\nu(t_1)-\nu(\theta^{-1}(\theta(t_1)-z)))\psi(\theta^{-1}(\theta(t_1)-z))\left(\frac{1}{\sqrt{\pi z^3}}\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\exp\left(-\frac{n^2h^2}{z}\right)-\frac{2h^2}{\sqrt{\pi z^5}}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^2\exp\left(-\frac{n^2h^2}{z}\right)\right)dz\Bigg|\leq\left|\int\limits_0^{t_0}\Big((\nu(t_2)-\right.$$

$$-\nu(\theta^{-1}(\theta(t_2)-z)))\psi(\theta^{-1}(\theta(t_2)-z))-(\nu(t_1)-\nu(\theta^{-1}(\theta(t_1)-z)))\psi(\theta^{-1}(\theta(t_1)-z))\Big)\left(\frac{1}{\sqrt{\pi z^3}}\times\right.$$

$$\times\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\exp\left(-\frac{n^2h^2}{z}\right)-\frac{2h^2}{\sqrt{\pi z^5}}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^2\exp\left(-\frac{n^2h^2}{z}\right)\Bigg)dz\Bigg|+\Bigg|\int_{t_0}^{\frac{t_1}{A_0}}\Bigg((\nu(t_2)-$$

$$-\nu(\theta^{-1}(\theta(t_2)-z)))\psi(\theta^{-1}(\theta(t_2)-z))-(\nu(t_1)-\nu(\theta^{-1}(\theta(t_1)-z)))\psi(\theta^{-1}(\theta(t_1)-z))\Bigg)\Bigg(\frac{1}{\sqrt{\pi z^3}}\times$$

$$\times\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\exp\left(-\frac{n^2h^2}{z}\right)-\frac{2h^2}{\sqrt{\pi z^5}}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^2\exp\left(-\frac{n^2h^2}{z}\right)\Bigg)dz\Bigg|+\Bigg|\int_{\frac{t_1}{A_0}}^{\frac{t_2}{A_0}}(\nu(t_2)-$$

$$-\nu(\theta^{-1}(\theta(t_2)-z)))\psi(\theta^{-1}(\theta(t_2)-z))\Bigg(\frac{1}{\sqrt{\pi z^3}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\exp\left(-\frac{n^2h^2}{z}\right)-\frac{2h^2}{\sqrt{\pi z^5}}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^2\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{n^2h^2}{z}\right)\Bigg)dz\Bigg|=\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3.$$

Шляхом вибору t_0, згідно з встановленою раніше оцінкою, отримаємо $\Delta_1<\varepsilon/3$. При оцінці Δ_3 врахуємо те, що

$$\left|\frac{2h^2}{\sqrt{\pi z^5}}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^2\exp\left(-\frac{n^2h^2}{z}\right)\right|\le M_1,$$

і оскільки $z>t_0$, то

$$\frac{1}{\sqrt{\pi z^3}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\exp\left(-\frac{n^2h^2}{z}\right)\le M_2.$$

Отже, $\Delta_3\le M_3(\theta(t_2)-\theta(t_1))\le\frac{M_3}{A_0}(t_2-t_1)$, тому існує таке $\delta_1>0$, що $\Delta_3<\frac{\varepsilon}{3}$ при $t_2-t_1<\delta_1$.

Ввівши функцію

$$F(z,t)=(\nu(t)-\nu(\theta^{-1}(\theta(t)-z)))\psi(\theta^{-1}(\theta(t)-z)),\quad \nu,\,\psi\in C^1[0,T],$$

Δ_2 можемо переписати у такому вигляді

$$\Delta_2=\left|\int_{t_0}^{\frac{t_1}{A_0}}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi z^3}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n e^{-n^2h^2/z}-\frac{2h^2}{\sqrt{\pi z^5}}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^2 e^{-n^2h^2/z}\right)dz\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial F(z,t)}{\partial t}dt\right|\le M_4(t_2-t_1).$$

Звідси випливає існування такого $\delta_2>0$, що $\Delta_2<\frac{\varepsilon}{3}$ при $t_2-t_1<\delta_2$. Якщо позначити через $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}>0$, то, об'єднавши всі отримані оцінки, встановлюємо, що для такого δ при $|t_2-t_1|<\delta$ маємо $\Delta<\varepsilon$, що і доводить одностайну неперервність множини P_1N.

У встановлених оцінках M_i $(i\in\{1,\dots,4\})$ — відомі величини.

Отже, оператор P — цілком неперервний, і, згідно з теоремою Шаудера, існує нерухома точка цього оператора. Теорему доведено.

Зауважимо, що третю умову в (A2) можна забезпечити кількома способами:

1) $\nu_1(t) > 0, \nu_2(t) \leq 0, t \in [0,T], \varphi''(x) > 0, x \in [0,h]$;

2) $\varphi''(x)>0,\ x \in [0,h],\ \varphi''(x)-\varphi''(h-x)\geq 0,\ x \in [0,h/2],\ \nu_1(t)>\nu_2(t)>0,\ t \in [0,T]$.

Дійсно, якщо

$$\nu_1(t)\varphi''(x)-\nu_2(t)\varphi''(h-x)= \nu_1(t)(\varphi''(x)-\varphi''(h-x))+\varphi''(h-x)(\nu_1(t)-\nu_2(t)) > 0,$$

то умова 2) виконується.

3. Доведення теореми 2. Припустимо, що існують два розв'язки $(a_1(t), u_1(x,t))$ і $(a_2(t), u_2(x,t))$ задачі (1), (2), (4), (5). Нехай $a(t) \equiv a_1(t)-a_2(t)$, $u(x,t) \equiv u_1(x,t)-u_2(x,t)$. Утворимо задачу для $(a(t), u(x,t))$:

$$a_1(t)u_t = u_{xx} - a(t)u_{2t}, \quad (x,t) \in Q_T, \tag{22}$$

$$u(x,0) = 0, \quad x \in [0,h], \tag{23}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(h,t) = 0, \quad t \in [0,T], \tag{24}$$

$$\nu_1(t)u_x(0,t) + \nu_2(t)u_x(h,t) = 0, \quad t \in [0,T]. \tag{25}$$

Запишемо розв'язок задачі (22)–(24) за допомогою функції Гріна:

$$u(x,t) = -\int_0^t\int_0^h \frac{a(\tau)u_{2\tau}(\xi,\tau)}{a_1(\tau)}\, G_1(x,t,\xi,\tau)d\xi\, d\tau. \tag{26}$$

Підставимо (26) в (25), покладемо в отриманому виразі $t=\sigma$, домножимо на $\frac{1}{a_1(\sigma)}\, G_4(0,t,0,\sigma)$ та проінтегруємо від 0 до t. Подамо отриманий вираз таким чином

$$\int_0^h d\xi\int_0^t \frac{a(\tau)u_{2\tau}(\xi,\tau)}{a_1(\tau)}\, d\tau\int_\tau^t \frac{\nu_1(t)-\nu_1(\sigma)}{a_1(\sigma)}\, G_4(0,t,0,\sigma)G_{1x}(0,\sigma,\xi,\tau)d\sigma+\int_0^h d\xi\int_0^t \frac{a(\tau)}{a_1(\tau)}\, u_{2\tau}(\xi,\tau)\times$$
$$\times d\tau\int_\tau^t \frac{\nu_2(t)-\nu_2(\sigma)}{a_1(\sigma)}\, G_4(0,t,0,\sigma)G_{1x}(h,\sigma,\xi,\tau)d\sigma-\nu_1(t)\int_0^h d\xi\int_0^t \frac{a(\tau)u_{2\tau}(\xi,\tau)}{a_1(\tau)}\, d\tau\int_\tau^t \frac{G_4(0,t,0,\sigma)}{a_1(\sigma)}\times$$
$$\times G_{1x}(0,\sigma,\xi,\tau)d\sigma-\nu_2(t)\int_0^h d\xi\int_0^t \frac{a(\tau)}{a_1(\tau)}u_{2\tau}(\xi,\tau)d\tau\int_\tau^t \frac{1}{a_1(\sigma)}\, G_4(0,t,0,\sigma)G_{1x}(h,\sigma,\xi,\tau)d\sigma.$$

Використовуючи формули [5, с.13] і диференціюючи цю рівність по t з використанням формул [5, с.17], (9) та співвідношення $G_{4t}=-\frac{a_1(\sigma)}{a_1(t)}G_{4\sigma}$, отримаємо

$$-\frac{1}{a_1(t)}\int\limits_0^h d\xi\int\limits_0^t\frac{a(\tau)u_{2\tau}(\xi,\tau)}{a_1(\tau)}\,d\tau\int\limits_\tau^t(\nu_1(t)-\nu_1(\sigma))G_{4\sigma}(0,t,0,\sigma)G_{1x}(0,\sigma,\xi,\tau)d\sigma+$$

$$+\frac{\nu_1(t)}{a_1(t)}\left(-a(t)u_{2t}(0,t)-\int\limits_0^t\frac{a(\tau)}{a_1(\tau)}\,d\tau\int\limits_0^h u_{2\tau}(\xi,\tau)G_{4\xi\xi}(0,t,\xi,\tau)d\xi\right)-$$

$$-\frac{1}{a_1(t)}\int\limits_0^h d\xi\int\limits_0^t\frac{a(\tau)u_{2\tau}(\xi,\tau)}{a_1(\tau)}d\tau\int\limits_\tau^t(\nu_2(t)-\nu_2(\sigma))G_{4\sigma}(0,t,0,\sigma)G_{1x}(h,\sigma,\xi,\tau)d\sigma-$$

$$-\frac{\nu_2(t)}{a_1(t)}\left(-a(t)u_{2t}(h,t)-\int\limits_0^t\frac{a(\tau)}{a_1(\tau)}\,d\tau\int\limits_0^h u_{2\tau}(\xi,\tau)G_{3\xi\xi}(h,t,\xi,\tau)d\xi\right)=0.$$

Враховуючи умови (4), запишемо рівняння відносно $a(t)$:

$$a(t)(\nu_1(t)\mu_1'(t)-\nu_2(t)\mu_2'(t))+\int\limits_0^t\frac{a(\tau)}{a_1(\tau)}\,d\tau\int\limits_0^h u_{2\tau}(\xi,\tau)d\xi\int\limits_\tau^t(\nu_1(t)-\nu_1(\sigma))G_{4\sigma}(0,t,0,\sigma)\times$$

$$\times G_{1x}(0,\sigma,\xi,\tau)d\sigma+\nu_1(t)\int\limits_0^t\frac{a(\tau)}{a_1(\tau)}\,d\tau\int\limits_0^h u_{2\tau}(\xi,\tau)G_{4\xi\xi}(0,t,\xi,\tau)d\xi+$$

$$+\int\limits_0^t\frac{a(\tau)}{a_1(\tau)}\,d\tau\int\limits_0^h u_{2\tau}(\xi,\tau)d\xi\int\limits_\tau^t(\nu_2(t)-\nu_2(\sigma))G_{4\sigma}(0,t,0,\sigma)G_{1x}(h,\sigma,\xi,\tau)d\sigma-$$

$$-\nu_2(t)\int\limits_0^t\frac{a(\tau)}{a_1(\tau)}\,d\tau\int\limits_0^h u_{2\tau}(\xi,\tau)G_{3\xi\xi}(0,t,\xi,\tau)d\xi=0. \tag{27}$$

Отримали однорідне рівняння Вольтерри другого роду з ядром

$$K(t,\tau)=\frac{1}{a_1(\tau)}\int\limits_0^h u_{2\tau}(\xi,\tau)\left(\int\limits_\tau^t(\nu_1(t)-\nu_1(\sigma))G_{4\sigma}(0,t,0,\sigma))G_{1x}(0,\sigma,\xi,\tau)d\sigma+\int\limits_\tau^t(\nu_2(t)-\right.$$

$$\left.-\nu_2(\sigma))G_{4\sigma}(0,t,0,\sigma)G_{1x}(h,\sigma,\xi,\tau)d\sigma+\nu_1(t)G_{4\xi\xi}(0,t,\xi,\tau)-\nu_2(t)G_{3\xi\xi}(h,t,\xi,\tau)\right)d\xi.$$

Покажемо інтегровність ядра. З урахуванням оцінки (19) маємо

$$\left|\int\limits_\tau^t(\nu_1(t)-\nu_1(\sigma))G_{4\sigma}(0,t,0,\sigma)G_{1x}(0,\sigma,\xi,\tau)d\sigma\right|\le\max_{[0,T]}|\nu_1'(t)|\int\limits_\tau^t(t-\sigma)\Big|G_{4\sigma}(0,t,0,\sigma)\Big|\times$$

$$\times G_{1x}(0,\sigma,\xi,\tau)d\sigma\le C_1+C_2A_1\int\limits_\tau^t\frac{1}{a_1(\sigma)}\,G_4(0,t,0,\sigma)G_{1x}(0,\sigma,\xi,\tau)d\sigma.$$

Використаємо формули [5, с13] для обчислення інтеграла в правій частині цієї нерівності, тоді

$$\left|\int_\tau^t (\nu_1(t)-\nu_1(\sigma))G_{4\sigma}(0,t,0,\sigma)G_{1x}(0,\sigma,\xi,\tau)d\sigma\right| \le C_1+C_2A_1G_3(h,t,\xi,\tau).$$

Аналогічно до оцінки попереднього доданка отримаємо

$$\left|\int_\tau^t (\nu_2(t)-\nu_2(\sigma))G_{4\sigma}(0,t,0,\sigma)G_{1x}(h,\sigma,\xi,\tau)d\sigma\right| \le C_3+C_4\int_\tau^t G_4(0,t,0,\sigma)G_{1x}(h,\sigma,\xi,\tau)d\sigma \le$$
$$\le C_3+C_4A_1G_4(0,t,\xi,\tau).$$

Тоді з того, що $u_2(x,t) \in H^{2+\gamma,1+\gamma/2}(\overline{Q_T})$ та з оцінок об'ємних теплових потенціалів [6, с.318] випливає, що ядро інтегрального рівняння (27) має інтегровну особливість

$$|K(t,\tau)| \le \frac{C_5}{(t-\tau)^{1-\frac{\gamma}{2}}}.$$

Тут C_i $(i \in \{1,\ldots,5\})$ — відомі величини. Тоді рівняння (27) має єдиний розв'язок $a(t) \equiv 0$ на [0,T], а отже, і $u(x,t) \equiv 0$. Тому $a_1(t) = a_2(t)$ і $u_1(x,t) = u_2(x,t)$, що і доводить єдиність розв'язку задачі.

4. Зауваження. Отже, в попередніх пунктах знайдені умови існування на звуженому проміжку часу і єдиність на всьому проміжку часу розв'язку задачі (1), (2), (4), (5).

Зауваження 1. Якщо розглянути частинний випадок задачі, коли в умові перевизначення (5) $\nu_i = \mathrm{const}$, $i \in \{1,2\}$, отримаємо існування розв'язку відповідної задачі на всьому проміжку часу, якщо замість умов (A2) в теоремі 1 будуть виконуватися наступні умови:

$$\nu_1\mu_1'(t)-\nu_2\mu_2'(t)>0, \quad \nu_1\mu_2'(t)-\nu_2\mu_1'(t)\ge 0, \quad \nu_1 f(0,t)-\nu_2 f(h,t)>0,$$
$$\nu_1\varphi''(x)-\nu_2\varphi''(h-x)\ge 0, \quad \nu_1 f(h,t)-\nu_2 f(0,t)\le 0, \quad \nu_2 f_x(h-x,t)-\nu_1 f_x(x,t)\le 0,$$
$$\mu_3'(t)<0,\ x\in[0,h], t\in[0,T].$$

Зауваження 2. За рахунок підвищення гладкості вихідних даних до

$$\varphi\in H^{2+\gamma}([0,h]),\ \mu_i\in H^{1+\frac{\gamma}{2}}([0,T]), i\in\{1,2,3\},\ \nu_i\in H^{1+\frac{\gamma}{2}}([0,T]), i\in\{1,2\},\ f\in H^{1,\frac{\gamma}{2}}(\overline{Q_T})$$

в умові (A1), згідно з властивостями теплових потенціалів, отримаємо існування розв'язку $(a(t),u(x,t))$ задачі (1), (2), (4), (5) з класу $H^{\gamma/2}([0,T_0]) \times H^{2+\gamma,1+\gamma/2}(\overline{Q_{T_0}})$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Іванчов М.І. Обернені задачі теплопровідності з нелокальними умовами. – К.: Міністерство освіти України, 1995. – 82с.

2. Jones B.F. *The determination of a coefficient in a parabolic differential equation. Part I. Existence and uniqueness* // J.Math. Mech. – 1962. V.11, №6. – P. 907–918.

3. Jones B.F. *Various methods for finding unknown coefficient in parabolic equations* // Comm. Pure Appl. Math. – 1963. – V.16. – P. 33–34.

4. Гуль О., Дорожовець У., Іванчов М. *Обернені задачі визначення залежного від часу коефіцієнта при похідній за часом у параболічному рівнянні* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2003. – Вип. 62. – С. 27–37.

5. Ivanchov M.I. Inverse problems for equations of parabolic type. VNTL Publishers, 2003.

6. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.

7. Беккенбах Э. Беллман Р. Неравенства. – М.: Мир, 1965.

Львівський національний університет імені Івана Франка

Надійшло 15.12.2004
Після переробки 11.03.2006