УДК 512.538

Р. А. Заторський, І. І. Ліщинський

ПРО ЗВ'ЯЗОК ДЕТЕРМІНАНТІВ ІЗ ПАРАДЕТЕРМІНАНТАМИ

R. A. Zators'kyi, I. I. Lishchyns'kyi. *On connection between determinants and paradeterminants*, Matematychni Studii, **25** (2006) 97–102.

Some connections between determinants and paradeterminants are investigated.

Р. А. Заторский, И. И. Лищинский. *О связи детерминантов с парадетерминантами* // Математичні Студії. – 2006. – Т.25, №1. – С.97–102.

В работе исследуются некоторые связи детерминантов с парадетерминантами.

Аналогія властивостей детермінантів та парадетермінантів, в значній мірі пояснюється тісним звязком, який існує між ними. Виявляється, що в ряді випадків детермінанти можуть бути зведені до парадетермінантів. Позаяк для обчислення останніх достатньо виконати $\frac{n(n-1)}{2}$ операцій множення і стільки ж операцій додавання, то в багатьох випадках заміна детермінанта відповідним йому парадетермінантом може істотно спростити обчислення.

Дамо коротенькі відомості про парадетермінанти. Більш детальну інформацію читач знайде в [2].

Нехай задано деяке числове поле K.

Означення 1. Трикутну таблицю чисел $a_{ij} \in K$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_n, \tag{1}$$

назвемо *трикутною матрицею*, а число n — її порядком.

Звернемо увагу на той факт, що трикутна матриця в нашому розумінні не є матрицею в звичайному сенсі, тому що вона є трикутною, а не прямокутною таблицею чисел.

Кожному елементу a_{ij} трикутної матриці (1) поставимо у відповідність $(i-j+1)$ елементів a_{ik}, $k \in \{j, \ldots, i\}$, які назвемо *похідними елементами* трикутної матриці, породженими *ключовим елементом* a_{ij}.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 05A05.

Добуток всіх похідних елементів, що породжені ключовим елементом a_{ij} позначимо через $\{a_{ij}\}$ і назвемо *факторіальним добутком ключового елемента* a_{ij}, тобто

$$\{a_{ij}\} = \prod_{k=j}^{i} a_{ik}.$$

Означення 2. Набір ключових елементів трикутної матриці (1) назвемо *нормальним набором* цієї матриці, якщо вони породжують монотрансверсаль, тобто множину похідних елементів потужності n, кожні два з яких не лежать в одному стовпці цієї трикутної матриці.

Нехай $\mathbb{P}(n)$ — множина всіх впорядкованих розбиттів (див. [1], стор. 67) натурального числа n на натуральні доданки. Відомо, що

$$|\mathbb{P}(n)| = \sum_{r=1}^{n} \binom{n-1}{r-1} = 2^{n-1}. \tag{2}$$

Між нормальними наборами ключових елементів трикутної матриці (1) і впорядкованими розбиттями натурального числа n існує взаємно однозначна відповідність.

Кожному нормальному наборові a ключових елементів поставимо у відповідність знак $(-1)^{\varepsilon(a)}$, де $\varepsilon(a)$ — сума всіх індексів ключових елементів цього набору.

Означення 3. *Парадетермінантом* трикутної матриці (1) назвемо число

$$\operatorname{ddet}(A) = \left\langle \begin{matrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix} \right\rangle = \sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r)\in\mathbb{P}(n)} (-1)^{\varepsilon(a)} \prod_{s=1}^{r} \{a_{i(s),j(s)}\},$$

де $a_{i(s),j(s)}$ — ключовий елемент що відповідає s-тій компоненті розбиття $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$, а символ $\varepsilon(a)$ — знак нормального набору a ключових елементів.

Наступна теорема дає зручний алгоритм обчислення парадетермінантів.

Теорема 1. *Справедлива рівність:*

$$\left\langle \begin{matrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix} \right\rangle_n = (-1)\cdot \left\langle \begin{matrix} (a_{21}-a_{11})\cdot a_{22} & & & \\ (a_{31}-a_{11})\cdot a_{32} & a_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ (a_{n1}-a_{11})\cdot a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{matrix} \right\rangle_{n-1}.$$

Розглянемо матрицю вигляду

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & b_{n-1,3} & \ldots & b_{n-1,n-1} & 1 \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \ldots & b_{n,n-1} & b_{nn} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

яку назвемо *нижньою квазітрикутною матрицею*.

Теорема 2. *Для довільної трикутної матриці* (1) *справедлива тотожність*

$$\left\langle \begin{matrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix} \right\rangle = \begin{vmatrix} b_{11} & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & b_{n-1,3} & \ldots & b_{n-1,n-1} & 1 \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \ldots & b_{n,n-1} & b_{nn} \end{vmatrix}, \tag{4}$$

де

$$b_{ij} = \{a_{ij}\} = \prod_{k=j}^{i} a_{ik},\ 1 \le j \le i \le n. \tag{5}$$

Доведення. Доведемо, що алгоритм, викладений в наступних пунктах 1) і 2), встановлює взаємно однозначну відповідність між множиною нормальних наборів ключових елементів трикутної матриці та множиною трансверсалей з ненульовими елементами нижньої квазітрикутної матриці:

1) якщо a_{ij} — ключовий елемент трикутної матриці, то до трансверсалі належить елемент b_{ij} квадратної матриці;
2) якщо ж $a_{ik}, k \in \{j+1, \ldots, i\}$ — довільний похідний елемент ключового елемента a_{ij}, то до трансверсалі належить одиниця, яка розміщена в $(k-1)$–му рядку і k–му стовпці квадратної матриці.

а) Розглянемо два факторіальні добутки ключових елементів a_{i_1,j_1} і a_{i_2,j_2}, що належать до одного нормального набору. За означенням нормального набору ключових елементів та їх факторіального добутку, множини номерів стовпців всіх елементів цих факторіальних добутків задовольняють рівність

$$\{j_1, j_1+1, \ldots, i_1\} \cap \{j_2, j_2+1, \ldots, i_2\} = \varnothing.$$

Тому наведений алгоритм, кожному нормальному наборові ключових елементів трикутної матриці (1) ставить у відповідність трансверсаль ненульових елементів нижньої квазітрикутної матриці (3).

б) За пунктом 1), різним нормальним наборам ключових елементів трикутної матриці, очевидно, відповідають різні трансверсалі з ненульовими елементами нижньої квазітрикутної матриці.

в) Число трансверсалей з ненульовими елементами матриці B, при $n = 2$, дорівнює двом. Розкладемо детермінант нижньої квазітрикутної матриці k–го порядку за елементами першого її рядка. При цьому отримаємо два детермінанти нижніх трикутних матриць $(k-1)$–го порядку. Отже, за індукцією число трансверсалей з ненульовими елементами матриці (3), як і число всіх нормальних наборів трикутної матриці (1), дорівнює 2^{n-1}.

г) Для доведення теореми залишається довести, що знаки відповідних доданків парадетермінанта та детермінанта однакові. Нехай $a_{i_1 j_1}, a_{i_2 j_2}, \ldots, a_{i_k j_k}$ — деякий нормальний набір ключових елементів трикутної матриці, якому відповідає знак $(-1)^{\sum_{s=1}^{k}(i_s+j_s)}$, причому виконуються нерівності $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$. За наведеним вище алгоритмом, ключовому елементу a_{ij} і його похідним елементам відповідає елемент b_{ij} і $i - j$ елементів, що належать рядкам з номерами, меншими, ніж i. Отже, загальне число транспозицій перестановки перших індексів доданка, який відповідає даному нормальному наборові, дорівнює $\sum_{s=1}^{k}(i_s - j_s)$ і збігається із парністю значення виразу $\sum_{s=1}^{k}(i_s + j_s)$, що визначає знак відповідного доданка парадетермінанта.

Зауважимо, що цінність цього доведення полягає у побудові взаємно однозначної відповідності між нормальними наборами ключових елементів трикутної матриці та трансверсалями ненульових елементів нижньої квазітрикутної матриці.

Наведемо простіше доведення цієї теореми.

Для $n = 1$ і $n = 2$ рівність (4), очевидно, правильна. Нехай вона правильна для всіх $n \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$. Доведемо що виконується індукційний крок. З цією метою розкладемо парадетермінант і детермінант цієї рівності за елементами першого стовпця. Після деяких спрощень в правій частині, отримаємо рівність

$$\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}\{a_{i1}\}\,\mathrm{ddet}\,(R_{k,i+1}) = \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}b_{i1}\cdot B\begin{pmatrix} i & i+1\,,\ldots & k \\ i & i+1\,,\ldots & k\end{pmatrix},$$

яка і доводить виконання індукційного кроку. $\square$

Примітка 1. В останній рівності ми вважаємо, що $\mathrm{ddet}\,(R_{n,n+1}) = B\binom{n+1\ n}{n+1\ n} = 1$

Наслідок 1. *Для довільної нижньої квазітрикутної матриці (3), очевидно, виконується рівність*

$$\begin{vmatrix} b_{11} & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & b_{n-1,3} & \ldots & b_{n-1,n-1} & 1 \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \ldots & b_{n,n-1} & b_{nn} \end{vmatrix} = \left\langle \begin{matrix} b_{11} & & & & \\ \frac{b_{21}}{b_{22}} & b_{22} & & & \\ \frac{b_{31}}{b_{32}} & \frac{b_{32}}{b_{33}} & b_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ \frac{b_{n1}}{b_{n2}} & \frac{b_{n2}}{b_{n3}} & \frac{b_{n3}}{b_{n4}} & \ldots & b_{nn} \end{matrix} \right\rangle. \tag{6}$$

Примітка 2. Зауважимо, що рівність (6) правильна також тоді, коли деякі елементи нижньої квазітрикутної матриці дорівнюють 0, позаяк при обчисленні значення відповідного парадетермінанта нулі скорочуються і невизначеність зникає.

Теорема 3. *Нехай задана деяка матриця n-го порядку*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \tag{7}$$

для якої виконуються нерівності

$$A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \neq 0,\ A\begin{pmatrix}1\,2\\2\,3\end{pmatrix} \neq 0,\ \ldots, A\begin{pmatrix}1\,2\,\ldots\,n-2 & n-1\\2\,3\,\ldots\,n-1 & n\end{pmatrix} \neq 0, \tag{8}$$

ліві частини яких є скороченими записами мінорів матриці (7). Тоді правильна рівність

$$\det(A) = a_{12}a_{23}^{(1)}a_{34}^{(2)}\cdot\ldots\cdot a_{n-1,n}^{(n-2)}\cdot\mathrm{ddet}\left\langle \frac{a_{ij}^{(j-2)}}{a_{i,j+1}^{(j-1)}} \right\rangle_{1\le j\le i\le n}, \tag{9}$$

де

$$a_{i,p}^{(p-2)} = \frac{A\binom{1\,2\,\ldots\,p-2\ i}{2\,3\,\ldots\,p-1\ p}}{A\binom{1\,2\,\ldots\,p-2}{2\,3\ldots\,p-1}},\quad p\in\{3,4,\ldots,n\},\quad i\in\{p-1,p,\ldots,n\}, \tag{10}$$

$$a_{ip}^{(p-2)} = a_{ip},\quad p\in\{1,2\},\quad a_{n,n+1}^{n-1} = 1.$$

Доведення. Зведемо детермінант матриці (7) до детермінанта матриці A' вигляду:

$$A' = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}^{(1)} & \cdots & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}^{(1)} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n-1,1} & \alpha_{n-1,2} & \alpha_{n-1,3}^{(1)} & \cdots & \alpha_{n-1,n-1}^{(n-3)} & \alpha_{n-1,n}^{(n-2)} \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \alpha_{n,3}^{(1)} & \cdots & \alpha_{n,n-1}^{(n-3)} & \alpha_{n,n}^{(n-2)} \end{pmatrix}, \tag{11}$$

Цього можна досягнути додаванням до кожного стовпця матриці A, починаючи із третього, відповідних попередніх стовпців цієї матриці помножених на відповідні коефіцієнти. При цьому всі мінори, що мають вигляд

$$A\begin{pmatrix} 1\,2\,\ldots\,p-2\;i \\ 2\,3\,\ldots\,p-1\;p \end{pmatrix},\ \ A'\begin{pmatrix} 1\,2\,\ldots\,p-2\;i \\ 2\,3\,\ldots\,p-1\;p \end{pmatrix}, \quad p \in \{3,4,\ldots,n\},\ i \in \{p-1,p,\ldots,n\},$$

однакові. Тому, враховуючи структуру матриці A', отримаємо рівності:

$$A\begin{pmatrix} 1\,2\,\ldots\,p-2\;i \\ 2\,3\,\ldots\,p-1\;p \end{pmatrix} = a_{12}a_{23}^{(1)}\cdot\ldots\cdot a_{p-2,p-1}^{(p-3)}\cdot a_{i,p}^{(p-2)},\ p \in \{3,4,\ldots,n\},\ i \in \{p-1,p,\ldots,n\}. \tag{12}$$

Для $i = p-1$ рівності (12) запишуться у такому вигляді:

$$A\begin{pmatrix} 1\,2\,\ldots\,p-2\;p-1 \\ 2\,3\,\ldots\,p-1\;\;p \end{pmatrix} = a_{12}a_{23}^{(1)}\cdot\ldots\cdot a_{p-2,p-1}^{(p-3)}\cdot a_{p-1,p}^{(p-2)}, \quad p \in \{2,3,\ldots,n\}. \tag{13}$$

Із (12), (13) маємо рівності (10).

Винесемо за знак визначника $\det(A')$ добуток

$$a_{12}a_{23}^{(1)}\cdot\ldots\cdot a_{n-1,n}^{(n-2)} = A\begin{pmatrix} 1\,2\,\ldots\,n-2\;\;n-1 \\ 2\,3\,\ldots\,n-1\;\;\;n \end{pmatrix},$$

тоді, враховуючи (10), отримаємо рівність

$$\det(A) = a_{12}a_{23}^{(1)}\cdot\ldots\cdot a_{n-1,n}^{(n-2)}\cdot \begin{vmatrix} a_{11} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & \frac{a_{22}}{a_{12}} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{31} & \frac{a_{32}}{a_{12}} & \frac{a_{33}^{(1)}}{a_{23}^{(1)}} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & \frac{a_{n-1,2}}{a_{12}} & \frac{a_{n-1,3}^{(1)}}{a_{23}^{(1)}} & \frac{a_{n-1,4}^{(2)}}{a_{34}^{(2)}} & \cdots & \frac{a_{n-1,n-1}^{(n-3)}}{a_{n-2,n-1}^{(n-3)}} & 1 \\ a_{n,1} & \frac{a_{n,2}}{a_{12}} & \frac{a_{n,3}^{(1)}}{a_{23}^{(1)}} & \frac{a_{n4}^{(2)}}{a_{34}^{(2)}} & \cdots & \frac{a_{n,n-1}^{(n-3)}}{a_{n-2,n-1}^{(n-3)}} & \frac{a_{n,n}^{(n-2)}}{a_{n-1,n}^{(n-2)}} \end{vmatrix}. \tag{14}$$

Застосуємо до останньої рівності наслідок 1, тоді, враховуючи властивості парадетермінанта, отримаємо рівність (9). $\square$

Теорема 3 корисна також при встановленні рівностей між детермінантами. Проілюструємо це наступним твердженням.

Твердження 1. *Для довільної матриці (7), для $n \in \{3, 4, \ldots\}$ виконується рівність*

$$A\binom{1\,2\cdots n}{1\,2\cdots n}A\binom{1\,2\cdots n-2}{2\,3\cdots n-1} = A\binom{1\,2\cdots n-1}{1\,2\cdots n-1}A\binom{1\,2\cdots n-2\,n}{2\,3\cdots n-1\,n} - A\binom{1\,2\cdots n-2\,n-1}{2\,3\cdots n-1\;\;n}A\binom{1\,2\cdots n-2\;\;n}{1\,2\cdots n-2\,n-1}. \tag{15}$$

Доведення. Для $n = 3$ рівність (15) має вигляд

$$A\binom{1\,2\,3}{1\,2\,3}A\binom{1}{2} = A\binom{1\,2}{1\,2}A\binom{1\,3}{2\,3} - A\binom{1\,2}{2\,3}A\binom{1\,3}{1\,2}$$

і перевіряється беспосередньо. Перш за все відзначимо, що разом із рівністю (15), очевидно, виконується також рівність

$$A\binom{1\,2\cdots i}{1\,2\cdots r}A\binom{1\,2\cdots r-2}{2\,3\cdots r-1} = A\binom{1\,2\cdots r-1}{1\,2\cdots r-1}A\binom{1\,2\cdots r-2\,i}{2\,3\cdots r-1\,r} - A\binom{1\,2\cdots r-2\,r-1}{2\,3\cdots r-1\;\;r}A\binom{1\,2\cdots r-2\;\;i}{1\,2\cdots r-2\,r-1}, \tag{16}$$

де $r \in \{3, 4, \ldots n-1\}$; $i \in \{r, \ldots, n\}$

Нехай рівність (15) виконується для всіх $3 \le n \le k-1$. Доведемо її справедливість для $n = k$.

Розкладемо парадетермінант в правій частині рівності (9) за елементами останнього рядка тоді отримаємо рівність

$$A\binom{1\,2\cdots n}{1\,2\cdots n} = a_{nn}^{(n-2)}A\binom{1\,2\cdots n-1}{1\,2\cdots n-1} - a_{n,n-1}^{(n-3)}a_{n-1,n}^{(n-2)}A\binom{1\,2\cdots n-2}{1\,2\cdots n-2} + \ldots + (-1)^{n-3}a_{n3}^{(1)}a_{34}^{(2)} \times \ldots$$
$$\ldots \times a_{n-1,n}^{(n-2)}A\binom{1\,2}{1\,2} + (-1)^{n-2}a_{n2}a_{23}^{(1)}\ldots a_{n-1,n}^{(n-2)}A\binom{1}{1} + (-1)^{n-1}a_{n1}a_{12}a_{23}^{(1)}\ldots a_{n-1,n}^{(n-2)}.$$

Запишемо суму двох останніх доданків рівності (17) у вигляді

$$(-1)^{n-2}a_{23}^{(1)}a_{34}^{(2)}\ldots a_{n-1,n}^{(n-2)}(a_{11}a_{n2} - a_{12}a_{n1}) = (-1)^{n-2}a_{23}^{(1)}\ldots a_{n-1,n}^{(n-2)}A\binom{1\,n}{1\,2}.$$

Згрупуємо нові два останні доданки

$$(-1)^{n-3}a_{n3}^{(1)}a_{34}^{(2)}\ldots a_{n-1,n}^{(n-2)}A\begin{pmatrix}1\,2\\1\,2\end{pmatrix}, \quad (-1)^{n-2}a_{23}^{(1)}\ldots a_{n-1,n}^{(n-2)}A\begin{pmatrix}1\,n\\1\,2\end{pmatrix}$$

і отримаємо один доданок

$$(-1)^{n-3}a_{34}^{(2)}\ldots a_{n-1,n}^{(n-2)} \cdot \frac{A\binom{1\,2}{1\,2}A\binom{1\,n}{2\,3} - A\binom{1\,2}{2\,3}A\binom{1\,n}{1\,2}}{A\binom{1}{2}}.$$

Останній вираз, внаслідок (16) для $i = n$; $r = 3$, можна подати у вигляді

$$(-1)^{n-3}a_{34}^{(2)}\ldots a_{n-1,n}^{(n-2)}A\binom{1\,2\,n}{1\,2\,3}.$$

Продовжуючи подібні перетворення, зрештою отримаємо рівність (15). □

Отже, за доведеним твердженням, детермінант матриці (7) для довільного $n \in \{3, 4, \ldots\}$ може бути виражений через чотири мінори $(n-1)$-го порядку.

ЛІТЕРАТУРА

1. Эндрюс Г. Теория разбиений: Пер. с англ. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1982. – 256 с.
2. Заторський Р.А. *Про паравизначники та параперманенти трикутних матриць* // Математичні студії. – 2002. – Т.17, №1. – С. 3–17.

Прикарпатський національний університет ім. В.Стефаника,
м. Івано-Франківськ

Надійшло 21.11.2004