УДК 519.642

О. М. Яковлєва

ДО ТЕОРІЇ НЕТЕРА НЕСКІНЧЕННИХ СИСТЕМ РІВНЯНЬ ЗІ СТЕПЕНЕВО-РІЗНИЦЕВИМИ ТА СТЕПЕНЕВО-СУМАРНИМИ ІНДЕКСАМИ

O. M. Yakovleva. *Towards the Noether theory of infinite system of equations with power-difference and power-sum indices*, Matematychni Studii, **25** (2006) 87–96.

Conditions of being Noether, estimates of the number of linearly independent solutions of homogeneous and the number of solvability conditions for nonhomogeneous infinite systems of algebraic equations with power-difference and power-sum indices are established.

О. М. Яковлева. *К теории Нетера бесконечных систем уравнений со степенно-разностными и степенно-сумарными индексами* // Математичні Студії. – 2006. – Т.25, №1. – С.87–96.

Устанавливаются условия нетеровости, оценки числа линейно независимых решений однородных и количества условий разрешимости неоднородных бесконечных систем алгебраических уравнений со степенно-разностными и степенно-суммарными индексами.

Робота присвячена дослідженню нескінчених систем алгебраїчних рівнянь вигляду

$$\sum_{\nu=0}^{m}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left[a_{n-k}^{(\nu)}k^{\nu}\varphi_k+c_{n+k}^{(\nu)}k^{\nu}\varphi_k\right]+\sum_{k=-\infty}^{-1}\left[b_{n-k}^{(\nu)}k^{\nu}\varphi_k+d_{n+k}^{(\nu)}k^{\nu}\varphi_k\right]\right\}=f_n,\quad n\in\mathbb{Z},\tag{1}$$

де $a_n^{(\nu)}$, $c_n^{(\nu)}$, $b_n^{(\nu)}$, $d_n^{(\nu)}$, f_n — відомі, φ_k — невідомі величини, які будемо називати частковими розв'язками системи рівнянь (1). При цьому під розв'язком системи рівнянь (1) розумітимемо нескінченно вимірний вектор φ, компонентами якого є невідомі величини φ_k, тобто $\varphi=\{\dots,\varphi_{-n},\dots,\varphi_{-1},\varphi_0,\varphi_1,\dots,\varphi_n,\dots\}$. Зазначимо, що тут і нижче під символом 0^0 будемо розуміти рівність $0^0=1$. В подальшому припускатимемо, що величини $a_n^{(\nu)}$, $c_n^{(\nu)}$, $b_n^{(\nu)}$, $d_n^{(\nu)}$ задовольняють умови

$$\begin{gathered}|a_n^{(\nu)}|\leqslant m_1|n|^{-r-\alpha-1},\quad |b_n^{(\nu)}|\leqslant m_2|n|^{-r-\alpha-1},\quad |c_n^{(\nu)}|\leqslant m_3|n|^{-r-\alpha-1},\\ |d_n^{(\nu)}|\leqslant m_4|n|^{-r-\alpha-1},\quad n\neq 0;\quad \nu\in\{0,\dots,m\},\end{gathered}\tag{2}$$

а величини f_n задовольняють умову

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|n^r f_n|^q<+\infty,\tag{3}$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 45E10.

де r — ціле невід'ємне число; α, q — дійсні числа: $0 < \alpha \leqslant 1$, $1 < q \leqslant 2$, а m_i — відомі сталі, які не залежать від n.

Дослідженню нескінчених систем рівнянь з різницевими індексами, зокрема, нескінчених систем рівнянь Вінера-Хопфа присвячена значна кількість робіт. Основні досягнення, що одержані в цьому напрямку, можна знайти в [1, 2]. Однак між нескінченими системами рівнянь, що розглядалися в [1, 2], та системами рівнянь вигляду (1) є принципова відмінність. Так дослідження нескінчених систем, що розглядалися в [1, 2], зводиться до дослідження на одиничному колі γ крайової задачі Рімана ([3]), а дослідження систем рівнянь вигляду (1) проводиться на основі дослідження відповідної системи сингулярних інтегральних рівнянь (ССІР) на γ. При цьому, як буде доведено далі, для дослідження систем рівнянь вигляду (1) необхідно задавати початкові умови. Тобто дослідження системи рівнянь (1) потребує постановки для неї задачі Коші.

1. Зведення системи рівнянь (1) до ССІР. Нехай $\gamma = \{t \in \mathbb{C} : \ |t| = 1\}$ — одиничне коло з центром в початку координат, $D^+ = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1\}$ ($D^- = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\}$) — область всередині (зовні) γ. Якщо функція $\varphi(t)$ диференційовна на контурі γ декілька разів, то через $\frac{d^\nu \varphi(t)}{ds^\nu}$ будемо позначати ν-ту похідну функції $\varphi(t)$ по дузі s контура γ, а через $\varphi^{(\nu)}(t)$ будемо позначати ν-ту похідну функції $\varphi(t)$ за комплексною змінною $t \in \gamma$.

Через $L_p^{(r)}$, $p > 1$, $r \geqslant 0$, $L_p^{(0)} = L_p$, позначимо простір r разів диференційовних на γ функцій $f(t)$, що задовольняють умови

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \left| f^{(k)}(t) \right|^\rho \frac{dt}{t} < +\infty, \quad k \in \{0, \dots, r\}.$$

При цьому норму у просторі $L_p^{(r)}$ визначимо рівністю

$$||f(t)||_{L_p^{(r)}} = \left(\sum_{k=0}^{r} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \left| f^{(k)}(t) \right|^\rho \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{\rho}}.$$

Символом $H_\alpha^{(r)}$, $r \geqslant 0$, $0 < \alpha \leqslant 1$, $H_\alpha^{(0)} = H_\alpha$, позначимо простір r разів неперервно диференційовних на γ функцій $f(t)$, $r-$ті похідних яких задовольняють умову Гельдера.

За умови, що функція $\varphi(t)$ є r разів диференційовною на γ, згідно з книгою [3, с. 346], легко встановлюються рівності

$$\frac{d\varphi(t)}{ds} = it\varphi'(t), \ \dots, \ \frac{d^r \varphi(t)}{ds^r} = (it)^r \varphi^{(r)}(t) + i^r \sum_{j=1}^{r-1} A_j t^j \varphi^{(j)}(t),$$

де A_j — деякі сталі. Зокрема, якщо $t \in \gamma$ і n — відмінне від нуля дійсне число, то

$$\frac{d^r t^n}{ds^r} = (in)^r t^n.$$

Нехай функція $\varphi(t) \in L_p$, $p > 1$. Тоді її коефіцієнти Фур'є визначаються співвідношенням

$$\varphi_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \varphi(t) t^{-k-1} dt, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Лема 1. *Якщо функція* $\varphi(t) = L_p^{(r)}$, $r \geqslant 1$, $p > 1$, *то коефіцієнти Фур'є* φ_k, A_k, B_k *відповідно функцій* $\varphi(t)$, $\frac{d^r\varphi(t)}{ds^r}$, $\frac{d^r\varphi\left(t^{-1}\right)}{ds^r}$ *пов'язані між собою співвідношеннями* $A_k = (ik)^r\varphi_k$ $k \neq 0$, $A_0 = 0$; $B_k = (ik)^r\varphi_{-k}$, $k \neq 0$, $B_0 = 0$.

Доведення цього твердження випливає з [4, с. 88].

Позначимо $\varphi_k^+ = \varphi_k$ при $k \geqslant 0$ і $\varphi_k^+ = 0$ при $k < 0$; $\varphi_k^- = -\varphi_k$ при $k < 0$ і $\varphi_k^- = 0$ при $k \geqslant 0$. Тоді в термінах величин φ_k^+ та φ_k^- систему рівнянь (1) можна записати у вигляді

$$\sum_{\nu=0}^{m}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[a_{n-k}^{(\nu)}k^\nu\varphi_k^+ + c_{n+k}^{(\nu)}k^\nu\varphi_k^+\right] - \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[b_{n-k}^{(\nu)}k^\nu\varphi_k^- + d_{n+k}^{(\nu)}k^\nu\varphi_k^-\right]\right\} = f_n, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{4}$$

Домножимо тепер відповідне рівняння системи (4) на t^n, $t \in \gamma$, і просумуємо одержані рівняння за всіма індексами n. В результаті отримаємо рівність

$$\begin{gathered}\sum_{\nu=0}^{m}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[a_{n-k}^{(\nu)}k^\nu\varphi_k^+ + c_{n+k}^{(\nu)}k^\nu\varphi_k^+\right] -\right.\\ \left.-\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[b_{n-k}^{(\nu)}k^\nu\varphi_k^- + d_{n+k}^{(\nu)}k^\nu\varphi_k^-\right]\right\}t^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty}f_nt^n, \quad t \in \gamma.\end{gathered} \tag{5}$$

Позначимо

$$\begin{gathered}a_\nu(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty}a_j^{(\nu)}t^j, \quad b_\nu(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty}b_j^{(\nu)}t^j, \quad c_\nu(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty}c_j^{(\nu)}t^j,\\ d_\nu(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty}d_j^{(\nu)}t^j, \quad \nu \in \{0,\ldots,m\}; \quad f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}f_nt^n,\end{gathered} \tag{6}$$

$$\frac{d^\nu\varphi^+(t)}{ds^\nu} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(ik)^\nu\varphi_k^+t^k, \quad \frac{d^\nu\varphi^-(t)}{ds^\nu} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(ik)^\nu\varphi_k^-t^k, \quad \nu \in \{0,\ldots,m\}, \tag{7}$$

де $\varphi^\pm(t)$ — крайове значення на γ невідомої функції $\varphi^\pm(z)$, аналітичної області $D^\pm$. Згідно з [4] ряди (6) збігаються. Оскільки виконуються умови (2), (3), то функції $a_\nu(t)$, $b_\nu(t)$, $c_\nu(t)$, $d_\nu(t) \in H_\alpha^{(r)}$, $\nu \in \{0,\ldots,m\}$ (див. [4, с. 210]), а функція $f(t) \in L_p^{(r)}$, $p \geqslant 2$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$ ([4, с. 211]). В подальшому припускатимемо, що невідомі φ_k є такими, що ряди (7) збігаються. На основі леми 1 нескладно перевірити, що правильні рівності

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_{n-k}^{(\nu)}k^\nu\varphi_k^+t^n = (-i)^\nu a_\nu(t)\frac{d^\nu\varphi^+(t)}{ds^\nu},$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}b_{n-k}^{(\nu)}k^\nu\varphi_k^-t^n = (-i)^\nu b_\nu(t)\frac{d^\nu\varphi^-(t)}{ds^\nu},$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_{n+k}^{(\nu)}k^\nu\varphi_k^+t^n = (-i)^\nu c_\nu(t)\frac{d^\nu\varphi^+\left(t^{-1}\right)}{ds^\nu},$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}d_{n+k}^{(\nu)}k^\nu\varphi_k^-t^n = (-i)^\nu d_\nu(t)\frac{d^\nu\varphi^-\left(t^{-1}\right)}{ds^\nu}, \quad \nu \in \{0,\ldots,m\},$$

тому рівність (5) можна записати у вигляді такої диференціальної крайової задачі

$$\sum_{\nu=0}^{m}(-i)^{\nu}\left[a_{\nu}(t)\frac{d^{\nu}\varphi^{+}(t)}{ds^{\nu}}+c_{\nu}(t)\frac{d^{\nu}\varphi^{+}\big(t^{-1}\big)}{ds^{\nu}}-b_{\nu}(t)\frac{d^{\nu}\varphi^{-}(t)}{ds^{\nu}}-d_{\nu}(t)\frac{d^{\nu}\varphi^{-}\big(t^{-1}\big)}{ds^{\nu}}\right]=f(t), \quad (8)$$

$$t\in\gamma.$$

Система рівнянь (1) та крайова задача (8) є еквівалентними в тому сенсі, що вони одночасно розв'язані або ні і кожному розв'язку φ системи рівнянь (1) відповідає один і тільки один розв'зок $\varphi^{\pm}(t)$ крайової задачі (8) і навпаки. При цьому розв'язки системи рівнянь (1) виражаються через розв'язки крайової задачі (8) за формулою

$$\varphi_k=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}[\varphi^{+}(t)-\varphi^{-}(t)]t^{-k-1}dt, \quad k\in\mathbb{Z}. \quad (9)$$

Крайова задача (8) є диференційною краєвою задачею з оберненим зсувом Карлемана $\alpha(t)=t^{-1}$. Зведемо тепер дослідження крайової задачі (8) із зсувом до дослідження матричної диференціальної крайової задачі без зсуву. Для цього, згідно з методикою книги [5, с. 223] введемо невідомі функції $\Phi_1^{\pm}(z)$, $\Phi_2^{\pm}(z)$, що аналітичні в області $D^{\pm}$ і які мають похідні на γ принаймні порядку m і їх крайові значення на γ пов'язані з крайовими значеннями $\varphi^{\pm}(t)$ та їх похідними наступними співвідношеннями

$$\begin{gathered}\frac{d^{\nu}\Phi_1^{+}(t)}{ds^{\nu}}=\frac{d^{\nu}\varphi^{+}(t)}{ds^{\nu}}, \qquad \frac{d^{\nu}\Phi_1^{-}(t)}{ds^{\nu}}=\frac{d^{\nu}\varphi^{-}(t)}{ds^{\nu}},\\ \frac{d^{\nu}\Phi_2^{+}(t)}{ds^{\nu}}=\frac{1}{t}\frac{d^{\nu}\varphi^{-}(\frac{1}{t})}{ds^{\nu}}, \quad \frac{d^{\nu}\Phi_2^{-}(t)}{ds^{\nu}}=\frac{1}{t}\frac{d^{\nu}\varphi^{+}(\frac{1}{t})}{ds^{\nu}}, \quad \nu\in\{0,\ldots,m\}.\end{gathered} \quad (10)$$

Підставивши в крайову задачу умову (8) $\alpha(t)=t^{-1}$ замість t, одержимо рівність, яку в сукупності з крайовою умовою (8) можна записати у вигляді

$$\sum_{\nu=0}^{m}(-i)^{\nu}\left[A_{\nu}(t)\frac{d^{\nu}\Phi^{+}(t)}{ds^{\nu}}-B_{\nu}(t)\frac{d^{\nu}\Phi^{-}(t)}{ds^{\nu}}\right]=F(t),\ t\in\gamma, \quad (11)$$

де

$$\begin{gathered}A_{\nu}(t)=\begin{pmatrix} a_{\nu}(t) & -td_{\nu}(t)\\ c_{\nu}\left(\dfrac{1}{t}\right) & -tb_{\nu}\left(\dfrac{1}{t}\right)\end{pmatrix},\ B_{\nu}(t)=\begin{pmatrix} b_{\nu}(t) & -tc_{\nu}(t)\\ d_{\nu}\left(\dfrac{1}{t}\right) & -ta_{\nu}\left(\dfrac{1}{t}\right)\end{pmatrix},\ \nu\in\{0,\ldots,m\}\\ F^{+}(t)=\left\{f(t);\ f\left(\frac{1}{t}\right)\right\}^{T}, \quad \frac{d^{\nu}\Phi^{\pm}(t)}{ds^{\nu}}=\left\{\frac{d^{\nu}\Phi_1^{\pm}(t)}{ds^{\nu}}, \quad \frac{d^{\nu}\Phi_2^{\pm}(t)}{ds^{\nu}}\right\}^{T}, \quad \nu\in\{0,\ldots,m\},\end{gathered} \quad (12)$$

а знак "T" означає транспонування. Тепер, використовуючи зв'язок між похідними вектор-функцій (в.ф.) $\Phi^{\pm}(t)$ по дузі s контуру γ і за комплексною змінною $t\in\gamma$, матричну дифереціальну крайову задачу (11) можна записати у вигляді наступної системи сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь (ССІДР) ([3, с. 365])

$$t^{m}A_{m}(t)\Phi^{+(m)}(t)-t^{m}B_{m}(t)\Phi^{-(m)}(t)+\sum_{\nu=0}^{m-1}\left[N_{\nu}(t)\Phi^{+(\nu)}(t)-M_{\nu}(t)\Phi^{-(\nu)}(t)\right]=F(t), \quad (13)$$

$$t\in\gamma,$$

де матриці-функції (м.ф.) $N_\nu(t)$, $M_\nu(t)$, $\nu \in \{0,\dots,m-1\}$, виражаються відомим способом через м.ф. $A_\nu(t)$, $B_\nu(t)$, $\nu \in \{0,\dots,m\}$, та сталі A_j. Зрозуміло, що м.ф. $A_\nu(t)$, $B_\nu(t) \in H_\alpha^{(r)}$, $\nu \in \{0,\dots,m\}$; м.ф. $N_\nu(t)$, $M_\nu(t) \in H_\alpha^{(r)}$, $\nu \in \{0,\dots,m-1\}$, а в.ф. $F(t) \in L_p^{(r)}$, $p \geqslant 2$, $p^{-1}+q^{-1}=1$. Зазначимо, що належність м.ф. та в.ф. до деякого простору розуміємо поелементно, а норми м.ф. та в.ф. узгоджені між собою. Система рівнянь (1) та ССІДР (13) еквівалентні в тому сенсі, що вони одночасно розв'язні або ні і кожному розв'язкові φ системи рівнянь (1) відповідає один і тільки один розв'язок $\Phi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t)$ ССІДР (13) і навпаки. При цьому часткові розв'язки системи рівнянь (1) згідно з (10), (9) виражаються через розв'язки ССІДР (13) за формулою

$$\varphi_k = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \left[\Phi_1^+(t) - \Phi_1^-(t)\right] t^{-k-1}dt, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{14}$$

Зведемо тепер дослідження ССІДР (13) до дослідження відповідної ССІР на γ. Згідно з роботами [3, с. 366; 6] кожну пару в.ф. $\Phi^+(z)$, $\Phi^-(z)$ розміру 2, аналітичних відповідно в областях D^+ і D^-, $\Phi^-(\infty)=0$, і таких, що крайові значення на γ $\Phi^{+(m)}(t)$, $\Phi^{-(m)}(t)$ відповідно в.ф. $\Phi^{+(m)}(z)$, $\Phi^{-(m)}(z)$ належать до простору $L_p^{(r)}$, $p \geqslant 2$, можливо записати у вигляді

$$\begin{gathered}\Phi^+(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma P(z,\ \tau)\rho(\tau)d\tau + D_0(z), \quad z \in D^+, \\ \Phi^-(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma Q(z,\ \tau)\rho(\tau)d\tau, \quad z \in D^-,\end{gathered} \tag{15}$$

де $\rho(t)$ — невідома в.ф. розміру 2, яка однозначно визначається за в.ф. $\Phi^+(z)$ та $\Phi^-(z)$, а в.ф. розміру 2 $D_0(z)$ ([3, с. 366]) має вигляд

$$D_0(z) = \sum_{k=0}^{m-1}\Phi_k z^k = \sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{k!}\Phi^{+(k)}(0)z^k, \tag{16}$$

де Φ_k, $k \in \{0,\dots,m-1\}$, — коефіцієнти Фур'є в.ф. $\Phi^+(t)$, а функції $P(z,\ \tau)$ та $Q(z,\ \tau)$ ([6]) мають вигляд

$$P(z,\ \tau) = \frac{(-1)^m}{(m-1)!}\left[(\tau - z)^{m-1}\ln\left(1-\frac{z}{\tau}\right) - \sum_{k=1}^{m-1} d_k\tau^{m-k-1}z^k\right], \quad z \in D^+, \quad \tau \in \gamma,$$

$$Q(z,\ \tau) = \frac{(-1)^m}{(m-1)!}\left[(\tau - z)^{m-1}\ln\left(1-\frac{\tau}{z}\right) - \sum_{k=1}^{m-2} l_k\tau^{m-k-1}z^k\right], \quad z \in D^-, \quad \tau \in \gamma,$$

$$d_k = \sum_{j=0}^{k-1}(-1)^{j+1}C_{m-1}^j(k-j)^{-1}, \quad l_k = \sum_{j=k+1}^{m-1}(-1)^j C_{m-1}^j (j-k)^{-1}.$$

При цьому розв'язки ССІДР (13) можна побудувати за формулою

$$\Phi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \left[P(t,\ \tau) - Q(t,\ \tau)\right]\rho(\tau)d\tau + D_0(t), \quad \tau \in \gamma, \tag{17}$$

де $D_0(t)$ і $P(t,\ \tau)$, $Q(t,\ \tau)$ — крайові значення на γ відповідно в.ф. $D_0(z)$ і функцій $P(z,\ \tau)$, $Q(z,\ \tau)$, а дослідження ССІДР (13) зводиться до дослідження наступної ССІР

$$A(t)\rho(t)+\frac{B(t)}{\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\rho(\tau)}{\tau-t}d\tau+\int\limits_{\gamma}k(t,\ \tau)\rho(\tau)d\tau=F(t)+C_0(t),\quad \tau\in\gamma, \tag{18}$$

де

$$A(t)=0,5t^m[A_m(t)+B_m(t)],\quad B(t)=0,5t^m[A_m(t)-B_m(t)], \tag{19}$$

$$C_0(t)=-\sum_{\nu=0}^{m-1}N_\nu(t)D^{(\nu)}(t), \tag{20}$$

$$k(t,\ \tau)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{m-1}\left[\frac{\partial^\nu P(t,\ \tau)}{\partial t^\nu}N_\nu(t)+B_m(t)\tau^{m-1-k}t^k-\frac{\partial^\nu Q(t,\ \tau)}{\partial t^\nu}M_\nu(t)\right], \tag{21}$$

а $D^{(\nu)}(t)$ і $\frac{\partial^\nu P(t,\tau)}{\partial t^\nu}$, $\frac{\partial^\nu Q(t,\tau)}{\partial t^\nu}$ — крайові значення на γ відповідно в.ф. $D^{(\nu)}(z)$ і функцій $\frac{\partial^\nu P(z,\tau)}{\partial z^\nu}$, $\frac{\partial^\nu Q(z,\tau)}{\partial z^\nu}$.

Згідно з [8] ССІДР (13) та ССІР (18) еквівалентні в тому сенсі, що вони одночасно розв'язні або ні і кожному розв'язкові $\Phi(t)$ ССІДР (13) відповідає, можливо не єдиний, розв'язок $\rho(t)$ ССІР (18) і навпаки. Але, щоб зв'язок між їх розв'язками був однозначний, необхідно ([7, с. 406]), щоб були задані величини $\Phi^+(0)$, $\Phi^{+'}(0)$, $\ldots$, $\Phi^{+(m-1)}(0)$, які називаються початковими умовами ССІДР (13). Тоді на підставі (16), якщо відомі вектори $\Phi^{+(k)}(0)$, $k\in\{0,\ldots,m-1\}$, тобто початкові умови ССІДР (13), то вона і ССІР (18) еквівалентні в тому сенсі, що вони одночасно розв'язні або ні і кожному розв'язкові $\Phi(t)$ ССІДР (13) відповідає один і тільки один розв'язок $\rho(t)$ ССІР (18) і навпаки. Оскільки система рівнянь ((1) і ССІДР (13) еквівалентні, а ССІДР (13) еквівалентна до ССІР (18) лише в тому випадку, коли задані початкові умови ССІДР (13) $\Phi^{+(k)}(0)$, $k\in\{0,\ldots,m-1\}$, то на підставі (16) випливає, що система рівнянь (1) і ССІР (18) еквівалентні, якщо задані вектори

$$\Phi_k=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\Phi(t)t^{-k-1}dt,\quad k\in\{0,\ldots,m-1\}. \tag{22}$$

Знайдемо співвідношення, якими вектори (22) Φ_k, $k\in\{0,\ldots,m-1\}$, пов'язані з частковими розв'язками системи рівнянь (1). Позначимо $\Phi_k=\left\{a_k^{(1)},\ a_k^{(2)}\right\}^T$, $k\in\{0,\ldots,m-1\}$, тоді з (22) випливає, що

$$\Phi_k=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\Phi(t)t^{-k-1}dt=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}[\Phi^+(t)-\Phi^-(t)]t^{-k-1}dt=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\Phi^+(t)t^{-k-1}dt,$$
$$k\in\{0,\ldots,m-1\}. \tag{23}$$

Оскільки $\Phi^+(t)=\left\{\Phi_1^+(t),\ \Phi_2^+(t)\right\}^T$, то з (10) $\Phi^+(t)=\left\{\varphi^+(t),\ t^{-1}\varphi^-\left(\frac{1}{t}\right)\right\}^T$, де функції $\varphi^\pm(t)$ є розв'язками диференціальної задачі (8). Тоді на підставі (23)

$$a_k^{(1)}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\Phi_1^+(t)t^{-k-1}dt=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\varphi^+(t)t^{-k-1}dt=\varphi_k,\quad k\in\{0,\ldots,m-1\},$$

$$a_k^{(2)} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \Phi_2^+(t)t^{-k-1}dt = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{1}{t}\varphi^-(\frac{1}{t})t^{-k-1}dt = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \varphi^-(t)t^{-(-k-1)-1}dt = -\varphi_k,$$
$$k \in \{-m, \ldots, -1\},$$

де φ_k, $k \in \{-m, \ldots, m-1\}$, — часткові розв'язки (9) системи рівнянь (1).

З викладеного вище випливає висновок: система рівнянь (1) та ССІР (18) еквівалентними, якщо задані величини φ_k, $k \in \{-m, \ldots, m-1\}$, які будемо називати початковими умовами системи рівнянь (1). При визначених початкових умовах система рівнянь (1) та ССІР (18) еквівалентні в тому сенсі, що вони одночасно розв'язні або ні і кожному розв'язкові φ системи рівнянь (1) відповідає один і тільки один розв'язок $\rho(t)$ ССІР (18) і навпаки. При цьому розв'язки системи рівнянь (1) визначаються через розв'язки ССІР (18) за формулами (17), (14).

Теорема 1. *Система рівнянь є визначеною тоді і тільки тоді, коли задані її початкові умови* φ_k, $k \in \{-m, \ldots, m-1\}$.

Доведення теореми випливає з того, що система рівнянь (1) і ССІДР (13) еквівалентні. При цьому згідно з [7, с. 406] ССІДР (13) є визначеною тоді і тільки тоді, коли задані її початкові умови (22).

2. Дослідження системи рівнянь (1). Дослідження системи рівнянь (1) проводитимемо, досліджуючи ССІР (18). Спочатку розглянемо випадок нульових початкових умов: $\varphi_k = 0$, $k \in \{-m, \ldots, m-1\}$. У цьому випадку визначена формулою (16) в.ф. $D_0(z) \equiv 0$. Тоді визначена формулою (20) в.ф. $C_0(t) \equiv 0$. Тобто однорідній системі рівнянь (1) відповідає однорідна ССІР (18) і навпаки. При цьому систему рівнянь (1) називатимемо *нетеровою*, якщо нетерова ССІР (18), а часткові індекси ССІР (18) називатимемо *частковими індексами* ситеми рівнянь (1).

Лема 2. *Якщо* $\det A_m(t)$ *має нуль порядку* μ *у точці* $t_0 \in \gamma$, *то* $\det B_m(t)$ *має нуль порядку* μ *у точці* $\frac{1}{t_0} \in \gamma$, *де м.ф.* $A_m(t)$, $B_m(t)$ *визначаються формулами (12).*

Доведення леми випливає із структури м.ф. $A_m(t)$ та $B_m(t)$ і властивостей зсуву $\alpha(t) = t^{-1}$. Із леми 2 випливає висновок, що $\det A_m(t)$ та $\det B_m(t)$ одночасно відмінні від нуля на γ.

Лема 3. *Якщо величини* $a_n^{(\nu)}$, $b_n^{(\nu)}$, $c_n^{(\nu)}$, $d_n^{(\nu)}$ *задовольняють умови (2), то оператор* $(T\rho)(t) = \int_\gamma k(t,\ \tau)\rho(\tau)d\tau$: $L_p \to L_p$, $p \geqslant 2$, *є компактним, де ядро* $k(t,\ \tau)$ *визначається формулою (21).*

Доведення цього твердження випливає з [9, с. 419], оскільки функція $k(t,\ \tau) \in H_\alpha$ за кожною змінною на підставі властивостей функцій $P(z,\ \tau)$, $Q(z,\ \tau)$ та м.ф. $N_\nu(t)$, $M_\nu(t)$, $B_m(t)$.

Теорема 2. *Якщо початкові умови нульові і величини* $a_n^{(\nu)}$, $b_n^{(\nu)}$, $c_n^{(\nu)}$, $d_n^{(\nu)}$ *задовольняють умови (2), то система рівнянь (1) нетерова тоді і тільки тоді, коли виконується умова*

$$a_m(t)b_m\left(\frac{1}{t}\right) - d_m(t)c_m\left(\frac{1}{t}\right) \neq 0, \quad t \in \gamma. \tag{24}$$

Якщо умова (24) виконується, то часткові індекси $\varkappa_1 \geqslant \varkappa_2$ *системи рівнянь (1) збігаються з частковими індексами м.ф.* $A_m^{-1}(t)B_m(t)$.

Доведення. За умов теореми система рівнянь (1) та ССІР (18) еквівалентні. Згідно з [5] ССІР (18) нетерова тоді і тільки тоді, коли $\det[A(t) + B(t)] = t^{2m} \det A_m(t) \neq 0$, $\det[A(t) - B(t)] = t^{2m} \det B_m(t) \neq 0$ на γ. З цих умов та лем 2 і 3 випливає умова (24). Якщо вона виконана, то [5] часткові індекси ССІР збігаються з частковими індексами м.ф. $[A(t)+B(t)]^{-1}[A(t)-B(t)] = A_m^{-1}B_m(t)$, де м.ф. $A(t)$, $B(t)$ визначаються за формулами (19). □

Нехай виконується умова (24). Позначимо

$$P = \sum_{\varkappa_j \geqslant 0} \varkappa_j, \quad Q = -\sum_{\varkappa_j < 0} \varkappa_j.$$

Теорема 3. *Нехай початкові умови нульові і величини $a_n^{(\nu)}$, $b_n^{(\nu)}$, $c_n^{(\nu)}$, $d_n^{(\nu)}$ задовольняють умови (2), виконується умова (24) і величини f_n задовольняють умову (3). Тоді однорідна система рівнянь (1) має принаймні P лінійно незалежних розв'язків, а неоднорідна система (1) розв'язна, якщо виконується принаймні Q умов*

$$\int_\gamma F(t)\psi_j(t)dt = 0, \tag{25}$$

де $F(t)$ — права частина ССІР (18), $\psi_j(t)$ — лінійно незалежні розв'язки однорідної ССІР вигляду

$$A'(t)\psi(t) - \frac{1}{\pi i}\int_\gamma \frac{B'(\tau)\psi(\tau)}{\tau - t}d\tau + \int_\gamma k'(\tau,\ t)\psi(\tau)d\tau = 0,$$

де м.ф. $A(t)$, $B(t)$ і $k(t,\ \tau)$ визначаються відповідно за формулами (19), (21), а м.ф. $A'(t)$, $B'(t)$, $k'(t,\ \tau)$ є транспонованими до них.

Доведення. За умов теореми система рівнянь (1) і ССІР (18) еквівалентні. Згідно з [5], за умов теореми однорідна ССІР (18) має принаймні P лінійно незалежних розв'язків, а неоднорідна ССІР (18) розв'язна, якщо будуть виконані принаймні Q умов її розв'язності (25). Тепер з еквівалентності системи рівнянь (1) та ССІР (18) і на основі зв'язку (17), (14) між їхніми розв'язками випливають твердження теореми. □

Теорема 4. *Нехай початкові умови нульові і величини $a_n^{(\nu)}$, $b_n^{(\nu)}$, $c_n^{(\nu)}$, $d_n^{(\nu)}$ задовольняють умови (2), виконана умова (24) і система рівнянь (1) розв'язна. Якщо величини f_n задовольняють умову (3), то часткові розв'язки системи рівнянь (1) задовольняють умову*

$$\sum_{k=m}^{\infty} |k^{r+m}\varphi_k|^q < +\infty, \quad \sum_{k=-\infty}^{-m-1} |k^{r+m}\varphi_k|^q < +\infty, \quad 1 < q \leqslant 2. \tag{26}$$

Доведення. За умов теореми система рівнянь (1) і ССІР (18) еквівалентні. З умов (2) випливає, що коефіцієнти і регулярне ядро ССІР (18) — м.ф. $A(t)$, $B(t)$, $k(t,\ \tau) \in H_\alpha^{(r)}$ за змінною t. А права частина ССІР (18) — в.ф. $F(t) \in L_p^{(r)}$, $p \geqslant 2$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, позаяк виконана умова (3). Тоді згідно з [5], в.ф. $\rho(t)$ — розв'язок ССІР (18) належить до простору $L_p^{(r)}$, $p \geqslant 2$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Тоді з інтегральних зображень (15) випливає, що в.ф. $\Phi^{+(m)}(t)$, $\Phi^{-(m)}(t) \in L_p^{(r)}$ $p \geqslant 2$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Звідси випливає, що в.ф. $\Phi^+(t)$, $\Phi^-(t) \in L_p^{(r+m)}$ $p \geqslant 2$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Тепер, на підставі [4, с. 210], з (14) випливають умови (26). □

Якщо умова (24) не виконується і $\det A_m(t)$ в точках $\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_s$ контуру γ має нулі цілих порядків $\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_s$, то за лемою 2 $\det B_m(t)$ в точках $\xi_1^{-1},\ \xi_2^{-1},\ \ldots,\ \xi_s^{-1}$ контуру γ теж має нулі відповідно цілих порядків $\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_s$. Цей випадок системи рівнянь (1) досліджується на основі результатів з [2] за теорією виняткового випадку ССІР. При цьому справджуються твердження, подібні до теорем 3 і 4.

3. Випадок ненульових початкових умов. Розглянемо тепер випадок не нульових початкових умов, тобто $\varphi_k \neq 0$, $k \in \{-m, -m-1\}$. Тоді систему рівнянь (1) можна подати у вигляді

$$\sum_{\nu=0}^{m}\left\{\sum_{k=m}^{\infty}\left[a_{n-k}^{(\nu)}k^{\nu}\varphi_k + c_{n+k}^{(\nu)}k^{\nu}\varphi_k\right] + \sum_{k=-\infty}^{-m-1}\left[b_{n-k}^{(\nu)}k^{\nu}\varphi_k + d_{n+k}^{(\nu)}k^{\nu}\varphi_k\right]\right\} = f_n + f_n^{(1)}, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{27}$$

де

$$f_n^{(1)} = -\sum_{\nu=0}^{m}\left\{\sum_{k=0}^{m-1}\left[a_{n-k}^{(\nu)}k^{\nu}\varphi_k + c_{n+k}^{(\nu)}k^{\nu}\varphi_k\right] + \sum_{k=-m}^{-1}\left[b_{n-k}^{(\nu)}k^{\nu}\varphi_k + d_{n+k}^{(\nu)}k^{\nu}\varphi_k\right]\right\}.$$

Оскільки величини $a_n^{(\nu)}$, $b_n^{(\nu)}$, $c_n^{(\nu)}$, $d_n^{(\nu)}$ — відомі, величини φ_k, $k \in \{-m, \ldots, m-1\}$, — теж відомі і їх скінчене число, то на підставі умов (2) величини $f_n^{(1)}$ задовольняють умови $|f_n^{(1)}| \leqslant m_5|n|^{-r-\alpha-1}$, $n \neq 0$, а, отже, вони задовольняють умову (3). Тоді величини $f_n^{(2)} = f_n + f_n^{(1)}$ теж задовольняють умову (3). Введемо нові невідомі Φ_k

$$\Phi_k = \begin{cases} 0, & -m \leqslant k \leqslant m-1, \\ \varphi_k, & k \leqslant -m-1, \quad k \geqslant m. \end{cases} \tag{28}$$

Тоді в термінах величин Φ_k і $f_n^{(2)}$ систему рівнянь (27) можна записати у вигляді

$$\sum_{\nu=0}^{m}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left[a_{n-k}^{(\nu)}k^{\nu}\Phi_k + c_{n+k}^{(\nu)}k^{\nu}\Phi_k\right] + \sum_{k=-\infty}^{-1}\left[b_{n-k}^{(\nu)}k^{\nu}\Phi_k + d_{n+k}^{(\nu)}k^{\nu}\Phi_k\right]\right\} = f_n^{(2)}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{29}$$

Згідно з (28) система рівнянь (29) має нульові початкові умови. При цьому розв'язки системи (1) виражаються через розв'язки системи рівнянь (29): $\varphi_k = \Phi_k$, $k \leqslant -m-1$, $k \geqslant m$. Отже, дослідження системи рівнянь (1) з ненульовими початковими умовами зведено до дослідження системи рівнянь (29) з нульовими початковими умовами.

З викладеного вище випливає, що для дослідження систем рівнянь вигляду (1) потрібно задавати початкові умови φ_k, $k \in \{-m, \ldots, m-1\}$, тобто для дослідження систем рівнянь вигляду (1) потрібно формулювати задачу Коші.

ЛІТЕРАТУРА

1. Гохберг И.Ц., Фельдман А.И. Уравнения в свёртках и проекционные методы их решения. – М.: Наука, 1971. – 352 с.
2. Прёсдорф З. Некоторые классы сингулярных уравнений. – М.: Мир, 1979. – 497 с.
3. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.

4. Бари Н.К. Тригонометрические ряды. – М.: ГИФМЛ, 1961. – 936 с.
5. Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. – М.: Наука, 1977.– 444 с.
6. Хуснутдинов Р.Ш. *Исследование одного класса линейных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений* // Сб. "Конструктивная теория функций и функциональный анализ". – Казань: Изд-во КГУ. – 1983. – №3. – С.94-106.
7. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 511 с.
8. Векуа Н.П. *Об одной системе сингулярных интегро-диффереціальных уравнений и её примененях в задачах линейного сопряжения* // Труды Тбилисск. матем. ин-та АН Груз. ССР. – 1957. – Т.24. – С.135-147.
9. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 741 с.

Південноукраїнський державний педагогічний університет ім К.Д. Ушинського, Одеса

Надійшло 8.06.2004
Після переробки 28.08.2005