УДК 517.95

Г. П. Доманська, М. О. Колінько, С. П. Лавренюк

ЗАДАЧА БЕЗ ПОЧАТКОВИХ УМОВ ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ В УЗАГАЛЬНЕНИХ ПРОСТОРАХ ЛЕБЕГА

H. P. Domans'ka, M. O. Kolin'ko, S. P. Lavrenyuk. *Problem without initial data for a pseudo-parabolic equation in generalized Lebesgue spaces*, Matematychni Studii, **25** (2006) 73–86.

We consider a pseudoparabolic equation of the type

$$u_t - \sum_{i,j=1}^{n} (b_{ij}(x)u_{tx_i})_{x_j} - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x,t)u_{x_i})_{x_j} + a_0(x)|u|^{p(x)-2}u = f_0(x,t) - \sum_{i=1}^{n} f_{i,x_i}(x,t).$$

Some sufficient conditions of the existence and uniqueness of a weak solution for the problem without initial data are obtained.

Г. П. Доманская, М. О. Колинько, С. П. Лавренюк. *Задача без начальных условий для псевдопараболического уравнения в обобщенных пространствах Лебега* // Математичні Студії. – 2006. – Т.25, №1. – С.73–86.

Рассматривается псевдопараболическое уравнение вида

$$u_t - \sum_{i,j=1}^{n} (b_{ij}(x)u_{tx_i})_{x_j} - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x,t)u_{x_i})_{x_j} + a_0(x)|u|^{p(x)-2}u = f_0(x,t) - \sum_{i=1}^{n} f_{i,x_i}(x,t).$$

Получены некоторые достаточные условия существования и единственности слабого решения задачи без начальных условий.

Різноманітні фізичні процеси призводять до вивчення задач для псевдопараболічних рівнянь вигляду

$$u_t - \eta\Delta u_t - \nu\Delta u = f(x, u, \nabla u),$$

де $u = u(x,t)$, η та ν — невід'ємні сталі. Ці рівняння є частковим випадком широкого класу рівнянь типу Соболєва-Гальперна, які вперше вивчено у статтях [1, 2]. Псевдопараболічні рівняння описують процеси фільтрації однорідних рідин в тріщинуватих породах ([3]), процеси теплопровідності з урахуванням термодинамічної температури ([4]), перенесення вологи в грунті ([5]) та інші.

Значна кількість праць присвячена дослідженню мішаних задач та задачі Коші для псевдопараболічних рівнянь. Ще одним прикладом задач в необмежених областях є задачі Фур'є (або задачі без початкових умов). Якщо деякий фізичний процес почався достатньо давно і початкові дані перестали впливати на хід процесу, то цілком природно розглянути задачу без початкових умов. Для лінійних параболічних рівнянь класи

2000 *Mathematics Subject Classification:* 35K70.

коректності розв'язків таких задач — функції експоненціальної поведінки при $t \to -\infty$ — вперше побудував А.Н.Тихонов ([6]). Аналогічні результати для лінійних псевдопараболічних систем одержано у [7–9].

У статті [10] вперше доведено існування та єдиність розв'язку задачі без початкових умов для певних нелінійних параболічних рівнянь без припущення на поведінку розв'язку при $t \to -\infty$. У статтях [11–13] досліджено коректність задачі Фур'є для певних нелінійних псевдопараболічних систем в класах функцій, які не залежать від поведінки при $t \to -\infty$. У статті [14] вивчено умови коректності задачі Фур'є для однієї нелінійної псевдопараболічної системи в узагальнених просторах Соболєва, введених і досліджених у [15].

У цій статті розглянуто задачу Фур'є для слабко нелінійного псевдопараболічного рівняння зі степеневою нелінійністю, коли степінь є функцією просторових змінних. Одержано достатні умови існування та єдиності розв'язку у класах функцій, які експоненціально зростають при $t \to -\infty$.

Нехай Ω — обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з межею $\partial\Omega \subset C^1$; $Q_\tau = \Omega \times (-\infty, \tau)$, $\tau \in (-\infty, T)$; $Q_{t_1,t_2} = \Omega \times (t_1, t_2)$, $t_1 < t_2 \le T$. Нехай V_1 замкнений підпростір такий, що $\overset{o}{H}{}^1(\Omega) \subset V_1 \subset H_1^1(\Omega)$, причому $H_1^1(\Omega) = \{v \,:\, v \in H^1(\Omega),\ v|_{\Gamma_1} = 0\}$, $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing$. Введемо у просторі V_1 норму за формулою

$$\|u\|_{V_1} = \left[\int\limits_\Omega \left(|u|^2 + \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^2\right) dx\right]^{1/2}.$$

Нехай $L^{p(x)}(Q_{t_1,t_2})$ — узагальнений простір Лебега ([15]) з нормою

$$\|u\|_{L^{p(x)}(Q_{t_1,t_2})} = \inf\left\{\lambda > 0 \,:\, \int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \left|\frac{u}{\lambda}\right|^{p(x)} dxdt \le 1\right\},$$

$$L^{p(x)}_{\mathrm{loc}}(\bar{Q}_T) = \{u \,:\, u \in L^{p(x)}(Q_{t_1,T})\ \forall t_1 \in (-\infty, T)\},$$

$$L^2_{\mathrm{loc}}((-\infty, T); V_1) = \{u \,:\, u \in L^2((t_1, T); V_1)\ \forall t_1 \in (-\infty, T)\}.$$

Розглянемо в Q_T операторно-диференціальне рівняння

$$Bu_t + L(t)u + A(u) + \alpha\mathcal{B}(u) = F(t), \tag{1}$$

де оператори B, L і A визначено так:

$B :\ V_1 \to V_1^*$ і для довільних $u, v \in V_1$

$$\langle Bu, v\rangle_1 = \int\limits_\Omega \left[uv + \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x) u_{x_i}, v_{x_j}\right] dx;$$

$L(t) :\ V_1 \to V_1^*$ для майже всіх $t \in (-\infty, T]$ і для довільних $u, v \in V_1$

$$\langle L(t)u, v\rangle_1 = \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) u_{x_i}, v_{x_j} dx;$$

$A: L^{p(x)}(Q_{t_1,t_2}) \to L^{q(x)}(Q_{t_1,t_2})$, $q(x) = p(x)/(p(x)-1)$, для довільних t_1, t_2, $t_1 < t_2 \le T$ і для довільних $u, v \in L^{p(x)}_{\mathrm{loc}}(\bar{Q}_T)$

$$\langle A(u), v\rangle_p = \int\limits_{Q_{t_1,t_2}} a_0(x)|u|^{p(x)-2}uv\,dxdt.$$

Крім того, для довільних t_1, t_2, $t_1 < t_2 \le T$ і для довільних $v \in L^{p(x)}_{\mathrm{loc}}(\bar{Q}_T) \cap L^2_{\mathrm{loc}}((-\infty, T); V_1)$

$$\langle F(t), v\rangle_{p,1} = \int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \left[f_0(x,t)v + \sum_{i=1}^{n} f_i(x,t)v_{x_i}\right]dxdt;$$

$\mathcal{B}$ є оператором штрафу ([16, с.384]), $\mathcal{B}u = J(u - P_K u)$, де J — оператор двоїстості між просторами V_1 і V_1^*, P_K — оператор проектування на деяку опуклу замкнену множину $K \subset V_1$, $0 \in K$, α — додатний параметр.

Говоритимемо, що коефіцієнти операторів B, L, A задовольняють відповідно умови (B), (L) і (A), якщо:

(B): $b_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, $b_{ij}(x) = b_{ji}(x)$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$ майже для всіх $x \in \Omega$,
$b_0 \sum\limits_{i=1}^{n} |\xi_i|^2 \le \sum\limits_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x)\xi_i\xi_j \le b^0 \sum\limits_{i=1}^{n} |\xi_i|^2$ для всіх $\xi \in \mathbb{R}^n$ і для майже всіх $x \in \Omega$,
$b_0 = \mathrm{const}$, $b^0 = \mathrm{const}$, $b_0 > 0$;

(L): $a_{ij} \in C((-\infty, T]; L^\infty(\Omega)) \cap L^\infty(Q_T)$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$,
$\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j) \ge a_0 \sum\limits_{i=1}^{n} |\xi_i|^2$для всіх, $\xi_i \in \mathbb{R}^n$ і для майже всіх $(x,t) \in Q_T$,
$a_0 = \mathrm{const}$, $a_0 > 0$;

(A): $a_0 \in L^\infty(\Omega)$, $a_0(x) \ge \omega_0 > 0$, для майже всіх $x \in \Omega$,

(P): $p \in L^\infty(\Omega)$, $1 < p_1 = \operatorname{ess\,inf}_\Omega p(x) \le \operatorname{ess\,sup}_\Omega p(x) = p_2 < \infty$.

Означення. *Розв'язком* рівняння (1) називаємо функцію

$$u \in C((-\infty, T]; V_1) \cap L^{p(x)}_{\mathrm{loc}}(\bar{Q}_T),$$

яка для довільних $t_1, t_2 \in (-\infty, T]$, $t_1 < t_2 \le T$, і для довільної функції $v \in L^{p(x)}_{\mathrm{loc}}(\bar{Q}_T) \cap L^2_{\mathrm{loc}}((-\infty, T); V_1)$ такої, що $v_t \in L^2_{\mathrm{loc}}((-\infty, T); V_1)$ задовольняє рівність

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} [-\langle Bu, v_t\rangle_1 + \langle L(t)u, v\rangle_1 + \langle A(u), v\rangle_p + \alpha\langle\mathcal{B}(u), v\rangle_1]dt +$$

$$+\langle Bu(\cdot, t_2), v(\cdot, t_2)\rangle_1 - \langle Bu(\cdot, t_1), v(\cdot, t_1)\rangle_1 = \int\limits_{t_1}^{t_2} \langle F(t), v\rangle_{p,1}dt. \qquad (2)$$

Зазначимо, що $V_1 \subset L^2(\Omega) \subset V_1^*$, причому всі вкладення щільні і неперервні. Введемо оператор $L_\mu(t): \ V_1 \to V_1^*$ такий, що для майже всіх $t \in (-\infty, T)$ і для всіх $u, v \in V_1$

$$\langle L_\mu(t)u, v\rangle_1 \ = \ \int\limits_\Omega \Big[\sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x,t) - \mu b_{ij}(x)) u_{x_i} v_{x_j} - \mu uv \Big] dx, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Нехай $\operatorname{mes} \Gamma_1 > 0$. Тоді для $u \in V_1$ правильна нерівність Фрідріхса ([17, с. 50])

$$\int\limits_\Omega |u|^2 dx \le c_0 \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^2 dx,$$

де стала c_0 залежить лише від n, $\operatorname{mes}\Gamma_1$ і $\operatorname{mes}\Omega$. Приймемо

$$M_0 = \max\{1, b^0\}, \quad \kappa = \begin{cases} 0, & p_1 > 2 \\ 1, & p_1 < 2 \end{cases}, \quad \mu_0 = \frac{a_0}{M_0(1 + c_0\kappa)}.$$

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* (B), (L), (A) *і, крім того,* $\operatorname{mes}\Gamma_1 > 0$, $f_0 \in C((-\infty, T]; L^{q(x)}(\Omega))$, $f_i \in C((-\infty, T]; L^2(\Omega))$, $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$F_0 \equiv \int\limits_{Q_T} \Big[|f_0(x,t)|^{q(x)} + \sum_{i=1}^n |f_i(x,t)|^2 \Big] e^{2\nu t} dx\, dt < \infty,$$

де $0 < \nu < \mu_0$. *Тоді існує узагальнений розв'язок* u *рівняння (1) і для нього є правильними оцінки*

$$\|u(\cdot,t)\|_{V_1} \le M_1 e^{-2\nu t}, \quad t \in (-\infty, T], \quad \int\limits_{Q_T} \Big[\sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^2 + |u|^2 + |u|^{p(x)} \Big] e^{2\nu t} dx\, dt \le M_1,$$

$$\alpha \int\limits_{-\infty}^T \langle Bu, u\rangle_2 e^{2\nu t} dt \le M_1, \tag{3}$$

де стала M_1 *залежить від* F_0 *і від коефіцієнтів операторів* B, L, A.

Доведення. Нехай $\{\varphi^k(x)\}$ — лінійно незалежна система функцій, замикання лінійної оболонки якої збігається з простором $V_1 \cap L^{p_2}(\Omega)$. Розглянемо послідовність функцій $u^m(x,t) = \sum_{k=1}^m z_k^m(t)\varphi^k(x)$, $m \in \mathbb{N}$, де $(z_1^m, \dots, z_m^m)$ є розв'язком такої задачі Коші:

$$\langle Bu_t^m, \varphi^k\rangle_1 + \langle L(t)u^m, \varphi^k\rangle_1 + \langle A(u^m), \varphi^k\rangle_p + \alpha\langle \mathcal{B}(u^m), \varphi^k\rangle_1 = \langle F^m, \varphi^k\rangle_{p,1}, \ t \in [T-m, T], \tag{4}$$

$$z_k^m(T-m) = 0, \quad k \in \{1, \dots, m\}, \tag{5}$$

і

$$F_i^m(x,t) = \begin{cases} f_i(x,t)\zeta_m(t), & (x,t) \in Q_{T-m,T}, \\ 0, & (x,t) \in Q_{T-m}, \end{cases}$$

$i \in \{0, 1, \dots, n\}$, $\zeta_m \in C^1(\mathbb{R})$, $0 \le \zeta_m(t) \le 1$, $\zeta_m(t) = 1$ при $t \in [T-m+1/2, T]$, $\zeta_m(t) = 0$ при $t \in (-\infty, T-m]$.

На підставі теореми Каратеодорі ([18]) існує абсолютно неперервний розв'язок задачі (4), (5) на деякому проміжку $[T-m, T-m+h]$, $h>0$. З оцінок, одержаних нижче, випливатиме, що цей розв'язок можна продовжити на весь проміжок $[T-m, T]$.

Продовжимо функції u^m нулем на область Q_{T-m}. Нехай $\tau_0 \in (-\infty, T)$. Помножимо кожне рівняння (4) відповідно на функцію $z_k^m(t)e^{2\mu t}$, підсумуємо за індексом k від 1 до m і проінтегруємо на проміжку $[\tau_0, \tau]$, $\tau \in (\tau_0, T]$. Після виконання цих операцій одержимо рівність

$$\int_{\tau_0}^{\tau} [\langle Bu_t^m, u^m\rangle_1 + \langle L(t)u^m, u^m\rangle_1 + \langle A(u^m), u^m\rangle_p + \alpha\langle \mathcal{B}(u^m), u^m\rangle_1 - \langle F^m(t), u^m\rangle_{p,1}]e^{2\mu t}dt = 0. \tag{6}$$

Перетворимо і оцінимо кожний доданок рівності (6) окремо. Нехай $\tau_0 \le T-m$, На підставі умови (B) матимемо

$$\mathrm{Im}_1 := \int_{\tau_0}^{\tau} \langle Bu_t^m, u^m\rangle_1 e^{2\mu t}dt = \frac{1}{2}\langle Bu^m(\cdot,\tau), u^m(\cdot,\tau)\rangle_1 e^{2\mu\tau} - \mu \int_{\tau_0}^{\tau} \langle Bu^m, u^m\rangle_1 e^{2\mu t}dt \ge$$
$$\ge \frac{1}{2}M_2\|u^m(\cdot,\tau)\|_{V_1}^2 e^{2\mu\tau} - \mu M_0 \int_{\tau_0}^{\tau} \|u^m(\cdot,t)\|_{V_1}^2 e^{2\mu t}dt,$$

де $M_2 = \min\{1, b_0\}$. Згідно з умовою (L)

$$\mathrm{Im}_2 := \int_{Q_{\tau_0,\tau}} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)u_{x_i}^m u_{x_j}^m e^{2\mu t}dx\,dt \ge a_0 \int_{Q_{\tau_0,\tau}} \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}^m|^2 e^{2\mu t}dx\,dt.$$

На підставі (A)

$$\mathrm{Im}_3 : \ = \int_{\tau_0}^{\tau} \langle A(u^m), u^m\rangle_p e^{2\mu t}dt \ge \omega_0 \int_{Q_{\tau_0,\tau}} |u^m|^{p(x)} e^{2\mu t}dx\,dt.$$

Нарешті,

$$\mathrm{Im}_4 := \int_{\tau_0}^{\tau} \langle F^m(t), u^m\rangle_{p,1} e^{2\mu t}dt \le \frac{\delta_0}{p_1} \int_{Q_{\tau_0,\tau}} |u^m|^{p(x)} e^{2\mu t}dxdt+$$
$$+ \int_{Q_{\tau_0,\tau}} \frac{|f_0|^{q(x)}}{q(x)\delta_0^{p(x)/q(x)}} e^{2\mu t}dxdt + \frac{1}{2}\int_{Q_{\tau_0,\tau}} \left[\delta_1 \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}^m|^2 + \frac{1}{\delta_1}\sum_{i=1}^{n} |f_i^m|^2\right] e^{2\mu t}dx\,dt,$$

$\delta_0 > 0$, $\delta_1 > 0$. Тоді, враховуючи оцінки інтегралів $\mathrm{Im}_1, \ldots, \mathrm{Im}_4$, з рівності (6) одержимо нерівність

$$M_2\int\limits_{\Omega_\tau}\left(|u^m|^2+\sum_{i=1}^n|u^m_{x_i}|^2\right)e^{2\mu\tau}dx+\alpha\int\limits_{\tau_0}^{\tau}\langle\mathcal{B}(u^m),u^m\rangle_1dt+$$

$$+(2a_0-2\mu M_0-\delta_1)\int\limits_{Q_{\tau_0,\tau}}\sum_{i=1}^n|u^m_{x_i}|^2e^{2\mu t}dx\,dt+$$

$$+2\left(\omega_0-\frac{\delta_0}{p_1}\right)\int\limits_{Q_{\tau_0,\tau}}|u^m|^{p(x)}e^{2\mu t}dx\,dt-\mu M_0\int\limits_{Q_{\tau_0,\tau}}|u^m|^2e^{2\mu t}dx\,dt\le$$

$$\le 2\int\limits_{Q_{\tau_0,\tau}}\frac{|f_0|^{q(x)}}{q(x)\delta_0^{p(x)/q(x)}}e^{2\mu t}dxdt+\frac{1}{\delta_1}\int\limits_{Q_{\tau_0,\tau}}\sum_{i=1}^n|f_i^m|^2e^{2\mu t}dx\,dt. \tag{7}$$

Якщо $p_1>2$, то

$$\int\limits_{Q_{\tau_0,\tau}}|u^m|^2e^{2\mu t}dx\,dt\le\frac{2\delta_2}{p_1}\int\limits_{Q_{\tau_0,\tau}}|u^m|^{p(x)}e^{2\mu t}dx\,dt+\int\limits_{Q_{\tau_0,\tau}}\frac{p(x)-2}{p(x)\delta_2^{2/(p(x)-2)}}e^{2\mu t}dxdt.$$

Приймемо

$$\delta_0=\frac{\omega_0p_1}{4},\ \ \delta_2=\begin{cases}(\omega_0p_1)/4, & \kappa=0\\ 0, & \kappa=1.\end{cases},\ \ \mu=\nu,\ \ a_0-\nu M_0-\nu c_0\kappa M_0=\chi_0>0,$$

$$\delta_1=\chi_0,\ \ M_3=2\operatorname*{ess\,sup}_{\Omega}\frac{1}{q(x)\delta_0^{p(x)/q(x)}},\ \ M_4=\int\limits_{\Omega}\frac{p(x)-2}{p(x)\delta_2^{2/(p(x)-2)}}dx.$$

Тоді $2\left[\omega_0-\frac{\delta_0}{p_1}-(1-\kappa)\frac{\delta_2}{p_1}\right]\ge\omega_0$ і нерівність (7) набере вигляду

$$M_2\int\limits_{\Omega_\tau}\left(|u^m|^2+\sum_{i=1}^n|u^m_{x_i}|^2\right)e^{2\nu\tau}dx+\alpha\int\limits_{\tau_0}^{\tau}\langle\mathcal{B}(u^m),u^m\rangle_1dt+$$

$$+\chi_0\int\limits_{Q_{\tau_0,\tau}}\sum_{i=1}^n|u^m_{x_i}|^2e^{2\nu t}dx+\omega_0\int\limits_{Q_{\tau_0,\tau}}|u^m|^{p(x)}e^{2\nu t}dx\,dt\le$$

$$\le M_3\int\limits_{Q_{\tau_0,\tau}}|f_0|^{q(x)}e^{2\nu t}dxdt+\frac{1}{\chi_0}\int\limits_{Q_{\tau_0,\tau}}\sum_{i=1}^n|f_i^m|^2e^{2\nu t}dx\,dt+\frac{(1-\kappa)M_4}{2\nu}. \tag{8}$$

Якщо спрямувати τ_0 до $-\infty$, то з нерівності (8) одержимо оцінки

$$\int\limits_{\Omega}\left[|u^m(x,\tau)|^2+\sum_{i=1}^n|u^m_{x_i}(x,\tau)|^2\right]e^{2\nu\tau}dx\le M_5,\ \ \tau\in(-\infty,T), \tag{9}$$

$$\int\limits_{Q_T}\left(|u^m|^{p(x)}+\sum_{i=1}^n|u^m_{x_i}|^2\right)e^{2\nu t}dx\,dt\le M_5, \tag{10}$$

$$\alpha\int\limits_{-\infty}^{T}\langle\mathcal{B}(u^m),u^m\rangle_2e^{2\nu t}dt\le M_5, \tag{11}$$

де стала M_5 не залежить від m.

Використовуючи рівняння (4), легко отримуємо рівності

$$\begin{gathered}\langle Bu_t^m(\cdot,\tau+t), u^m(\cdot,\tau+t)\rangle_1 + \langle L(\tau+t)u^m(\cdot,\tau+t), u^m(\cdot,\tau+t)\rangle_1 + \\ +\langle A(u^m(\cdot,\tau+t)), u^m(\cdot,\tau+t)\rangle_p + \alpha\langle \mathcal{B}(u^m(\cdot,\tau+t)), u^m(\cdot,\tau+t)\rangle_1 = \\ = \langle F^m(\tau+t), u^m(\cdot,\tau+t)\rangle_{p,1};\end{gathered} \tag{12}$$

$$\begin{gathered}\langle Bu_t^m(\cdot,\tau+t), u^m(\cdot,\tau)\rangle_1 + \langle L(\tau+t)u^m(\cdot,\tau+t), u^m(\cdot,\tau)\rangle_1 + \langle A(u^m(\cdot,\tau+t)), u^m(\cdot,\tau)\rangle_p + \\ +\alpha\langle \mathcal{B}(u^m(\cdot,\tau+t)), u^m(\cdot,\tau)\rangle_1 = \langle F^m(\tau+t), u^m(\cdot,\tau)\rangle_{p,1},\end{gathered} \tag{13}$$

де $\tau \in (-\infty, T)$ деяке фіксоване число. Крім того, припустимо, що $m + 1/2 > T - \tau$. Віднявши (13) від (12), отримаємо

$$\begin{gathered}\langle Bu_t^m(\cdot,\tau+t), \widehat{u}^m\rangle_1 + \langle L(\tau+t)u^m(\cdot,\tau+t), \widehat{u}^m\rangle_1 + \langle A(u^m(\cdot,\tau+t)), \widehat{u}^m\rangle_p + \\ +\alpha\langle \mathcal{B}(u^m(\cdot,\tau+t)), \widehat{u}^m\rangle_1 = \langle F^m(\tau+t), \widehat{u}^m\rangle_{p,1},\end{gathered} \tag{14}$$

де $\widehat{u}^m(x,t) = u^m(x,\tau+t) - u^m(x,\tau)$.

Оскільки $\widehat{u}_t^m(\cdot,\tau) = u_t^m(x,\tau+t)$, то рівність (14) можемо записати у вигляді

$$\begin{gathered}\langle B\widehat{u}_t^m(\cdot,\tau+t), \widehat{u}^m\rangle_1 + \langle L(\tau+t)u^m(\cdot,\tau+t), \widehat{u}^m\rangle_1 + \langle A(u^m(\cdot,\tau+t)), \widehat{u}^m\rangle_p + \\ +\alpha\langle \mathcal{B}(u^m(\cdot,\tau+t)), \widehat{u}^m\rangle_1 = \langle F^m(\tau+t), \widehat{u}^m\rangle_{p,1}.\end{gathered} \tag{15}$$

Проінтегрувавши (15) за змінною t від 0 до δ, одержимо

$$\begin{gathered}\int_0^\delta \Big(\langle B\widehat{u}_t^m(\cdot,\tau+t), \widehat{u}^m\rangle_1 + \langle L(\tau+t)\widehat{u}^m, \widehat{u}^m\rangle_1 + \langle L(\tau+t)u^m(\cdot,\tau), \widehat{u}^m\rangle_1 + \\ +\langle A(u^m(\cdot,\tau+t)) - A(u^m(\cdot,\tau)), \widehat{u}^m\rangle_p + \langle A(u^m(\cdot,\tau)), \widehat{u}^m\rangle_p + \alpha\langle \mathcal{B}(u^m(\cdot,\tau+t)) - \\ -\mathcal{B}(u^m(\cdot,\tau)), \widehat{u}^m\rangle_1 + +\alpha\langle \mathcal{B}(u^m(\cdot,\tau)), \widehat{u}^m\rangle_1 \Big) dt = \int_0^\delta \langle F^m(\tau+t), \widehat{u}^m\rangle_{p,1} dt.\end{gathered} \tag{16}$$

Використовуючи умови теореми, перетворимо й оцінимо кожний доданок рівності (16):

$$\mathrm{Im}_5 := \int_0^\delta \langle B\widehat{u}_t^m, \widehat{u}^m\rangle_1 \, dt = \frac{1}{2}\langle B\widehat{u}^m(\cdot,\delta), \widehat{u}^m(\cdot,\delta)\rangle_1;$$

$$\mathrm{Im}_6 := \int_0^\delta \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,\tau+t)\widehat{u}_{x_i}^m(x,t)\widehat{u}_{x_j}^m(x,t) dx\, dt \geq a_0 \int_0^\delta \int_\Omega \sum_{i=1}^n |\widehat{u}_{x_i}^m|^2 dx\, dt;$$

$$\mathrm{Im}_7 := \int_0^\delta \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,\tau+t)u_{x_i}^m(x,\tau)\widehat{u}_{x_j}^m dx\, dt \leq \frac{1}{2}\widehat{a} \int_0^\delta \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n (|u_{x_i}^m(x,\tau)|^2 + |\widehat{u}_{x_j}^m|) dx\, dt \leq$$

$$\leq 2\widehat{a}M_6\delta e^{-2\nu\tau}, \text{ де } \widehat{a} = \max_{i,j\in\{1,\dots,n\}} \operatorname*{ess\,sup}_{Q_T} |a_{ij}(x,t)|, \text{стала } M_6 \text{ не залежить від } m \text{ і } \delta;$$

$$\mathrm{Im}_8 := \int_0^\delta \int_\Omega a_0(x)(|u^m(x,\tau+t)|^{p(x)-2}u^m(x,\tau+t) - |u^m(x,\tau)|^{p(x)-2}u^m(x,\tau))\widehat{u}^m dx\, dt \geq 0.$$

Нехай $\mathrm{Im}_9 := \int_0^\delta \int_\Omega a_0(x)|u_j^m(x,\tau)|^{p(x)-2}u_j^m(x,\tau)\widehat{u}_j^m dx\,dt$. З оцінки (10) і леми Фату випливає, що

$$\int\limits_\tau^T \liminf_{m\in\mathbb{N}} \int\limits_\Omega |u^m(x,t)|^{p(x)}dx\,dt \le M_7 e^{-2\nu\tau},,$$

де стала M_7 не залежить від m. Отже, $\liminf\limits_{m\in\mathbb{N}} \int_\Omega |u^m(x,t)|^{p(x)}dx < \infty$ майже для всіх $t\in(\tau,T)$ Без обмеження загальності можемо вважати, що $\liminf\limits_{m\in\mathbb{N}} \int_\Omega |u^m(x,\tau)|^{p(x)}dx \le M_8 < \infty$. Звідси випливає існування такої підпослідовності послідовності $\{u^m(x,\tau)\}$ (збережемо за нею це саме позначення), що

$$\int\limits_\Omega |u^m(x,\tau)|^{p(x)}dx \le M_9. \tag{17}$$

Зазначимо, що стала M_9 залежить від τ, але не залежить від m. З теореми 2.1 ([15]) випливає нерівність $\mathrm{Im}_9 \le \widehat{\omega} r_p \|\,|u^m(\cdot,\tau)|^{p(x)-1}\|_{L^{q(x)}(Q_{0,\delta}}\|\,\widehat{u}^m\|_{L^{p(x)}(Q_{0,\delta})}$, де $\widehat{\omega} = \operatorname{ess\,sup}_\Omega a_0(x)$, $r_p = \operatorname{mes}\Omega + 1/p_1 - 1/p_2$. З означення норми в $L^{q(x)}(Q_{0,\delta}$ маємо оцінку

$$\||u^m(\cdot,\tau)|^{p(x)-1}\|_{L^{q(x)}(Q_{0,\delta})} \le \left(\int\limits_{Q_{0,\delta}} |u(x,\tau)|^{p(x)}dxdt\right)^{1/q_1},$$

якщо $\||u^m(\cdot,\tau)|^{p(x)-1}\|_{L^{q(x)}(Q_{0,\delta})} > 1$, де $q_1 = \operatorname{ess\,inf}\limits_\Omega q(x)$. Тоді враховуючи оцінки (10) і (17), одержимо, що $\mathrm{Im}_9 \le M_{10}\delta^{1/q_1}$, де стала M_{10} не залежить від m. Крім того,

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}_{10} &:= \int\limits_0^\delta \int\limits_\Omega \Big[(f_0(x,\tau+t),\widehat{u}^m) + \sum_{i=1}^n (f_i^m(x,\tau+t),\widehat{u}_{x_i}^m)\Big]dx\,dt \le \\ &\le \int\limits_0^\delta \int\limits_\Omega \Big[\frac{\delta_3}{p(x)}|\widehat{u}^m|^{p(x)} + \frac{1}{\delta_3^{q(x)/p(x)}q(x)}|f_0(x,\tau+t)|^{q(x)} + \\ &\quad + \frac{\delta_3}{2}\sum_{i=1}^n |\widehat{u}_{x_i}^m|^2 + \frac{1}{2\delta_3}\sum_{i=1}^n |f_i(x,\tau+t)|^2\Big]dx\,dt,\end{aligned}$$

де $0<\delta_3<1$. З умов теореми маємо, що

$$\sup_{[\tau,T]}\|f_0(\cdot,t)\|_{L^{q(x)}(\Omega)} \le M_{11}, \quad \sup_{[\tau,T]}\|f_i(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \le M_{11}, \quad i\in\{1,\dots,n\}.$$

Тоді $\sup\limits_{[\tau,T]}\|f_0(\cdot,t)/M_{11}\|_{L^{q(x)}(\Omega)} \le 1$ і $\sup\limits_{[\tau,T]}\int\limits_\Omega |f_0(x,t)|^{q(x)}dx \le M_{11}^{p_1}$. Вибравши $\delta_3 = \delta^{\gamma_0}$, де $\gamma_0 < \min\{1, p_1-1\}$, одержимо оцінку $\mathrm{Im}_{10} \le M_{12}\delta^{\gamma_1}$, де стала γ_1 залежить від γ_0 і $p(x)$, а стала M_{12} не залежить від m.

Розглянемо тепер інтеграл $\mathrm{Im}_{11} := \alpha\int_0^\delta \langle \mathcal{B}(u^m(\cdot,\tau)), \widehat{u}^m(\cdot,t)\rangle_1 dt$. Враховуючи обмеженість оператора штрафу $\mathcal{B}$ ([16, c.413]) і оцінку (11), одержимо

$$\mathrm{Im}_{11} \le \alpha\int\limits_0^\delta \|\mathcal{B}(u^m(\cdot,\tau))\|_{V_1^*}\|\widehat{u}^m(\cdot,t)\|_{V_1}dt \le M_{13}\delta,$$

причому стала M_{13} не залежить від m.

З оцінок інтегралів $\mathrm{Im}_5, \ldots, \mathrm{Im}_{11}$ та з (16) отримуємо

$$\langle B\widehat{u}^m(\cdot,\delta), \widehat{u}^m(\cdot,\delta)\rangle_1 \le M_{14}\delta^{\gamma_2}, \tag{18}$$

де $\gamma_2 = \min\{1, \gamma_1, q_1\}$. Зазначимо, що стала M_{14} залежить від τ і не залежить від m.

Використовуючи рівняння (4), легко одержати рівності

$$\begin{gathered}\langle Bu_t^m(\cdot,t+\delta), u^m(\cdot,t+\delta)\rangle_1 + \langle L(t+\delta)u^m(\cdot,t+\delta), u^m(\cdot,t+\delta)\rangle_1 + \\ +\langle A(u^m(\cdot,t+\delta)), u^m(\cdot,t+\delta)\rangle_p + \alpha\langle \mathcal{B}(u^m(\cdot,t+\delta)), u^m(\cdot,t+\delta)\rangle_1 = \\ = \langle F^m(t+\delta), u^m(\cdot,t+\delta)\rangle_{p,1},\end{gathered} \tag{19}$$

$$\begin{gathered}\langle Bu_t^m(\cdot,t+\delta), u^m(\cdot,t)\rangle_1 + \langle L(t+\delta)u^m(\cdot,t+\delta), u^m(\cdot,t)\rangle_1 + \\ +\langle A(u^m(\cdot,t+\delta)), u^m(\cdot,t)\rangle_p + \alpha\langle \mathcal{B}(u^m(\cdot,t+\delta)), u^m(\cdot,t)\rangle_1 = \\ +\langle F^m(t+\delta), u^m(\cdot,t)\rangle_{p,1}.\end{gathered} \tag{20}$$

Віднявши (19) від (18), матимемо

$$\begin{gathered}\langle Bu_t^m(\cdot,t+\delta), \tilde{u}^m(\cdot,t)\rangle_1 + \langle L(t+\delta)u^m(\cdot,t+\delta), \tilde{u}^m(\cdot,t)\rangle_1 + \\ +\langle A(u^m(\cdot,t+\delta)), \tilde{u}^m(\cdot,t)\rangle_p + \alpha\langle \mathcal{B}(u^m(\cdot,t+\delta)), \tilde{u}^m(\cdot,t)\rangle_1 = \\ = \langle F^m(t+\delta), \tilde{u}^m(\cdot,t)\rangle_{p,1},\end{gathered} \tag{21}$$

де $\tilde{u}^m(x,t) = u^m(x,t+\delta) - u^m(x,t)$.

Подібно як (20), одержимо рівність

$$\begin{gathered}\langle Bu_t^m(\cdot,t), \tilde{u}^m\rangle_1 + \langle L(t)u_t^m(\cdot,t), \tilde{u}^m\rangle_1 + \langle Au^m(\cdot,t)\tilde{u}^m\rangle_p + \\ +\alpha\langle \mathcal{B}(u^m(\cdot,t)), \tilde{u}^m\rangle_1 = \langle F^m(t), \tilde{u}^m\rangle_{p,1}.\end{gathered} \tag{22}$$

Віднявши від (20) рівність (21), помноживши різницю на $e^{2\nu t}$ і проінтегрувавши по проміжку $[\tau,\sigma]$, $\sigma \in (\tau, T]$, отримаємо

$$\begin{gathered}\int\limits_\tau^\sigma (\langle B\tilde{u}_t^m, \tilde{u}^m\rangle_1 + \langle L(t+\delta)\tilde{u}^m, \tilde{u}^m\rangle_1 + \langle (L(t+\delta) - L(t))u^m(\cdot,t), \tilde{u}^m\rangle_1 + \\ +\langle A(u^m(\cdot,t+\delta)) - A(u^m(\cdot,t)), \tilde{u}^m\rangle_p + \alpha\langle \mathcal{B}(u^m(\cdot,t+\delta)) - \mathcal{B}(u^m(\cdot,t)), \tilde{u}^m\rangle_1)e^{2\nu t}dt = \\ = \int\limits_\tau^\sigma \langle F^m(\cdot,t+\delta) - F^m(\cdot,t), \tilde{u}^m\rangle_{p,1}e^{2\nu t}dt.\end{gathered} \tag{23}$$

Перетворюючи і оцінюючи кожний доданок рівності (23) з використанням умов теореми та оцінки (18), легко показати, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $0 < \delta < \varepsilon$, що

$$\int\limits_\Omega \left(|u^m(x,t+\delta) - u^m(x,t)|^2 + \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^m(x,t+\delta) - u_{x_i}^m(x,t)|^2 \right) dx < \varepsilon \tag{24}$$

для всіх $t \in [\tau, T]$. Отже, послідовність функцій $\{u^m\}$ є одностайно неперервною в $C([\tau,T];V_1)$. Оскільки оператор $\mathcal{B}$ є обмеженим ([16, с.413]), то

$$\|\mathcal{B}(u^m)\|_{L^2((\tau,T);V_1^*)} \le M_{15}. \tag{25}$$

На підставі теореми 2.1 ([15])

$$\int\limits_{\tau}^{T}\int\limits_{\Omega} a_0(x)|u^m_{j,x_i}|^{p(x)-1}|v_{j,x_i}|\,dx\,dt \le \widehat{\omega}r_p\|\,|u^m|^{p(x)-1}\|_{L^{q(x)}(Q_{\tau,T})}\|v\|_{L^{p(x)}(Q_{\tau,T})},$$

де v — довільна функція з простору $L^{p(x)}(Q_{\tau,T})$. Згідно з означенням норми у просторі $L^{q(x)}(Q_{\tau,T})$ і оцінкою (10)

$$\|\,|u^m|^{p(x)-1}\|_{L^{q(x)}(Q_{\tau,T})} \le M_{16}. \tag{26}$$

Тоді

$$|\langle A(u^m),v\rangle_p| \le \widehat{\omega}r_p\|\,|u^m|^{p(x)-1}\|_{L^{q(x)}(Q_{\tau,T})}\|\,v\|_{L^{p(x)}(Q_{\tau,T})} \le M_{17}\|v\|_{L^{p(x)}(Q_{\tau,T})}$$

для довільної функції $v\in L^{p(x)}(Q_{\tau,T})$. Звідси випливає, що

$$\|A(u^m)\|_{L^{q(x)}(Q_{\tau,T})} \le M_{18}. \tag{27}$$

Крім того, з (9) і (10) отримуємо

$$\|u^m\|_{L^2((\tau,T);V_1)} \le M_{19}, \quad \|u^m\|_{L^{p(x)}(Q_{\tau,T})} \le M_{19}. \tag{28}$$

Розглянемо оператор $\Gamma = A+\mathcal{B}$. Тоді з оцінок (25), (27) випливає, що

$$\|\Gamma(u^m)\|_{L^{q(x)}(Q_{\tau,T})\cap L^2((\tau,T);V_1^*)} \le M_{20}. \tag{29}$$

Виберемо послідовність $\{\tau_m\}$ таку, що для кожного τ_m виконується нерівність вигляду (17) і $\lim\limits_{m\to\infty}\tau_m = -\infty$. Тоді враховуючи оцінки (24), (27)–(29), отримуємо існування підпослідовності $\{u^{l,1}(x,t)\}$ послідовності $\{u^m(x,t)\}$ такої, що

$$u^{l,1}\to U^1 \quad \text{слабко в} \quad L^2((\tau_1,T);V_1); \quad u^{l,1}\to U^1 \quad \text{слабко в} \quad L^{p(x)}(Q_{\tau_1,T});$$
$$\Gamma(u^{l,1})\to\chi^1 \quad \text{слабко в} \quad L^{q(x)}(Q_{\tau,T})\cap L^2((\tau,T);V_1^*);$$
$$\int\limits_{\Omega}\Big[u^{l,1}(x,t)v(x,t)+\sum_{i=1}^{n}u^{l,1}_{x_i}(x,t)v_{x_i}(x,t)\Big]dx \to \int\limits_{\Omega}\Big[U^1(x,t)v(x,t)+\sum_{i=1}^{n}U^1_{x_i}(x,t)v_{x_i}(x,t)\Big]dx$$

рівномірно в $C([\tau_1,T])$ для довільної $v\in L^2((\tau_1,T);V_1)$ при $l\to\infty$.

Подібно, існує підпослідовність $\{u^{l,2}(x,t)\}$ послідовності $\{u^{l,1}(x,t)\}$ така, що

$$u^{l,2}\to U^2 \quad \text{слабко в} \quad L^2((\tau_2,T);V_1); \quad u^{l,2}\to U^2 \quad \text{слабко в} \quad L^{p(x)}(Q_{\tau_2,T});$$
$$\Gamma(u^{l,2})\to\chi^2 \quad \text{слабко в} \quad L^{q(x)}(Q_{\tau,T})\cap L^2((\tau,T);V_1^*);$$
$$\int\limits_{\Omega}\Big[u^{l,2}(x,t)v(x,t)+\sum_{i=1}^{n}u^{l,2}_{x_i}(x,t)v_{x_i}(x,t)\Big]dx \to \int\limits_{\Omega}\Big[U^2(x,t)v(x,t)+\sum_{i=1}^{n}U^2_{x_i}(x,t)v_{x_i}(x,t)\Big]dx$$

рівномірно в $C([\tau_2,T])$ для довільної $v\in L^2((\tau_2,T);V_1)$ при $l\to\infty$.

Продовжуючи цей процес, отримаємо послідовності $\{u^{l,s}(x,t)\}$, $\{U^s(x,t)\}$, $\{\chi^s\}$. Легко бачити, що $U^s = U^k$, $\chi^s = \chi^k$, в $Q_{\tau_k,T}$ для $s > k$. Введемо функції u і χ такі, що $u = U^s$, $\chi = \chi^s$ в $Q_{\tau_k,T}$. Тоді для діагональної послідовності маємо:

$$u^{l,l} \to u \quad \text{слабко в} \quad L^2((t_1,T);V_1); \quad u^{l,l} \to u \quad \text{слабко в} \quad L^{p(x)}(Q_{t_1,T});$$
$$\Gamma(u^{l,l}) \to \chi \quad \text{слабко в} \quad L^{q(x)}(Q_{\tau,T}) \cap L^2((\tau,T);V_1^*);$$
$$\int\limits_{\Omega}\left[u^{l,l}(x,t)v(x,t) + \sum_{i=1}^{n} u^{l,l}_{x_i}(x,t)v_{x_i}(x,t)\right]dx \to \int\limits_{\Omega}\left[u(x,t)v(x,t) + \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}(x,t)v_{x_i}(x,t)\right]dx$$

рівномірно в $C([t_1,T])$ для довільної $v \in L^2((t_1,T);V_1)$ при $l \to \infty$ (для довільного $t_1 \in (-\infty,T)$.)

Нехай z_k, $k \in \{1,\dots,l_0\}$, — функції з простору $C^1((-\infty,T])$ з обмеженими носіями,

$$v^{l_0}(x,t) = \sum_{k=1}^{l_0} z_k(t)\varphi^k(x).$$

З рівнянь (4) для $m = l$ і $l \geq l_0$, отримуємо рівність

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}(\langle Bu_t^{l,l}, v^{l_0}\rangle_1 + \langle L(t)u^{l,l}, v^{l_0}\rangle_1 + \langle A(u^{l,l}), v^{l_0}\rangle_p + \alpha\langle \mathcal{B}(u^{l,l}), v^{l_0}\rangle_1 - \langle F(t), v^{l_0}\rangle_{p,1})dt = 0 \tag{30}$$

для $-\infty < t_1 < t_2 \leq T$. Проінтегрувавши частинами в (30), маємо

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}(-\langle Bu^{l,l}, v_t^{l_0}\rangle_1 + \langle L(t)u^{l,l}, v^{l_0}\rangle_1 + \langle Au^{l,l}, v^{l_0}\rangle_p + \alpha\langle \mathcal{B}(u^{l,l}), v^{l_0}\rangle_1)dt +$$
$$+\langle Bu^{l,l}, v^{l_0}\rangle_1\Big|_{t=t_2} - \langle Bu^{l,l}, v^{l_0}\rangle_1\Big|_{t=t_1} = \int\limits_{t_1}^{t_2}\langle F(t), v^{l_0}\rangle_{p,1}))dt. \tag{31}$$

Спрямувавши в (31) спочатку $l \to \infty$, а потім $l_0 \to \infty$, отримуємо рівність

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}(-\langle Bu, v_t\rangle_1 + \langle L(t)u, v\rangle_1 + \langle \chi, v\rangle_p))dt + \langle Bu, v\rangle_1\Big|_{t=t_2} - \langle Bu, v\rangle_1\Big|_{t=t_1} = \int\limits_{t_1}^{t_2}\langle F(t), v\rangle_{p,1})dt, \tag{32}$$

правильну для довільної функції $v \in L^{p(x)}_{\mathrm{loc}}(\bar{Q}_T) \cap L^2_{\mathrm{loc}}((-\infty,T);V_1)$ такої, що $v_t \in L^2_{\mathrm{loc}}((-\infty,T);V_1)$.

Нехай γ_k — неперервна і кусково лінійна функція на проміжку $[t_1,t_2]$, $\gamma_k(t) = 1$, при $t_1 + \frac{2}{k} < t < t_2 - \frac{2}{k}$, $\gamma_k(t) = 0$ при $t > t_2 - \frac{1}{k}$ і при $t < t_1 + \frac{1}{k}$. Нехай ρ_k — регуляризуюча послідовність в $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\rho_k(t) = \rho_k(-t)$, $\int_{-\infty}^{+\infty}\rho_k(t)dt = 1$, $\operatorname{supp}\rho_k \in \left[-\frac{1}{s}, \frac{1}{s}\right]$. При $s > 2k$ приймемо, що $v = ((\gamma_k u) * \rho_s * \rho_s)\gamma_k$ в інтегралі $\int_{t_1}^{t_2}\langle Bu_t, v\rangle_1 e^{2\nu t}dt$, де символ $*$ означає згортку за змінною t. Тоді, як і в [16, с. 225], отримуємо рівність

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\langle Bu_t, u\rangle_1 e^{2\nu t}dt = \nu\int\limits_{t_1}^{t_2}\langle Bu_t, u\rangle_1 e^{2\nu t}dt + \frac{1}{2}\langle Bu, u\rangle_1 e^{2\nu t}\Big|_{t=t_2} - \frac{1}{2}\langle Bu, u\rangle_1 e^{2\nu t}\Big|_{t=t_1}.$$

Враховуючи цю рівність і (31) (для $v = ue^{2\nu t}$), матимемо

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} (\langle L_\nu(t)u, u\rangle_1 + \langle \chi, u\rangle_{p,1}))e^{2\nu t}dt + \langle Bu, u\rangle_1 e^{2\nu t}\Big|_{t=t_2} - \langle Bu, u\rangle_1 e^{2\nu t}\Big|_{t=t_1} = \int\limits_{t_1}^{t_2} \langle F(t), u\rangle_{p,1} e^{2\nu t}dt. \tag{33}$$

Зазначимо, що з оцінок (10) випливає таке: $\lim\limits_{t_1\to -\infty} \langle Bu, u\rangle_2 e^{2\nu t}\Big|_{t=t_1} = 0$. Доведемо тепер, що $\chi = \Gamma(u)$. Розглянемо функціонал

$$X_l = \int\limits_{t_1}^{t_2} \langle \Gamma(u^{l,l}) - \Gamma(v), u^{l,l} - v\rangle_{p,1} e^{2\nu t}dt = \int\limits_{t_1}^{t_2} \langle \Gamma(u^{l,l}), u^{l,l}\rangle_{p,1} e^{2\nu t}dt -$$

$$- \int\limits_{t_1}^{t_2} \langle \Gamma(u^{l,l}), v\rangle_{p,1} e^{2\nu t}dt - \int\limits_{t_1}^{t_2} \langle \Gamma(v), u^{l,l} - v\rangle_{p,1} e^{2\nu t}dt, \tag{34}$$

де $ve^{\nu t} \in L^{p(x)}(Q_T) \cap L^2((-\infty, T); V_1)$. Оскільки оператор Γ монотонний, то $X_l \geq 0$. Використовуючи рівність (5), отримуємо

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \langle \Gamma(u^{l,l}), u^{l,l}\rangle_{p,1} e^{2\nu t}dt = \int\limits_{t_1}^{t_2} ((\langle F(t), u^{l,l}\rangle_{p,1} - \langle L(t)u^{l,l}, u^{l,l}\rangle_1 - \nu\langle Bu^{l,l}, u^{l,l}\rangle_1)e^{2\nu t})dt -$$

$$-\frac{1}{2}\langle Bu^{l,l}, u^{l,l}\rangle_1 e^{2\nu t}\Big|_{t=t_2} + \frac{1}{2}\langle Bu^{l,l}, u^{l,l}\rangle_1 e^{2\nu t}\Big|_{t=t_1} = \int\limits_{t_1}^{t_2} ((\langle F(t), u^{l,l}\rangle_{p,1} -$$

$$-\langle L_\nu(t)(u^{l,l} - u), u^{l,l} - u\rangle_1 - \langle L_\nu(t)u, u^{l,l} - u\rangle_1 - \langle L_\nu(t)u^{l,l}, u\rangle_1)e^{2\nu t}dt -$$

$$-\frac{1}{2}\langle Bu^{l,l}, u^{l,l}\rangle_1 e^{2\nu t}\Big|_{t=t_2} + \frac{1}{2}\langle Bu^{l,l}, u^{l,l}\rangle_1 e^{2\nu t}\Big|_{t=t_1}. \tag{35}$$

Спрямуємо в рівностях (33)–(35) t_1 до $-\infty$. Тоді на підставі (34) і (35), враховуючи монотонність оператора $L_\nu(t)$, матимемо

$$0 \leq \lim_{l\to\infty} \sup X_l \leq \int\limits_{-\infty}^{t_2} ((\langle F(t), u\rangle_{p,1} - \langle L_\nu(t)u, u\rangle_1 - \langle \chi, v\rangle_{p,1} -$$

$$-\langle \Gamma(v), u - v\rangle_{p,1})e^{2\nu t}dt - \frac{1}{2}\langle Bu, u\rangle_1 e^{2\nu t}\Big|_{t=t_2}. \tag{36}$$

Додамо рівність (33) при $t_1 = -\infty$ і нерівність (36). Одержимо

$$\int\limits_{-\infty}^{t_2} \langle \chi - \Gamma(v), u - v\rangle_{p,1} e^{2\nu t}dt \geq 0 \tag{37}$$

для довільної функції v такої, що $ve^{\nu t} \in L^{p(x)}(Q_T) \cap L^2((-\infty, T); V_1)$. Приймемо, що в (37) $v = u - \lambda w$, $\lambda \in (0, 1]$, $w \in L^{p(x)}(Q_T) \cap L^2((-\infty, T); V_1)$. Тоді

$$\int\limits_{-\infty}^{t_2} \langle \chi - \Gamma(u - \lambda w), w\rangle_{p,1} e^{2\nu t}dt \geq 0. \tag{38}$$

Зауважимо, що $\int_{-\infty}^{t_2}(\langle A(u-\lambda w),w\rangle_p-\langle Au,w\rangle)_p e^{2\nu t}dt=\int_{-\infty}^{t_2}\int_\Omega\int_0^\lambda \frac{d}{d\rho}(a_0|u-\rho w|^{p(x)-2}(u-\rho w)w)e^{2\nu t}d\rho\,dx\,dt=-\lambda\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega(p(x)-1)a_0(x)|u-\rho^* w|^{p(x)-2}w^2)e^{2\nu t}dx\,dt\to 0$ при $\lambda\to\infty$. Тут $\rho^*\in(0,\lambda)$. Отже, в (38) можемо перейти до границі при $\lambda\to 0$, звідки для довільної функції w такої, що $we^{\nu t}\in L^{p(x)}(Q_T)\cap L^2((-\infty,T);V_1)$ отримуємо нерівність $\int_{-\infty}^{t_2}\langle\chi-\Gamma(v),w\rangle_{p,1}e^{2\nu t}dt\geq 0$. Звідси випливає рівність $\chi=\Gamma(u)$ в $Q_{-\infty,t_2}$. Враховуючи довільність t_2, маємо що $\chi=\Gamma(u)$ в Q_T. Отже, згідно з означенням, з рівності (31) отримуємо, що u є узагальненим розв'язком рівняння (1). Крім того, з (9)–(11) випливають оцінки (3). Теорему доведено. $\square$

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді рівняння (1) не має більше одного узагальненого розв'язку в класі функцій* $u\in C((-\infty,T];V_1)\cap L^{p(x)}_{\mathrm{loc}}(\bar Q_T)$ *таких, що*

$$\langle Bu(\cdot,t),u(\cdot,t)\rangle_1=o(1)e^{-2\nu t}\ \text{при } t\to-\infty. \tag{39}$$

Доведення. Нехай існують два узагальнені розв'язки рівняння (1) $u^{(1)}$ та $u^{(2)}$ і нехай $u=u^{(1)}-u^{(2)}$. Тоді u задовольняє рівність

$$\int_{t_1}^{t_2}\Big(-\langle Bu,v_t\rangle_1+\langle L(t)u,v\rangle_1+\langle A(u^{(2)})-A(u^{(1)}),v\rangle_p+\alpha\langle\mathcal{B}(u^{(2)})-\mathcal{B}(u^{(1)}),v\rangle_1\Big)dt=$$
$$=-\langle Bu,v\rangle_1\Big|_{t=t_2}+\langle Bu,v\rangle_1\Big|_{t=t_1} \tag{40}$$

для довільної функції $v\in L^{p(x)}_{\mathrm{loc}}(\bar Q_T)\cap L^2_{\mathrm{loc}}((-\infty,T);V_1)$ такої, що $v_t\in L^2_{\mathrm{loc}}((-\infty,T);V_1)$ і для довільних $t_1,t_2,-\infty<t_1<t_2\leq T$.

Аналогічно як рівність (33) можемо довести, що

$$\int_{t_1}^{t_2}\Big(\langle L_\nu(t)u,u\rangle_1+\langle A(u^{(2)})-A(u^{(1)}),u\rangle_p+\alpha\langle\mathcal{B}(u^{(2)})-\mathcal{B}(u^{(1)}),u\rangle_1\Big)e^{2\nu t}dt+$$
$$+\frac{1}{2}\langle Bu,u\rangle_1\Big|_{t=t_2}e^{2\nu t_2}-\frac{1}{2}\langle Bu,u\rangle_1\Big|_{t=t_1}e^{2\nu t_1}=0.$$

Оскільки оператори L_ν, A і $\mathcal{B}$ — монотонні, то при $t_1\to-\infty$, з урахуванням умови (39), з останньої рівності випливає, що $\langle Bu,u\rangle_1\big|_{t=t_2}\leq 0$ для довільного $t_2\in(-\infty,T]$. Отже, $u=0$ в Q_T і теорему доведено. $\square$

Зауваження. Зазначимо, що позаяк у рівнянні (1) присутній оператор штрафу, подібні результати можна одержати для псевдопараболічної варіаційної нерівності без початкових умов.

ЛІТЕРАТУРА

1. Соболев С.Л. *Об одной новой задаче математической физики* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1954. – Т. 18, № 1. – С. 3–50.
2. Гальперн С.А. *Задача Коши для общих систем линейных уравнений с частными производными* // ДАН СССР. – 1958. – Т. 119, № 4. – С. 640–643.
3. Баренблат Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н. *Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах* // Прикл. матем. и мех. – 1960. – Т. 24, Вып. 5. – С. 852–864.
4. Chen P.J., Gurtin M.E. *On a theory of head conduction involving to temperatures* // Z. Angew. Math. Phys. – 1968. – V.19. – P. 614–627.
5. Чудновский А.Ф. Теплофизика почв. – Москва: Наука, 1976. – 352 с.
6. Тихонов А.Н. *Теоремы единственности для уравнения теплопроводности* // Мат. сборник. – 1935. –Т. 42, №2. – С. 199–216.
7. Искендеров И.Т., Ахмедов Н.К. *О поведении решений некоторого класса нелинейных псевдопараболических уравнений в неограниченных областях по t* // Краев. задачи для дифференц. уравнений с частн. производными. – Баку, 1990. – С. 64–66.
8. Бас М.О., Лавренюк С.П. *Про единість розв'язку задачі Фур'є для однієї системи типу Соболєва-Гальперна* // Укр. мат. журн. – 1996. – Т. 48, №1. – С.124–128.
9. Lavrenjuk S.P., Kolinko M.O. *The problem without initial data for linear Sobolev-Halpern system* // Demonstratio Math. – 1998. – V.31, no 1. – P. 25–32.
10. Бокало Н.М. *О задаче без начальных условий для некоторых классов нелинейных параболических уравнений* // Труды семинара им. И.Г.Петровского. – 1989. – Вып. 14. – С. 3–44.
11. Колінько М.О., Лавренюк С.П. *Єдиність розв'язку задачі Фур'є для однієї нелінійної псевдопараболічної системи* // Вісник Львів. у-ту. Сер. мех.-матем. – 1996. – Вип. 45. – С. 71–77.
12. Колінько М.О., Лавренюк С.П. *Існування розв'язку однієї нелінійної псевдопараболічної системи* // Вісник Львів. у-ту. Сер. мех.-матем. – 1997. – Вип. 48. – С. 44–49.
13. Лавренюк С.П., Пташник М.Б. *Задача без начальных условий для нелинейной псевдопараболической системы* // Дифференциальные уравнения. – 2000. – Т. 36, №5. – С. 667–673.
14. *Лавренюк С. П., Пташник М. Б.* Задача Фур'є для псевдопараболічного рівняння // Нелинейные граничные задачи. – 2000. – №10. – С. 123-135.
15. Kovacik O., Rakosnic J. *On spaces $L^{p(x)}, W^{k,p(x)}$* // Czechosl. Math. J. – 1991. – V. 41, no 4. – P.592–618.
16. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 608 с.
17. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1978. – 336 с.
18. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений.– Москва: Изд-во иностр. лит., 1958. – 475 с.

Львівський національний університет імені Івана Франка,
Жешівський університет, Польща

Надійшло 23.01.2004
Після переробки 24.11.2005