УДК 517.9

Ю. Ю. Беркела, Ю. М. Сидоренко

ТЕОРЕМИ ТИПУ ДАРБУ І ОПЕРАТОРИ ПЕРЕТВОРЕНЬ ДЛЯ НЕЛОКАЛЬНО РЕДУКОВАНОЇ ЕРМІТОВОЇ ІЄРАРХІЇ КАДОМЦЕВА-ПЕТВІАШВІЛІ (Hk-cKP)

Yu. Yu. Berkela, Yu. M. Sydorenko. *Darboux type theorems and transformation operators for nonlocal reduced Hermitian Kadomtsev-Petviashvili hierarchy (Hk-cKP)*, Matematychni Studii, **25** (2006) 38–64.

Our paper includes the survey of results. We investigate a possibility and effectivity of applying different versions of Darboux type transformations for integrating nonlinear models of the soliton theory that are contained in a non-local reduced Kadomtsev-Petviashvili hierarchy. We compare the respective classes of exact solutions obtained with the aid of both classical and binary Darboux transformations. An explicit connection is established at the level of the corresponding operators of binary transformations between Hermitian and $\mathcal{D}$-Hermitian Kadomtsev-Petviashvili hierarchies.

Ю. Ю. Беркела, Ю. Н. Сидоренко. *Теоремы типа Дарбу и операторы преобразований для нелокально редуцированной эрмитовой иерархии Кадомцева-Петвиашвили (Hk-cKP)* // Математичні Студії. – 2006. – Т.25, №1. – С.38–64.

Статья содержит обзор результатов. Исследуется возможность и эффективность применения различных версий преобразований типа Дарбу для интегрирования нелинейных моделей теории солитонов, которые содержатся в нелокально редуцированной иерархии Кадомцева-Петвиашвили. Сравниваются соответствующие классы точных решений, полученные при помощи как классических, так и бинарных преобразований Дарбу. Установлена явная связь на уровне соответствующих операторов бинарных преобразований между эрмитовой и $\mathcal{D}$-эрмитовой иерархиями Кадомцева-Петвиашвили.

Вступ. У статті [1] досліджувалася нескінченна послідовність нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними, так звана ієрархія Кадомцева-Петвіашвілі (КП, KP) з нелокальними в'язями. Для відповідних інтегровних рівнянь Лакса-Захарова-Шабата та їх $(2+1)$-вимірних узагальнень (див. також [2]) знайдено широкі класи точних розв'язків методом одягаючих перетворень. При цьому в ролі одягаючого оператора ми використовували оператор класичних перетворень Дарбу. Ієрархію КП з нелокальними в'язями введено вперше у статтях [3–7], а її багатокомпонентне (векторне) узагальнення у [8, 9]. Серед відповідних інтегровних систем з цієї ієрархії міститься значна частина як відомих раніше моделей, так і їх узагальнення. Однак найбільш цікаві з точки зору фізичних застосувань системи рівнянь теорії солітонів (нелінійні рівняння Шредінгера, модифіковані рівняння Кортевега-де Вріза, модель Яджими-Ойкави та

2000 *Mathematics Subject Classification:* 33Q58, 37K10, 37K15.

інші) не підпадають, безпосередньо, під методи статей [1, 2]. Ці системи отримуються після накладання додаткових редукцій типу ермітового спряження, які, зокрема, не досліджувалися в [1, 2] при інтегруванні загальної ієрархії КП. Усунення цієї прогалини є одним із завдань, які ставлять перед собою автори у цій статті.

Добре відомо, що оператори перетворень (в усякому випадку, в класичному варіанті методу оберненої задачі розсіяння) виникають при факторизації оператора розсіяння ([10–15]) для лінійної задачі Лакса, асоційованої з досліджуваною нелінійною інтегровною системою. Задача факторизації зводиться до дослідження інтегральних рівнянь Гельфанда-Левітана-Марченко, або матричної задачі Рімана. При побудові точних розв'язків солітонних систем важливу роль відіграють "алгебризовані" методи, найбільш відомими серед яких є метод одягання Захарова-Шабата ([12, 13, 15]), метод В. А. Марченка ([16]), теорія Сато-Вільсона (див., наприклад, [17, 18]), а також метод перетворень Дарбу-Крама-Матвєєва ([19–23]). Узагальнення перетворень Дарбу як класичного типу ([19–26]), так і бінарного ([22, 27–34]), проведено у статті [35] для лінійних еволюційних операторів довільної матричної розмірності. Важливим аналітичним проблемам, що пов'язані з методом бінарних перетворень Беклунда-Дарбу і різними версіями методу оберненої задачі, присвячено статті [29, 36–38].

У цій статті ми досліджуємо можливість застосувань різних версій перетворень Дарбу для побудови точних розв'язків ієрархії КП з нелокальними в'язями — k-cKP ("k-constrained Kadomtsev-Petviashvili hierarchy") при накладанні додаткової редукції ермітового спряження, яку ми далі скорочено називатимемо Hk-cKP ("Hermitian k-cKP hierarchy").

Статтю побудовано у наступний спосіб. Перший розділ є вступним, в ньому коротко наводяться необхідні надалі відомі поняття і позначення у зручній для читача формі, що дозволяє скоротити до мінімуму доведення всіх основних тверджень статті. При цьому ми намагалися (де це було можливим) зберігати позначення з [17, 1, 35, 2].

У розділі 2 наведено всі необхідні нам у цій статті означення, властивості і результати стосовно загальних класичних, інверсних і бінарних перетворень Дарбу в скалярному випадку. Основні результати цього розділу добре знайомі фахівцям. Проте, ми сформулювали їх так, щоб вони або взагалі не вимагали окремих доведень, або подані нами їх нові доведення займали значно менше місця, порівняно з оригінальними. Особливо це стосується методу знаходження оператора загальних бінарних перетворень у явному вигляді (формули (7)–(18)).

Основні результати статті містяться в розділі 3 (теореми 7-12 і відповідні наслідки з них) і розділі 4 (теорема 14).

У заключній частині проводиться аналіз отриманих результатів, обговорюються питання, що залишилися відкритими, і перспективи подальших досліджень.

1. Вихідні положення.

1.1. Алгебра мікродиференціальних операторів ζ (алгебра формальних символів інтегродиференціальних операторів) та її властивості. Розглянемо над полем лінійний простір ζ мікродиференціальних операторів (МДО) (формальних символів ([17,18])) вигляду

$$L \in \zeta = \left\{ \sum_{i=-\infty}^{n(L)} a_i \mathcal{D}^i : \, i, n(L) \in \mathbb{Z} \right\}, \tag{1}$$

де коефіцієнти a_i є матричними $N \times N$-функціями "просторової" змінної $x = t_1$ і еволюційних параметрів t_2, t_3 .... Матричні коефіцієнти $a_i(t)$, $t = (t_1, t_2, \ldots)$, вважаються гладкими функціями векторної змінної t, яка має скінчену кількість компонент, і належать до деякого функціонального простору A, який є диференціальною алгеброю стосовно звичайних арифметичних дій, а оператор диференціювання $\mathcal{D} := \frac{\partial}{\partial x}$.

Операції додавання і множення операторів на скаляри (елементи поля $\mathbb{C}$) вводяться так

$$\lambda_1 L_1 \pm \lambda_2 L_2 = \sum_{i=-\infty}^{N_1} \lambda_1 a_{1i} \mathcal{D}^i \pm \sum_{i=-\infty}^{N_2} \lambda_2 a_{2i} \mathcal{D}^i = \sum_{i=-\infty}^{\max\{N_1,N_2\}} (\lambda_1 a_{1i} \pm \lambda_2 a_{2i}) \mathcal{D}^i, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}.$$

Структура алгебри Лі на лінійному просторі ζ (1) визначається комутатором Лі $[\cdot,\cdot] \colon \zeta \times \zeta \to \zeta$, $[L_1, L_2] = L_1 L_2 - L_2 L_1$, де композиція (операторне множення) МДО L_1 та L_2 індукується загальним правилом Лейбніца

$$\mathcal{D}^n f := \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} f^{(j)} \mathcal{D}^{n-j}, \tag{2}$$

$n \in \mathbb{Z}$, $f \in A \subset \zeta$, $f^{(j)} := \frac{\partial^j f}{\partial x^j} \in A \subset \zeta$, $\mathcal{D}^n \mathcal{D}^m = \mathcal{D}^m \mathcal{D}^n = \mathcal{D}^{n+m}$, $n, m \in \mathbb{Z}$, де $\binom{n}{j}$ — біномний коефіцієнт. Формула (2) задає композицію оператора $\mathcal{D}^n \in \zeta$ і оператора множення на функцію $f \in A \subset \zeta$ (як оператора нульового порядку) на відміну від позначення $\mathcal{D}^k\{f\} := \frac{\partial^k f}{\partial x^k} \in A$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Порядком оператора $L = \sum_{i=-\infty}^{n(L)} a_i \mathcal{D}^i$, де $a_{n(L)} \neq 0$, називається ціле число $n(L)$: $\operatorname{ord} L = n(L)$. Диференціальна і строго інтегральна частини МДО $S = \sum_{i=-\infty}^{n(S)} s_i \mathcal{D}^i$ визначаються рівностями

$$S = S_{\geq 0} + S_{<0},\ S_{\geq 0} = \sum_{i=0}^{n(S)} s_i \mathcal{D}^i,\ S_{<0} = \sum_{i=-\infty}^{-1} s_i \mathcal{D}^i, \tag{3}$$

а строго диференціальна та інтегральна частини МДО S:

$$S = S_{>0} + S_{\leq 0},\ S_{>0} = \sum_{i=1}^{n(S)} s_i \mathcal{D}^i,\ S_{\leq 0} = \sum_{i=-\infty}^{0} s_i \mathcal{D}^i. \tag{4}$$

Комутатор Лі: $\zeta^2 \ni (A, B) \to [A, B] := AB - BA \in \zeta$ задає на ζ структуру алгебри Лі. Формула (3) індукує розклад алгебри Лі ζ в лінійну суму підалгебр Лі диференціальних $\zeta_{\geq 0}$ і строго інтегральних $\zeta_{<0}$ операторів $\zeta = \zeta_{\geq 0} + \zeta_{<0}$, а формула (4) в лінійну суму підалгебр строго диференціальних $\zeta_{>0}$ і інтегральних $\zeta_{\leq 0}$ операторів $\zeta = \zeta_{>0} + \zeta_{\leq 0}$.

Скажемо, що оператор $L \in \zeta_{\geq 0}$ має канонічну форму (є канонічним), якщо виконується $L = \sum_{i=0}^{n(L)} a_i \mathcal{D}^i$ і $a_{n(L)} = \mathrm{const} \in \mathrm{Mat}_{N \times N}(\mathbb{C})$. Під символом $\varphi \mathcal{D}^{-1} \psi^\top \in \zeta$ у відповідності з правилом Лейбніца при $n = -1$ розуміємо формальний ряд

$$\varphi \mathcal{D}^{-1} \psi^\top = \varphi \psi^\top \mathcal{D}^{-1} - \varphi \psi_x^\top \mathcal{D}^{-2} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \varphi (\psi^{(i)})^\top \mathcal{D}^{-i-1}.$$

У статті використовуватимемо такі властивості МДО:

1. Асоціативність композиції: $L_1(L_2L_3) = (L_1L_2)L_3$.
2. Композиція диференціального $L \in \zeta_{\geq 0}$ і інтегрального операторів $\varphi\mathcal{D}^{-1}\psi^\top$ задовольняє рівність $L\varphi\mathcal{D}^{-1}\psi^\top = (L\varphi\mathcal{D}^{-1}\psi^\top)_{\geq 0} + L\{\varphi\}\mathcal{D}^{-1}\psi^\top$.
3. Композиція інтегрального $\varphi\mathcal{D}^{-1}\psi^\top$ і диференціального $L \in \zeta_{\geq 0}$ операторів задовольняє рівність $\varphi\mathcal{D}^{-1}\psi^\top L = (\varphi\mathcal{D}^{-1}\psi^\top L)_{\geq 0} + \varphi\mathcal{D}^{-1}(L^\tau\{\psi\})^\top$.
4. Нехай $\varphi_i \in \mathrm{Mat}_{N\times K_i}(\mathbb{C})$, $i \in \{1,2\}$, і $\psi_i \in \mathrm{Mat}_{N\times K_i}(\mathbb{C})$, $i \in \{1,2\}$ є матричними функціями змінної $x := t_1 \in \mathbb{R}$, $C = \mathrm{const} \in \mathrm{Mat}_{K_1\times K_2}(\mathbb{C})$ і $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Тоді

$$\varphi_1\mathcal{D}^{-1}\psi_1^\top\varphi_2\mathcal{D}^{-1}\psi_2^\top = \varphi_1\mathcal{D}^{-1}\left\{\psi_1^\top\varphi_2\right\}\mathcal{D}^{-1}\psi_2^\top - \varphi_1\mathcal{D}^{-1}\left[\mathcal{D}^{-1}\left\{\psi_1^\top\varphi_2\right\}\right].$$

У цій формулі (і всюди далі) символом $\mathcal{D}^{-1}\{f\}$ позначено первісну (потенціал) функції, у фігурних дужках стосовно змінної $x \in \mathbb{R}$.

Нехай $\alpha_n \in \mathbb{C}$, $\mathcal{I} \ni t_n$ — еволюційний параметр з деякої множини параметрів $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$; $n \in \mathbb{N}$, $\partial_{t_n} := \frac{\partial}{\partial t_n}$ — оператор диференціювання; $\partial_{t_n} f := f\partial_{t_n} + f_{t_n} = f\partial_{t_n} + \frac{\partial f}{\partial t_n}$, $\partial_{t_n}\{f\} := \frac{\partial f}{\partial t_n}$, $\partial_{t_n}\mathcal{D}^j = \mathcal{D}^j\partial_{t_n}$. Позначимо через E елемент центру алгебри ζ. Розглянемо мультиплікативно-замкнене розширення $\hat{\zeta}$ алгебри Лі ζ, реалізоване так:

$$\hat{\zeta} \ni (\alpha_n; S) := \alpha_n E\partial_{t_n} - S = \alpha_n E\partial_{t_n} - \sum_{i=-\infty}^{n(S)} s_i\mathcal{D}^i,$$
$$[(\alpha_n; A), (\alpha_m; B)] := (0; \alpha_m E A_{t_m} - \alpha_n E B_{t_n} + [A, B]) \in \hat{\zeta}.$$

Отже, елементами множини $\hat{\zeta}$ є еволюційні інтегродиференціальні оператори вигляду $\hat{\zeta} \ni L = \alpha_n E\partial_{t_n} - \sum_{i=-\infty}^{n(L)} u_i\mathcal{D}^i$, $\hat{\zeta}_{\geq 0} \ni L_{\geq 0} = \alpha_n E\partial_{t_n} - \sum_{i=0}^{n(L)} u_i\mathcal{D}^i$, $\hat{\zeta}_{\leq 0} = \zeta_{\leq 0}$, а сама множина $\hat{\zeta}$ є мультиплікативно-замкненою (стосовно операції Лі) підмножиною деякого центрального розширення алгебри Лі ζ, побудованого у статті [39].

Ермітово-спряжений оператор L^* має вигляд: $L^* := -\bar{\alpha}_n E^*\partial_{t_n} - \sum_{i=-\infty}^{n(L)}(-1)^i\mathcal{D}^i a_i^*$, де $a_i^* = \bar{a}^\top$. Транспонований оператор L^τ і оператор L^* задовольняють співвідношення $L^* = \bar{L}^\tau$.

1.2. Елементарні перетворення Дарбу. Далі ми розглядаємо скалярний випадок множини $\hat{\zeta}$, тобто коефіцієнти a_i мікродиференціальних символів L (1) є скалярними функціями, а центр алгебри Лі ζ породжується тотожним відображення $E := 1$.

Означення. Нехай $\hat{\zeta} \ni L = \alpha\partial_\tau - \sum_{i=0}^{n(L)} u_i\mathcal{D}^i$, $u_i = u_i(x;\tau)$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $\tau \in \mathcal{I}$; $\varphi = \varphi(x;\tau)$ — фіксований, невироджений в деякій області $G_{(x,\tau)} \subset \mathbb{R}^2$ розв'язок лінійного еволюційного диференціального рівняння

$$L\{f\} = 0, \tag{5}$$

тобто $L\{\varphi\} = \alpha\varphi_\tau - \sum_{i=0}^{n(L)} u_i\varphi^{(i)} = 0$. Тоді оператор вигляду $W_e = \varphi\mathcal{D}\varphi^{-1}$ називатимемо *оператором елементарного перетворення Дарбу*: $W_e = \varphi\mathcal{D}\varphi^{-1} = \mathcal{D} - \varphi_x\varphi^{-1} \in \zeta_{\geq 0}$.

Означення. Перетворення вигляду: $(L; f) \to (\hat{L}; \hat{f}) := (W_e L W_e^{-1}; f_x - \varphi_x\varphi^{-1} f)$, де f — довільний розв'язок рівняння (5), називається *елементарним перетворенням Дарбу.*

Теорема 1. ([21]) *Нехай* $W_e[\varphi] := \varphi\mathcal{D}\varphi^{-1} = \mathcal{D} - \varphi_x\varphi^{-1}$. *Тоді:* 1) $\hat{L}[\varphi] := W_e[\varphi] L W_e^{-1}[\varphi] \in \hat{\zeta}_{\geq 0}$;   2) $\hat{L}[\varphi]\{\hat{f}\} = 0$.

1.3. Інверсні елементарні перетворення Дарбу.

Означення. Нехай $\psi = \psi(x;\tau)$ — фіксований, невироджений в деякій області $G_{(x,\tau)} \subset \mathbb{R}^2$ розв'язок диференціального рівняння $L^*\{g\} = 0$, де $L^* = -\bar{\alpha}\partial_\tau - \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\mathcal{D}^i a_i^*$, та $f = f(x,\tau)$ — довільний розв'язок рівняння $L\{f\} = 0$. Тоді оператор $W_{ei}[\psi] = (\psi\mathcal{D}\psi^{-1})^{*-1} = -\psi^{*-1}\mathcal{D}^{-1}\psi^*$ називається оператором інверсного елементарного перетворення Дарбу, а відображення

$$L \xrightarrow{W_{ei}[\psi]} \hat{L}[\psi] := W_{ei}[\psi]LW_{ei}^{-1}[\psi],\ f \longrightarrow \hat{f} := -\psi^{*-1}\mathcal{D}^{-1}\left\{\psi^* f\right\},$$

де $\mathcal{D}^{-1}\left\{\psi^* f\right\}$ — первісна функції $\psi^* f$, називається *інверсним елементарним перетворенням Дарбу.*

Розглянемо процес побудови інверсного перетворення Дарбу дещо детальніше, а саме:

$$L \xrightarrow{*} L^* \longrightarrow W_e[\psi]L^*W_e^{-1}[\psi] := \hat{L}^*[\psi] \xrightarrow{*} \hat{L}[\psi] = W_e^{*-1}[\psi]LW_e^*[\psi] := W_{ei}[\psi]LW_{ei}^{-1}[\psi],$$

звідки стає очевидною справедливість такого наслідку з теореми 1.

Наслідок. *Якщо f — довільна функція, яка належить до ядра оператора L ($f \in \operatorname{Ker} L$) $\Rightarrow$ функція $\hat{f} := W_{ei}[\psi]\{f\}$ є розв'язком рівняння $\hat{L}[\psi]\{\hat{f}\} = 0$, де $W_{ei}[\psi]\{f\} = -\psi^{*-1}\mathcal{D}^{-1}\left\{\psi^* f\right\}$.*

1.4. Бінарні елементарні перетворення Дарбу. Нехай $\varphi = \varphi(x;\tau)$ та $\psi = \psi(x;\tau)$ – розв'язки диференціальних рівнянь $L\{f\} = 0$ та $L^*\{g\} = 0$ відповідно.

Теорема 2. *Композиція прямого й інверсного перетворення Дарбу комутативна, тобто нехай*

$$L \xrightarrow{W_e[\varphi]} \hat{L}[\varphi] := W_e[\varphi]LW_e^{-1}[\varphi] \xrightarrow{W_{ei}[\Psi]} \hat{L}[\varphi,\psi] := W_{ei}[\Psi]W_e[\varphi]LW_e^{-1}[\varphi]W_{ei}^{-1}[\Psi] := W_1LW_1^{-1},$$

де $\Psi := W_e^{*-1}[\varphi]\{\psi\} = -(\varphi^{*-1}\mathcal{D}^{-1}\varphi^*)\{\psi\} = -\varphi^{*-1}\mathcal{D}^{-1}\{\varphi^*\psi\}$ *та*

$$L \xrightarrow{W_{ei}[\psi]} \hat{L}[\psi] := W_{ei}[\psi]LW_{ei}^{-1}[\psi] \xrightarrow{W_e[\Phi]} \hat{L}[\psi,\varphi] := W_e[\Phi]W_{ei}[\psi]LW_{ei}^{-1}[\psi]W_e^{-1}[\Phi] := W_2LW_2^{-1},$$

де $\Phi := W_{ei}[\psi]\{\varphi\} = -\psi^{*-1}\mathcal{D}^{-1}\{\psi^*\varphi\}$. *Тоді* $W_1 = W_2$ *(відповідно* $\hat{L}[\varphi,\psi] = \hat{L}[\psi,\varphi]$*).*

Доведення полягає у формальній перевірці того, що $W_1 = W_{ei}[\Psi]W_e[\varphi]$ і $W_2 = W_e[\Phi]W_{ei}[\psi]$ збігаються: $W_1 = W_2 = -I + \varphi(\mathcal{D}^{-1}\{\psi^*\varphi\})^{-1}\mathcal{D}^{-1}\psi^*$.

Означення. Оператори W_1 (W_2) називаються *операторами (елементарних) бінарних перетворень Дарбу.*

2. Оператори перетворень для лінійних еволюційних диференціальних рівнянь.

2.1. Загальні перетворення Дарбу (скалярний випадок $N = 1$).

Означення. Нехай $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_K)$ — фіксований вектор лінійно незалежних розв'язків, а f — довільний розв'язок рівняння $L\{f\} = 0$, тоді перетворення: $L \longrightarrow \hat{L}[\varphi] := W[\varphi]LW^{-1}[\varphi]$, $f \longrightarrow \hat{f} := W[\varphi]\{f\}$, де $W[\varphi]$ — диференціальний оператор K-го порядку з одиничним коефіцієнтом при старшому степені оператора диференціювання $\mathcal{D}^K$, однозначно визначений системою лінійних алгебраїчних рівнянь $W[\varphi]\{\varphi_i\} = 0$, називається *загальним (векторним) перетворенням Дарбу* лінійного еволюційного рівняння $L\{f\} = 0$.

Твердження. ([20])

$$W[\varphi] = \frac{1}{\mathcal{W}[\varphi]} \begin{vmatrix} \varphi_1 & \ldots & \varphi_K & 1 \\ \varphi_1' & \ldots & \varphi_K' & \mathcal{D} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_1^{(K)} & \ldots & \varphi_K^{(K)} & \mathcal{D}^K \end{vmatrix}, \quad \text{де} \ \ \mathcal{W}[\varphi] = |\hat{\varphi}| := \det \hat{\varphi}, \tag{6}$$

є визначником Вронського системи функцій φ; $\hat{\varphi}$ — відповідна матриця Вронського розміру $K \times K$, а під операторним визначником $W[\varphi]$ потрібно розуміти його розвинення за останнім стовпчиком, при цьому відповідні мінори записуються зліва від степенів оператора диференціювання $\mathcal{D}$.

Твердження. ([1]) $W^{-1}[\varphi] = \varphi \mathcal{D}^{-1} h^*$, де $h = (-1)^{K-1} e_K \hat{\varphi}^{*-1}$, $e_K = \underbrace{(0, \ldots, 0, 1)}_{K}$.

Теорема 3. ([20, 21, 1, 17, 24, 26, 35]) *Нехай $\hat{\zeta}_{\geq 0} \ni L = \alpha \partial_\tau - L_{\geq 0}$, де $L_{\geq 0} = \sum_{i=0}^{n} u_i \mathcal{D}^i \in \zeta_{\geq 0}$, тоді: 1) $\hat{L}[\varphi]\{\hat{f}\} = 0$; 2) Оператор $\hat{L}[\varphi] = \alpha \partial_\tau - \hat{L}_{\geq 0}[\varphi]$, $\hat{L}_{\geq 0}[\varphi] \in \zeta_{\geq 0}$.*

2.2. Загальні інверсні перетворення Дарбу ($N = 1$).

Означення. Нехай $\psi = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{K'})$ — фіксований вектор лінійно незалежних розв'язків рівняння $L^*\{g\} = 0$, а f — довільний розв'язок рівняння $L\{f\} = 0$, тоді перетворення:

1) $L \longrightarrow \hat{L}[\psi] := W_i[\psi] L W_i^{-1}[\psi]$, де $W_i[\psi] = W^{*-1}[\psi]$,

2) $f \longrightarrow \hat{f} := W_i[\psi]\{f\}$, де $W[\psi]$ — диференціальний оператор порядку K' з одиничним коефіцієнтом при старшому степені оператора диференціювання $\mathcal{D}^{K'}$, однозначно визначений системою лінійних алгебраїчних рівнянь $W[\psi]\{\psi_i\} = 0$, називається *загальним (векторним) інверсним перетворенням Дарбу* рівняння $L\{f\} = 0$.

Зауваження. Наслідком теореми 3 є рівність $\hat{L}[\psi] = \alpha \partial_\tau - \hat{L}_{\geq 0}[\psi]$, де $\hat{L}_{\geq 0}[\psi] \in \zeta_{\geq 0}$.

2.3. Загальні бінарні перетворення Дарбу.

Означення. Нехай $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_K)$, $\psi = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{K'})$ — векторні розв'язки лінійних диференціальних рівнянь $L\{f\} = 0$ і $L^*\{g\} = 0$ відповідно; K, $K' \in \mathbb{N}$. Тоді перетворення вигляду $f \longrightarrow \hat{f} := W^{*-1}[\Psi]W[\varphi]\{f\}$, $L \xrightarrow{W[\varphi]} \hat{L}[\varphi] := W[\varphi]LW^{-1}[\varphi] \xrightarrow{*} \hat{L}^*[\varphi] \xrightarrow{W[\Psi]} \hat{L}^*[\varphi, \psi] \xrightarrow{*} \hat{L}[\varphi, \psi] = W^{*-1}[\Psi]W[\varphi]LW^{-1}[\varphi]W^*[\Psi] := W[\varphi, \psi]LW^{-1}[\varphi, \psi]$, де $\Psi = W^{*-1}[\varphi]\{\psi\}$, називатимемо *загальним бінарним перетворенням Дарбу*, побудованим за функціями φ, ψ.

Оператори $W[\varphi]$ і $W[\psi]$ — це диференціальні оператори порядку K та K' відповідно: $W[\varphi]=\mathcal{D}^K+\omega_1\mathcal{D}^{K-1}+\dots+\omega_K$, $W[\psi]=\mathcal{D}^{K'}+w_1\mathcal{D}^{K'-1}+\dots+w_{K'}$, а коефіцієнти операторів $W[\varphi]$ і $W[\psi]$ ми знаходимо з систем лінійних алгебраїчних рівнянь: $W[\varphi]\{\varphi_i\}=0$; $i\in\{1,\dots,K\}$, і $W[\psi]\{\psi_i\}=0$; $i\in\{1,\dots,K'\}$, відповідно.

Згідно [20], оператори $W[\varphi]$ і $W[\psi]$ можна подати у вигляді (6).

Теорема 4. *Справедливі такі твердження:*

1) *функція $\hat{f}$ є розв'язком лінійного еволюційного рівняння $\hat{L}[\varphi,\psi]\{\hat{f}\}=0$;*
2) *$\hat{L}[\varphi,\psi]=\alpha\partial_\tau-\hat{L}_{\geq 0}[\varphi,\psi]$, де $\hat{L}_{\geq 0}[\varphi,\psi]\in\zeta_{\geq 0}$, тобто $\hat{L}_{\geq 0}[\varphi,\psi]=\sum_{i=0}^{n}\hat{u}_i\mathcal{D}^i$.*

Доведення отримується як наслідок з теореми 3.

Розглянемо більш детально дане загальне бінарне перетворення Дарбу і особливо важливий для застосувань випадок $K'=K$.

$$L\xrightarrow{W[\varphi]}\hat{L}[\varphi]:=W[\varphi]LW^{-1}[\varphi]\xrightarrow{\ *\ }\hat{L}^*[\varphi]\xrightarrow{W[\Psi]}\hat{L}^*[\varphi,\psi]\xrightarrow{\ *\ }\hat{L}[\varphi,\psi],$$

де $\Psi=(\Psi_1,\dots,\Psi_{K'})$:

$$L^*[\varphi]\,\{\Psi\}=0,\ \ \Psi=W^{*-1}[\varphi]\{\psi\}=-h\mathcal{D}^{-1}\{\varphi^*\psi\}. \tag{7}$$

$$\hat{L}[\varphi]:=W[\varphi]LW^{-1}[\varphi],\ \ \hat{L}[\varphi,\psi]=W^{*-1}[\Psi]W[\varphi]LW^{-1}[\varphi]W^*[\Psi],$$

а

$$W^{-1}[\Psi]:=\Psi\mathcal{D}^{-1}H^*, \tag{8}$$

$$W^{-1}[\varphi]=\varphi\mathcal{D}^{-1}h^*. \tag{9}$$

Позначимо

$$W[\varphi,\psi]=W^{*-1}[\Psi]W[\varphi]. \tag{10}$$

Підставивши (8) в (10), отримаємо

$$W[\varphi,\psi]=-H\mathcal{D}^{-1}\Psi^*W[\varphi]=(-H\mathcal{D}^{-1}\Psi^*W[\varphi])_{\geq 0}+(-H\mathcal{D}^{-1}[W^\tau[\varphi]\{\bar{\Psi}\}]^\top). \tag{11}$$

Знайдемо інтегральну частину $W[\varphi,\psi]$

$$W_{<0}[\varphi,\psi]=-H\mathcal{D}^{-1}[W^\tau[\varphi]\{\bar{\Psi}\}]^\top=-H\mathcal{D}^{-1}[\overline{\overline{W^\tau[\varphi]\,\{\bar{\Psi}\}}}]^\top=-H\mathcal{D}^{-1}[\overline{W^*[\varphi]\,\{\Psi\}}]^\top=$$
$$=-H\mathcal{D}^{-1}[W^*[\varphi]\{\Psi\}]^*=-H\mathcal{D}^{-1}[W^*[\varphi]W^{*-1}[\varphi]\{\psi\}]^*=-H\mathcal{D}^{-1}\psi^*. \tag{12}$$

З формули (9) маємо

$$W^{-1}[\varphi]=\varphi\mathcal{D}^{-1}h^*=\varphi h^*\mathcal{D}^{-1}-\varphi h^{*'}\mathcal{D}^{-2}+\dots+(-1)^{(K-1)}\varphi h^{*(K-1)}\mathcal{D}^{-K}+\dots\ .$$

Використовуючи співвідношення $W[\varphi]W^{-1}[\varphi]=W^{-1}[\varphi]W[\varphi]=I$ і те, що $W[\varphi]$ — диференціальний оператор K-го порядку, отримаємо:

$$\left\{\begin{array}{l}\varphi h^*=0,\\ \varphi(h^*)'=0,\\ ....\\ \varphi h^{*(K-2)}=0,\\ \varphi h^{*(K-1)}=(-1)^{K-1}.\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\varphi h^*=0,\\ \varphi' h^*=0,\\ ....\\ \varphi^{(K-2)}h^*=0,\\ \varphi^{(K-1)}h^*=1.\end{array}\right. \tag{13}$$

З першої системи рівнянь (13) отримуємо, що

$$e_K \hat{h}^{*-1} = (-1)^{K-1}\varphi, \tag{14}$$

де $e_K = \underbrace{(0,\,0,\,\ldots,\,0,\,1)}_{K}$, $\hat{h}$ — матриця Вронського системи функцій $h = (h_1, \ldots, h_K)$. З другої системи рівнянь (13) маємо: $h^* = \hat{\varphi}^{-1} e_K^\top \;\Rightarrow\; h = e_K(\hat{\varphi}^{-1})^*$. Подібно знаходимо рівняння для H

$$\hat{\Psi} H^* = e_{K'}^\top,\; e_{K'} = \underbrace{(0,\,0,\,\ldots,\,0,\,1)}_{K'};\; H\hat{\Psi}^* = e_{K'} \;\Rightarrow\; H = e_{K'}(\hat{\Psi}^*)^{-1}, \tag{15}$$

де $\hat{\Psi}$ — матриця Вронського, побудована за вектор-функцією Ψ. З формули (7), використовуючи рівняння (13), отримуємо

$$\Psi^* = -\mathcal{D}^{-1}\{\psi^*\varphi\}h^*,\; \Psi^{*'} = -\mathcal{D}^{-1}\{\psi^*\varphi\}h^{*'}, \ldots, \Psi^{*(K'-1)} = -\mathcal{D}^{-1}\{\psi^*\varphi\}h^{*(K'-1)},$$

$$\Psi^{*(K')} = (-1)^{K'}\psi^* - \mathcal{D}^{-1}\{\psi^*\varphi\}h^{*(K')},\; \Psi^{*(K'+1)} = (-1)^{K'}\psi^{*'} - \psi^*\varphi h^{*(K')} - \mathcal{D}^{-1}\{\psi^*\varphi\}h^{*(K'+1)}.$$

Нехай $K' = K$, тоді отримаємо $\hat{\Psi}^* = -\mathcal{D}^{-1}\{\psi^*\varphi\}\hat{h}^*$.

З формули (15) випливає, що $H = -e_K\left[\mathcal{D}^{-1}\{\psi^*\varphi\}\hat{h}^*\right]^{-1} = -e_K\hat{h}^{*-1}[\mathcal{D}^{-1}\{\psi^*\varphi\}]^{-1}$, а використовуючи формулу (14), отримуємо $H = (-1)^K\varphi[\mathcal{D}^{-1}\{\psi^*\varphi\}]^{-1}$. Підставимо отриманий результат в формулу (12)

$$W_{<0}[\varphi,\psi] = -H\mathcal{D}^{-1}\psi^* = -(-1)^K\varphi(\mathcal{D}^{-1}\{\psi^*\varphi\})^{-1}\mathcal{D}^{-1}\psi^*. \tag{16}$$

Щоб знайти диференціальну частину оператора $W[\varphi,\psi]$ (11) (при $K' = K$) виконаємо таке його перетворення:

$$\begin{gathered}
W[\varphi,\psi] = -H\mathcal{D}^{-1}\Psi^* W[\varphi] = H\mathcal{D}^{-1}[\mathcal{D}^{-1}\{\psi^*\varphi\}]h^*W[\varphi] = \\
= (-1)^K\varphi[\mathcal{D}^{-1}\{\psi^*\varphi\}]^{-1}\mathcal{D}^{-1}[\mathcal{D}^{-1}\{\psi^*\varphi\}]h^*W[\varphi] = \\
= (-1)^K\left[\varphi[\mathcal{D}^{-1}\{\psi^*\varphi\}]^{-1}\left([\mathcal{D}^{-1}\{\psi^*\varphi\}]h^*\mathcal{D}^{-1} - ([\mathcal{D}^{-1}\{\psi^*\varphi\}]h^*)_x\mathcal{D}^{-2} + \ldots\right.\right. \\
\left.\left.\cdots + (-1)^{K-1}([\mathcal{D}^{-1}\{\psi^*\varphi\}]h^*)^{(K-1)}\mathcal{D}^{-K} + \ldots.\right)\right]W[\varphi] = \\
= (-1)^K[\varphi h^*\mathcal{D}^{-1} - \varphi h'^*\mathcal{D}^{-2} - \varphi[\mathcal{D}^{-1}\{\psi^*\varphi\}]^{-1}\psi^*\varphi h^*\mathcal{D}^{-2} + \ldots \\
+(-1)^{K-1}\varphi h^{*(K-1)}\mathcal{D}^{-K} + (-1)^{K-1}\varphi[\mathcal{D}^{-1}\{\psi^*\varphi\}]^{-1}(\psi^*\varphi)^{(K-2)}h^*\mathcal{D}^{-K} + \ldots]W[\varphi] = \\
= (-1)^K[(-1)^{K-1}\varphi h^{*(K-1)}\mathcal{D}^{-K} + \ldots]W[\varphi].
\end{gathered}$$

В ланцюжку попередніх перетворень ми скористалися формулою

$$\mathcal{D}^{-1}\left[\mathcal{D}^{-1}\{\psi^*\varphi\}\right]h^* = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\left(\left[\mathcal{D}^{-1}\{\psi^*\varphi\}\right]h^*\right)^{(j)}\mathcal{D}^{-j-1},$$

яка є простим наслідком правила Лейбніца (2), а також формулами (11) та (13).

Оскільки $W[\varphi]$ — диференціальний оператор K-го порядку, у відповідністю з формулою (13) отримаємо

$$W_{\geq 0}[\varphi,\psi] = (-1)^K[[(-1)^{K-1}\varphi h^{*(K-1)}\mathcal{D}^{-K} + \ldots]W[\varphi]]_{\geq 0} =$$

$$= (-1)^K(-1)^{K-1}\varphi h^{*(K-1)}\mathcal{D}^{-K}\mathcal{D}^K = (-1)^K(-1)^{K-1}(-1)^{K-1} = (-1)^K I.$$

Отже,

$$W_{\geq 0}[\varphi,\psi] = (-1)^K I. \tag{17}$$

З формул (16) і (17) одержуємо, що

$$W[\varphi,\psi] = (-1)^K[I - \varphi(\mathcal{D}^{-1}\{\psi^*\varphi\})^{-1}\mathcal{D}^{-1}\psi^*]. \tag{18}$$

Дамо інше означення загального бінарного перетворення.

Означення. Нехай $\varphi = (\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_K)$, $\psi = (\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_{K'})$ — векторні розв'язки лінійних диференціальних рівнянь $L\{f\} = 0$ і $L^*\{g\} = 0$ відповідно; K, $K' \in \mathbb{N}$. Тоді перетворення вигляду

1) $f \longrightarrow \hat{f} := W[\Phi]W^{*-1}[\psi]\{f\}$, де $\Phi = W^{*-1}[\psi]\{\varphi\}$;

2) $L \xrightarrow{*} L^* \xrightarrow{W[\psi]} \hat{L}^*[\psi] := W[\psi]L^*W^{-1}[\psi] \xrightarrow{*} \hat{L}[\psi] \xrightarrow{W[\Phi]} \hat{L}[\psi,\varphi] :=$
$= W[\Phi]W^{*-1}[\psi]LW^*[\psi]W^{-1}[\Phi] := W[\psi,\varphi]LW^{-1}[\psi,\varphi]$,

називатимемо *загальним бінарним перетворенням Дарбу*, побудованим за функціями ψ, φ.

Теорема 5. *Справедливі такі твердження:*

1) функція $\hat{f}$ є розв'язком лінійного еволюційного рівняння $\hat{L}[\psi,\varphi]\{\hat{f}\} = 0$,

2) $\hat{L}[\psi,\varphi] = \alpha\partial_\tau - \hat{L}_{\geq 0}[\psi,\varphi]$, де $\hat{L}_{\geq 0}[\psi,\varphi] \in \zeta_{\geq 0}$.

Твердження теореми 5 є наслідком теореми 3.

Теорема 6. *Композиція загального прямого й інверсного перетворення Дарбу комутативна, тобто $\hat{L}[\varphi,\psi] = \hat{L}[\psi,\varphi]$.*

Твердження теореми 6 є наслідком теореми 2.

Лема. ([35,32]) *Якщо $W = I - K_2$, де $K_2 = \tilde{\Phi}\mathcal{D}^{-1}\psi^* = \varphi(C + \mathcal{D}^{-1}\{\psi^*\varphi\})^{-1}\mathcal{D}^{-1}\psi^*$, тоді $W^{-1} = I + K_1$, де $K_1 = \varphi\mathcal{D}^{-1}\tilde{\Psi}^* = \varphi\mathcal{D}^{-1}(C + \mathcal{D}^{-1}\{\psi^*\varphi\})^{-1}\psi^*$, тобто $WW^{-1} = W^{-1}W = I$.*

Доведення. Використовуючи останню (четверту) з наведених в розділі 1.1 властивостей МДО, отримуємо

$$WW^{-1} = (I - K_2)(I + K_1) = I - K_2 + K_1 - K_2K_1 = I - K_2 + K_1 -$$

$$-\varphi(C + \mathcal{D}^{-1}\{\psi^*\varphi\})^{-1}(C + \mathcal{D}^{-1}\{\psi^*\varphi\} - C)\mathcal{D}^{-1}\tilde{\Psi}^* +$$

$$+\varphi(C + \mathcal{D}^{-1}\{\psi^*\varphi\})^{-1}\mathcal{D}^{-1}(C + \mathcal{D}^{-1}\{\psi^*\varphi\} - C)(C + \mathcal{D}^{-1}\{\psi^*\varphi\})^{-1}\psi^* =$$

$$= I - K_2 + K_1 - \varphi\mathcal{D}^{-1}\tilde{\Psi}^* + \tilde{\Phi}C\mathcal{D}^{-1}\tilde{\Psi}^* + \tilde{\Phi}\mathcal{D}^{-1}\psi^* - \tilde{\Phi}\mathcal{D}^{-1}C\tilde{\Psi}^* = I.$$

Лему доведено. □

Зауваження. З теореми 6 випливає, що при $K' = K$

$$W[\psi,\varphi] = (-1)^K(I - \varphi(C + \mathcal{D}^{-1}\{\psi^*\varphi\})^{-1}\mathcal{D}^{-1}\psi^*) = W[\varphi,\psi].$$

3. Застосування перетворень Дарбу для інтегрування нелінійних еволюційних систем з інтегродиференціальним зображенням Лакса.

3.1. Ієрархія Кадомцева-Петвіашвілі з нелокальними в'язями. Скалярна інтегровна ієрархія рівнянь Кадомцева-Петвіашвілі (КП-ієрархія) може бути зображена у вигляді двох послідовностей сумісних лінійних рівнянь

$$f_{t_n} = B_n \{f\}, \; g_{t_n} = -B_n^{\tau} \{g\}; \; n \in \mathbb{N}, \; t_1 := x, \; t_2 := y, \; t_3 := t, \; \ldots \tag{19}$$

з нескінченною ієрархією операторів $B_n := (L_{KP}^n)_+$, де індекс „+" означає проекцію інтегродиференціального оператора Лакса

$$L := L_{KP} = \mathcal{D} + \sum_{i=1}^{\infty} U_i \mathcal{D}^{-i} \tag{20}$$

на підалгебру Лі диференціальних операторів $\zeta_+ := \zeta_{\geq 0}$, а B_n^{τ} є транспонованим оператором. Перші оператори послідовності B_n мають вигляд: $B_1 = \mathcal{D}$, $B_2 = \mathcal{D}^2 + 2U_1$, $B_3 = \mathcal{D}^3 + 3U_1\mathcal{D} + 3U_{1x} + U_2$.

Комутативність Лаксових потоків

$$L_{t_n} = [B_n, L], \quad n \in \mathbb{N}, \tag{21}$$

рівносильна до умов сумісності для кожної з двох послідовностей (19), а саме

$$B_{n,t_k} - B_{k,t_n} + [B_n, B_k] = 0, \;\; B_{n,t_k}^{\tau} - B_{k,t_n}^{\tau} - [B_n^{\tau}, B_k^{\tau}] = 0. \tag{22}$$

Рівняння Лакса (21) при $n = 2$ дозволяє виразити всі коефіцієнти МДО (20) в термінах єдиної польової змінної $u := U_1$, а саме

$$U_2 = -\frac{1}{2}u_x + \frac{1}{2}\mathcal{D}^{-1}\{u_y\}, \; U_3 = \frac{1}{4}u_{xx} - \frac{1}{2}u_y - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{4}\mathcal{D}^{-2}\{u_{yy}\}, \ldots, \; \mathcal{D}^{-1}\{f\} := \int^x f(s)\, ds,$$

що, в свою чергу, дозволяє записати всі рівняння з ієрархії КП (21) при $n > 2$ в термінах цього одного поля u. Так, при $n = 3$ операторне рівняння Лакса (21) рівносильне до нелінійного рівняння з частинними похідними вигляду

$$4u_{t_3} = u_{xxx} + 12uu_x + 3\mathcal{D}^{-1}\{u_{yy}\}, \tag{23}$$

яке отримане в статті Кадомцева-Петвіашвілі [40], що і дало назву всій ієрархії рівнянь (21). Рівняння (22) при $n = 2$, $k = 3$ є зображенням Захарова-Шабата ([12,13]) для рівняння КП (23), яке ще називають рівнянням КП-1 (КП-2 визначається заміною $y \to iy$, $i^2 = -1$).

Означення. Розв'язки рівнянь (19) називатимемо *власними функціями* і *спряженими власними функціями* ієрархії КП відповідно.

Враховуючи той факт, що "квадрати" (білінійні форми) власних функцій $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_l)$ і спряжених власних функцій $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_l)$ ($\mathbf{q}_{t_n} = B_n\{\mathbf{q}\}$, $\mathbf{r}_{t_n} = -B_n^{\tau}\{\mathbf{r}\}$) (див. (19)), є генераторами симетрій ієрархій КП ([3]), у статтях [3–9] введено поняття так званих симетрійних редукцій ієрархії КП.

Означення. *k-симетрійно редукованою ієрархією* КП (k-cKP – "k-constrained Kadomtsev-Petviashvili hierarchy") називається звичайна ієрархія КП (21), якщо оператор Лакса $L_{KP} := L$ (20) задовольняє додаткове обмеження (нелокальній в'язі)

$$\left(L^k\right)_- = \mathbf{q}\mathcal{M}\mathcal{D}^{-1}\mathbf{r}^\top = \sum_{i,j=1}^{l} q_i\mathcal{M}_{ij}\mathcal{D}^{-1}r_j^\top, \tag{24}$$

де $\mathcal{M} = (\mathcal{M}_{ij})$ — стала комплексна $(l \times l)$ матриця, $k \in \mathbb{N}$.

Наслідком редукційного обмеження (24) є можливість подати ієрархію рівнянь (21) у вигляді $L_{t_n} = [B_n, L]$, $L := L_{k-cKP} = L^k_{KP} = \mathcal{D}^k + \sum\limits_{i=0}^{k-2} u_i\mathcal{D}^i + \mathbf{q}\mathcal{M}\mathcal{D}^{-1}\mathbf{r}^\top$, що є умовою сумісності лінійної системи

$$L\{f\} = \lambda f,\ M\{f\} = 0,\ M := \partial_{t_n} - B_n,\ B_n := \left(L^{\frac{n}{k}}\right)_+, n \in \{2, 3, \dots\}. \tag{25}$$

Функціональні коефіцієнти u_i, $i \in \{0, 1, \dots, k-2\}$, згідно з (20), (24) є диференціальними поліномами за польовими змінними $u := U_1,\ U_2,\ \dots,\ U_{k-1}$, а коефіцієнти U_n, $n \geq k$ оператора L_{KP} (20) є диференціальними поліномами стосовно власних і спряжених власних функцій $\mathbf{q}$ та $\mathbf{r}$.

В термінах нових незалежних змінних u_i, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$; $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$, операторні рівняння Лакса (25) рівносильні до відповідних (взагалі кажучи, нелінійних) замкнених (1+1)-вимірних еволюційних систем рівнянь з частинними похідними стосовно змінних $x := t_1$ (просторової змінної) та t_n (еволюційний параметр). Деякі з них (випадки $k \in \{1, 2, 3\}$, $n \in \{2, 3\}$) наведено в наступному підрозділі.

3.2. Нелінійні моделі ієрархії КП з нелокальними в'язями та їх редукції.

I. $k = 1$, $n = 2$. $L := L_1 = \mathcal{D} + \mathbf{q}\mathcal{M}\mathcal{D}^{-1}\mathbf{r}^\top$, $\quad M := M_2 = \alpha_2\partial_{t_2} - \mathcal{D}^2 - 2\mathbf{q}\mathcal{M}\mathbf{r}^\top$.

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_2\mathbf{q}_{t_2} = \mathbf{q}_{xx} + 2\left(\mathbf{q}\mathcal{M}\mathbf{r}^\top\right)\mathbf{q}, \\ \alpha_2\mathbf{r}_{t_2} = -\mathbf{r}_{xx} - 2\left(\mathbf{r}\mathcal{M}^\top\mathbf{q}^\top\right)\mathbf{r}. \end{array}\right. \tag{26}$$

При накладанні на оператори L та M додаткових обмежень (редукцій) вигляду $L^* = -L$ ($\mathbf{r} = \bar{\mathbf{q}},\ \mathcal{M}^* = \mathcal{M}$); $M^* = M$ ($\alpha_2 \in i\mathbf{R}$) система (26) набуває вигляду

$$i\mathbf{q}_y = \mathbf{q}_{xx} + 2\left(\mathbf{q}\mathcal{M}\mathbf{q}^*\right)\mathbf{q}; \quad \alpha_2 := i,\ \ t_2 := y. \tag{27}$$

$k = 1$, $n = 3$. $L := L_1 = \mathcal{D} + \mathbf{q}\mathcal{M}\mathcal{D}^{-1}\mathbf{r}^\top$; $\quad M := M_3 = \alpha_3\partial_{t_3} - \mathcal{D}^3 - 3\mathbf{q}\mathcal{M}\mathbf{r}^\top\mathcal{D} - 3\left(\mathbf{q}_x\mathcal{M}\mathbf{r}^\top\right)$.

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_3\mathbf{q}_{t_3} = \mathbf{q}_{xxx} + 3\left(\mathbf{q}\mathcal{M}\mathbf{r}^\top\right)\mathbf{q}_x + 3\left(\mathbf{q}_x\mathcal{M}\mathbf{r}^\top\right)\mathbf{q}, \\ \alpha_3\mathbf{r}_{t_3} = \mathbf{r}_{xxx} + 3\left(\mathbf{r}\mathcal{M}^\top\mathbf{q}^\top\right)\mathbf{r}_x + 3\left(\mathbf{r}_x\mathcal{M}^\top\mathbf{q}^\top\right)\mathbf{r}. \end{array}\right. \tag{28}$$

При редукції $L^* = -L$ ($\mathbf{r} = \bar{\mathbf{q}}, \mathcal{M}^* = \mathcal{M}$); $M^* = -M$ ($\alpha_3 \in \mathbb{R}$), поклавши $\alpha_3 := 1$, $t_3 := t$, отримаємо

$$\mathbf{q}_t = \mathbf{q}_{xxx} + 3\left(\mathbf{q}\mathcal{M}\mathbf{q}^*\right)\mathbf{q}_x + 3\left(\mathbf{q}_x\mathcal{M}\mathbf{q}^*\right)\mathbf{q}. \tag{29}$$

У скалярному випадку ($l = 1, \mathbf{q} = q(x,t)$ — скалярна функція) рівняння (29) запишеться так

$$q_t = q_{xxx} + 6\mu\left|q\right|^2 q_x, \quad \mathcal{M} := \mu \in \mathbb{R}. \tag{30}$$

У дійсному випадку $\mathbf{q} = \bar{\mathbf{q}}$ отримаємо дійсні версії рівнянь (29)–(30):

$$\mathbf{q}_t = \mathbf{q}_{xxx} + 3\left(\mathbf{q}\mathcal{M}\mathbf{q}^\top\right)\mathbf{q}_x + 3\left(\mathbf{q}_x\mathcal{M}\mathbf{q}^\top\right)\mathbf{q}, \tag{31}$$

та, відповідно, скалярний випадок

$$q_t = q_{xxx} + 6\mu q^2 q_x. \tag{32}$$

Зауваження. Система нелінійних еволюційних рівнянь (26) (в скалярному випадку) називається системою АКНС [15] (Абловіц-Кауп-Ньюел-Сігур), рівняння (27) є векторним (багатокомпонентним) узагальненням нелінійного рівняння Шредінгера (НРШ) [41]. Системи (28)–(29) є, відповідно, їх “вищими” симетріями. Рівняння (30) є відомим комплексним модифікованим рівнянням Кортевега-де Вріза (mKdV), в зв’язку з чим система (29) може трактуватися як його векторне узагальнення. Рівняння (32) є звичайним рівнянням mKdV, а (31) є його векторним узагальненням.

II. $k = 2$, $n = 2$. $L := L_2 = \mathcal{D}^2 + 2u + \mathbf{q}\mathcal{M}\mathcal{D}^{-1}\mathbf{r}^\top$; $M := M_2 = \alpha_2\partial_{t_2} - \mathcal{D}^2 - 2u$.

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_2\mathbf{q}_{t_2} = \mathbf{q}_{xx} + 2u\mathbf{q}, \\ \alpha_2\mathbf{r}_{t_2} = -\mathbf{r}_{xx} - 2u\mathbf{r}, \\ \alpha_2 u_{t_2} = \left(\mathbf{q}\mathcal{M}\mathbf{r}^\top\right)_x. \end{array}\right. \tag{33}$$

При редукції $L^* = L$ ($\mathbf{r} = \bar{\mathbf{q}}, \mathcal{M}^* = -\mathcal{M}$, u — дійсна функція); $M^* = M$ ($\alpha_2 \in i\mathbb{R}$) система (33) запишеться у вигляді

$$\left\{\begin{array}{l} i\mathbf{q}_y = \mathbf{q}_{xx} + 2u\mathbf{q}, \\ u_y = -i\left(\mathbf{q}\mathcal{M}\mathbf{q}^*\right)_x, \end{array}\right. \quad y := t_2. \tag{34}$$

Система (34) є багатокомпонентним узагальненням моделі Яджими-Ойкави (35) ([42]). При $l = 1$ (скалярний випадок) і $\mathcal{M} := i\mu$, $\mu \in \mathbb{R}$ отримаємо рівняння Яджими-Ойкави

$$\left\{\begin{array}{l} iq_y = q_{xx} + 2uq, \\ u_y = \mu\left|q\right|_x^2. \end{array}\right. \tag{35}$$

$k = 2$, $n = 3$. $L := L_2 = \mathcal{D}^2 + 2u + \mathbf{q}\mathcal{M}\mathcal{D}^{-1}\mathbf{r}^\top$; $M := M_3 = \alpha_3\partial_{t_3} - \mathcal{D}^3 - 3u\mathcal{D} - \frac{3}{2}u_x - \frac{3}{2}\mathbf{q}\mathcal{M}\mathbf{r}^\top$.

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_3\mathbf{q}_{t_3} = \mathbf{q}_{xxx} + 3u\mathbf{q}_x + \frac{3}{2}u_x\mathbf{q} + \frac{3}{2}\mathbf{q}\mathcal{M}\mathbf{r}^\top\mathbf{q}, \\ \alpha_3\mathbf{r}_{t_3} = \mathbf{r}_{xxx} + 3u\mathbf{r}_x + \frac{3}{2}u_x\mathbf{r} - \frac{3}{2}\mathbf{q}\mathcal{M}\mathbf{r}^\top\mathbf{r}, \\ \alpha_3 u_{t_3} = \frac{1}{4}u_{xxx} + 3uu_x + \frac{3}{4}\left(\mathbf{q}_x\mathcal{M}\mathbf{r}^\top - \mathbf{q}\mathcal{M}\mathbf{r}_x^\top\right)_x. \end{array}\right. \tag{36}$$

Редукція ермітового спряження $L^* = L$ ($\mathbf{r} = \bar{\mathbf{q}}$, $\mathcal{M}^* = -\mathcal{M}$, u – дійсна функція); $M^* = -M$ ($\alpha_3 \in \mathbb{R}$), приводить систему (36) до вигляду

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{q}_t = \mathbf{q}_{xxx} + 3u\mathbf{q}_x + \frac{3}{2}u_x\mathbf{q} + \frac{3}{2}\mathbf{q}\mathcal{M}\mathbf{q}^*\mathbf{q}, \\ u_t = \frac{1}{4}u_{xxx} + 3uu_x + \frac{3}{4}\left(\mathbf{q}_x\mathcal{M}\mathbf{q}^* - \mathbf{q}\mathcal{M}\mathbf{q}_x^*\right)_x. \end{array}\right. \quad \alpha_3 := 1,\ t_3 := t. \tag{37}$$

Система (37) допускає нетривіальну дійсну версію тільки при $l > 1$ (позаяк $\mathcal{M}^\top = -\mathcal{M}$), $\mathbf{q} = \bar{\mathbf{q}}$:

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{q}_t = \mathbf{q}_{xxx} + 3u\mathbf{q}_x + \frac{3}{2}u_x\mathbf{q}, \\ u_t = \frac{1}{4}u_{xxx} + 3uu_x - \frac{3}{2}\left(\mathbf{q}\mathcal{M}\mathbf{q}_x^\top\right)_x. \end{array}\right.$$

При $l=2$, $\mathcal{M}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{q}=(q_1,q_2)$ отримаємо

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t = \frac{1}{4}u_{xxx} + 3uu_x - \frac{3}{2}\left(q_2 q_{1x} - q_1 q_{2x}\right)_x, \\ q_{i_t} = q_{i_{xxx}} + 3uq_{i_x} + \frac{3}{2}u_x q_i, \end{array} \right. \qquad i \in \{1,2\}. \tag{38}$$

III. $k=3$**,** $n=2$**.** $L := L_3 = \mathcal{D}^3 + u_1\mathcal{D} + u_0 + \mathbf{q}\mathcal{M}\mathcal{D}^{-1}\mathbf{r}^\top$; $\quad M := M_2 = \alpha_2\partial_{t_2} - \mathcal{D}^2 - \frac{2}{3}u_1$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_2\mathbf{q}_{t_2} = \mathbf{q}_{xx} + \frac{2}{3}u_1\mathbf{q}, \\ -\alpha_2\mathbf{r}_{t_2} = \mathbf{r}_{xx} + \frac{2}{3}u_1\mathbf{r}, \\ \alpha_2 u_{1t_2} = -u_{1xx} + 2u_{0x}, \\ \alpha_2 u_{0t_2} = -\frac{2}{3}u_{1xxx} - \frac{2}{3}u_1 u_{1x} + u_{0xx} + 2\left(\mathbf{q}\mathcal{M}\mathbf{r}^\top\right)_x. \end{array} \right. \tag{39}$$

При редукції $L^* = -L$ ($\mathbf{r}=\bar{\mathbf{q}}, \mathcal{M}^*=\mathcal{M}$, u_1 — дійсна функція, $\operatorname{Re} u_0 = \frac{1}{2}u_{1x}$, $\operatorname{Im} u_0 = v_0$), $M^* = M$ ($\alpha_2 \in i\mathbf{R}$) покладемо $\alpha_2 = i$, $t_2 = y$, тоді система (39) перепишеться у вигляді

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{1y} = 2v_{0x}, \\ v_{0y} = \frac{1}{6}u_{1xxx} + \frac{2}{3}u_1 u_{1x} - 2\left(\mathbf{q}\mathcal{M}\mathbf{q}^*\right)_x, \\ i\mathbf{q}_y = \mathbf{q}_{xx} + \frac{2}{3}u_1\mathbf{q}. \end{array} \right. \tag{40}$$

Диференціальним наслідком системи (40) є нелінійна модель вигляду

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{yy} = \left(\frac{1}{3}u_{xx} + \frac{2}{3}u^2 - 2\mathbf{q}\mathcal{M}\mathbf{q}^*\right)_{xx}, \\ i\mathbf{q}_y = \mathbf{q}_{xx} + \frac{2}{3}u\mathbf{q}, \end{array} \right.$$

$u_1 := u$, яка є узагальненням моделі Бусинеска (або нелінійного рівняння струни) ([12,15]).

$k=3$, $n=3$.

$$L := L_3 = \mathcal{D}^3 + u_1\mathcal{D} + u_0 + \mathbf{q}\mathcal{M}\mathcal{D}^{-1}\mathbf{r}^\top; \quad M := M_3 = \alpha_3\partial_{t_3} - \mathcal{D}^3 - u_1\mathcal{D} - u_0.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_3\mathbf{q}_{t_3} = \mathbf{q}_{xxx} + u_1\mathbf{q}_x + u_0\mathbf{q}, \\ \alpha_3\mathbf{r}_{t_3} = \mathbf{r}_{xxx} + u_1\mathbf{r}_x + u_{1x}\mathbf{r} - u_0\mathbf{r}, \\ \alpha_3 u_{0t_3} = 3\left(\mathbf{q}_x\mathcal{M}\mathbf{r}^\top\right)_x, \\ \alpha_3 u_{1t_3} = 3\left(\mathbf{q}\mathcal{M}\mathbf{r}^\top\right)_x. \end{array} \right. \tag{41}$$

При допустимій редукції $L^* = -L$ ($\mathbf{r}=\bar{\mathbf{q}}$, $\mathcal{M}^*=\mathcal{M}$, $u_0 = \frac{1}{2}u_{1x} + iv_0$, u_1, v_0 — дійсні функції); $M^* = -M$ ($\alpha_3 \in \mathbb{R}$) система (41) запишеться у вигляді

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{q}_t = \mathbf{q}_{xxx} + u_1\mathbf{q}_x + \left(\frac{1}{2}u_{1x} + iv_0\right)\mathbf{q}, \\ v_{0t} = \frac{3}{2}i\left(\mathbf{q}\mathcal{M}\mathbf{q}_x^* - \mathbf{q}_x\mathcal{M}\mathbf{q}^*\right)_x, \\ u_{1t} = 3\left(\mathbf{q}\mathcal{M}\mathbf{q}^*\right)_x, \end{array} \right. \qquad \alpha_3 := 1; \quad t_3 := t.$$

У дійсному випадку $v_0 = 0$, $\mathbf{q} = \bar{\mathbf{q}}$, отримуємо

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{q}_t = \mathbf{q}_{xxx} + u_1\mathbf{q}_x + \frac{1}{2}u_{1x}\mathbf{q}, \\ u_{1t} = 3\left(\mathbf{q}\mathcal{M}\mathbf{q}^\top\right)_x. \end{array} \right. \tag{42}$$

У скалярному випадку, поклавши $u_1 := u$, $\mathcal{M} := \frac{1}{2}\mu \in \mathbb{R}$, отримаємо систему Дрінфельда-Соколова ([43,9]), а система (42) є її багатокомпонентним (векторним) узагальненням.

3.3 Теорема Дарбу для k-сKP ієрархії.

Теорема 7. *Нехай: 1.* $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_K)(x, t_n)$ *— лінійно незалежна система розв'язків рівняння*

$$\alpha_n \varphi_{t_n} = \varphi^{(n)} \left(:= \frac{\partial^n \varphi(x, t_n)}{\partial x^n} \right);$$

2. $W[\varphi]$ *— оператор загального перетворення Дарбу (6).*
Тоді: 1. Оператор $\hat{L} := W[\varphi] \mathcal{D}^k W^{-1}[\varphi]$ *має вигляд*

$$\hat{L} = \hat{L}_+ + \hat{\mathbf{q}} \mathcal{D}^{-1} \hat{\mathbf{r}}^\top; \;\; \hat{\mathbf{q}} = (\hat{q}_1, \ldots, \hat{q}_K), \;\; \hat{\mathbf{r}} = (\hat{r}_1, \ldots, \hat{r}_K).$$

2. Оператор $\hat{L}$ *задовольняє рівняння (25).*

Доведення. 1. Використовуючи результати розділу 2, знаходимо явний вигляд оператора $\hat{L}$:

$$\hat{L} = W[\varphi] \mathcal{D}^k \varphi \mathcal{D}^{-1} h^* = \hat{L}_+ + W[\varphi] \{\varphi^{(k)}\} \mathcal{D}^{-1} h^* = \hat{L}_+ + \sum_{i=1}^{K} W[\varphi] \{\varphi_i^{(k)}\} \mathcal{D}^{-1} \bar{h}_i =$$

$$= \hat{L}_+ + \sum_{i=1}^{K} \frac{\mathcal{W}[\varphi, \varphi_i^{(k)}]}{\mathcal{W}[\varphi]} \mathcal{D}^{-1} \bar{h}_i; \;\; h^* = (-1)^{K-1} \hat{\varphi}^{-1} e_K^\top, \; e_K = (0, \ldots, 0, 1).$$

2. Оскільки $\hat{L} = (W[\varphi] \mathcal{D} W^{-1}[\varphi])^k$, отримуємо, що $(\hat{L}^{\frac{n}{k}})_+ = (W \mathcal{D}^n W^{-1})_+$. За теоремою 3

$$W[\varphi](\alpha_n \partial_{t_n} - \mathcal{D}^n) W^{-1}[\varphi] = \alpha_n \partial_{t_n} - W[\varphi] \mathcal{D}^n W^{-1}[\varphi] =$$

$$\alpha_n \partial_{t_n} - (W[\varphi] \mathcal{D}^n W^{-1}[\varphi])_+ = \alpha_n \partial_{t_n} - (\hat{L}^{\frac{n}{k}})_+.$$

Нарешті, з очевидної тотожності $[\mathcal{D}^k, \alpha_n \partial_{t_n} - \mathcal{D}^n] = 0$ випливає

$$[W[\varphi] \mathcal{D}^k W^{-1}[\varphi], W[\varphi](\alpha_n \partial_{t_n} - \mathcal{D}^n) W^{-1}[\varphi]] = 0,$$

тобто справедливість рівнянь (25). $\square$

Наслідок. *Нехай: 1)* $K \geq l$*; 2) функція* $\tilde{\varphi} := (\varphi_{l+1}, \ldots, \varphi_K)$ *задовольняє рівняння* $\tilde{\varphi}^{(k)} = \varphi \Lambda$*, де* Λ *— деяка стала комплекснозначна* $(K \times (K-l))$*-матриця. Тоді правильні рівності*

$$\hat{L} = L, \;\; q_i = \frac{\mathcal{W}[\varphi, \varphi_i^{(k)}]}{\mathcal{W}[\varphi]}, \quad r_i = (-1)^{i-1} \frac{\partial \ln \mathcal{W}[\varphi]}{\partial \varphi_i^{(K-1)}}, \quad i \in \{1, \ldots, l\}. \tag{43}$$

Зауваження. Теорему 7 в іншій формі доведено у статті [1]. Узагальнення на просторово-двовимірний випадок проведено у статтях [1, 2].

Наведена теорема не допускає прямого застосування для частини систем розділу 3.2, позаяк побудований оператор L, взагалі кажучи, не задовольняє (апріорі) відповідні додаткові редукції типу ермітового спряження

$$L^* = (-1)^k L, \tag{44}$$

тобто безпосередньо не може бути застосована для Hk-сKP ієрархії.

Необхідною умовою виконання редукційного обмеження (44) є, очевидно, така

$$\mathbf{r}^{\top} = \mathcal{M}\mathbf{q}^{*},\ \mathcal{M}^{*} = (-1)^{k-1}\mathcal{M},\ \mathcal{M} = (\mathcal{M}_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{l\times l}(\mathbb{C}). \tag{45}$$

Враховуючи формули (43), необхідна умова (45) записується у вигляді нелінійної системи диференціальних рівнянь $(K+k)$-го порядку

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ln \mathcal{W}[\varphi]}{\partial \varphi_i^{(K-1)}} = (-1)^{i-1}\sum\limits_{j=1}^{l}\mathcal{M}_{ij}\left(\dfrac{\mathcal{W}\left[\varphi,\varphi_j^{(k)}\right]}{\mathcal{W}[\varphi]}\right)^{*}, \quad i\in\{1,\ldots,l\}; \\ \tilde{\varphi}^{(k)} = \varphi\tilde{\Lambda},\ \mathcal{M}_{ij} = (-1)^{k-1}\overline{\mathcal{M}}_{ji}, \end{cases} \tag{46}$$

яка навіть у найпростішому випадку $K=1$ є нетривіальною, що і буде продемонстровано в наступному підрозділі.

3.4. Розв'язки одного класу звичайних нелінійних комплексних диференціальних рівнянь та їх застосування. Розглянемо систему (46) при $K=1$, при цьому її друга (лінійна) частина зникає, і ми отримаємо, поклавши $\varphi := \varphi_1$, рівняння $\varphi^{-1} = \mu\left(\frac{\mathcal{W}[\varphi,\varphi^{(k)}]}{\varphi}\right)^{*}$; $\mu := \mathcal{M}_{11}\in\mathbb{C}$, $\bar{\mu} = (-1)^{k-1}\cdot\mu$, або, в іншій формі

$$\frac{\mathcal{W}\left[\varphi,\varphi^{(k)}\right]}{\varphi^2} = \frac{\mu^{-1}}{|\varphi|^2}. \tag{47}$$

Ліва частина в рівнянні (47) може бути також зображена як $\left(\varphi^{(k)}/\varphi\right)_x$.

$k=1$**: Ієрархія нелінійного рівняння Шредінгера (НРШ).**

Необхідна умова (45) наявності ермітової редукції (44) для оператора Лакса у випадку $k=1$ ($\forall\, n\in\mathbb{N}$) є, очевидно, і достатньою. Тому, в скалярному випадку $l=K=1$ справедлива наступна теорема.

Теорема 8. *1. Функція $q := (\mu\bar{\varphi}(x,y))^{-1}$ є розв'язком НРШ (27) тоді і тільки тоді, коли функція $\varphi=\varphi(x,y)$ є (скалярним) розв'язком системи*

$$i\varphi_y = \varphi_{xx},\ \left(\frac{\varphi_x}{\varphi}\right)_x = \left(\mu\,|\varphi|^2\right)^{-1}. \tag{48}$$

2. Функція $q := (\mu\bar{\varphi}\,(x,t))^{-1}$ задовольняє комплексне рівняння $mKdV$ (30) якщо і тільки якщо вона є розв'язком системи

$$\varphi_t = \varphi_{xxx},\quad (\ln\,\varphi)_{xx} = \left(\mu\,|\varphi|^2\right)^{-1}. \tag{49}$$

Друге рівняння в системах (48)–(49) є нелінійною диференціальною в'яззю в лінійному просторі розв'язків еволюційного рівняння

$$\alpha_n\frac{\partial\varphi\,(x,t_n)}{\partial t_n} = \frac{\partial^n\varphi\,(x,t_n)}{\partial x^n}. \tag{50}$$

Подавши φ в тригонометричній формі $\varphi(x) = \rho(x)\cdot\exp\, i\theta(x)$, отримаємо, що в'язь рівносильна до системи рівнянь

$$\theta_{xx} = 0,\quad \rho\rho_{xx} - \rho_x^2 = \mu^{-1}, \tag{51}$$

добре відомої в науковій літературі ([44]) (йдеться про друге, нелінійне рівняння в (51)). Розв'язки системи (51) істотно залежать від $\operatorname{sign}\mu$.
При $\mu > 0$ розв'язки (всі!) утворюють 4-параметричну сім'ю:

$$\varphi(x) = C^{-1}\operatorname{ch}\left(C\sqrt{\mu^{-1}}\,x + \theta_0\right)\cdot \exp\, i\,(ax+\theta_1)\,, \quad C, a, \theta_0, \theta_1 \in \mathbb{R}. \tag{52}$$

При $\mu < 0$ множина розв'язків системи (51) вичерпується трьома сім'ями

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= C^{-1}\operatorname{sh}\left(C\sqrt{-\mu^{-1}}\,x + \theta_0\right)\cdot\, \exp\, i\,(ax+\theta_1)\,,\\ \varphi(x) &= C^{-1}\,\sin\,\left(C\,\sqrt{-\mu^{-1}}\,x + \theta_0\right)\,\cdot \exp\, i\,(ax+\theta_1)\,,\\ \varphi(x) &= \left(\pm\sqrt{-\mu^{-1}}\,x + \theta_0\right)\,\cdot \exp\, i\,\left(ax+\theta_1\right). \end{aligned} \tag{53}$$

Розглядаючи функції $\varphi(x)$ (52)–(53) в якості даних Коші $\varphi(x,t_n)|_{t_n=0} = \varphi(x)$ для еволюційного рівняння (50) неважко отримати (всі!) розв'язки систем (48)–(49) ($t_2 := y,\ t_3 := t$), скориставшись, наприклад, відомою формулою $\varphi(x,t_n) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{t_n^j}{\alpha^j j!}\,\varphi^{(jn)}(x)$.

Отже, для $\mu > 0$ отримуємо

$$\varphi(x,y) = C^{-1}\operatorname{ch}\left\{C\,\sqrt{\mu^{-1}}(x+2ay)+\theta_0\right\}\cdot \exp\, i\,\left\{ax + (a^2-\mu^{-1}C^2)y+\theta_1\right\}, \tag{54}$$

а для $\mu < 0$

$$\varphi(x,y) = C^{-1}\operatorname{sh}\left\{C\sqrt{-\mu^{-1}}(x+2ay)+\theta_0\right\}\cdot \exp\, i\,\left\{ax + (a^2+\mu^{-1}C^2)y+\theta_1\right\}, \tag{55}$$

$$\varphi(x,y) = C^{-1}\,\sin\left\{C\,\sqrt{-\mu^{-1}}(x+2ay)+\theta_0\right\}\cdot \exp\, i\,\left\{ax + (a^2-\mu^{-1}C^2)y+\theta_1\right\}, \tag{56}$$

$$\varphi(x,y) = \left(\pm\sqrt{-\mu^{-1}}(x+2ay+\theta_0)\right)\cdot \exp\, i\,\left\{ax+a^2y+\theta_1\right\}. \tag{57}$$

За теоремою 8, функції $q := (\mu\bar{\varphi}(x,y))^{-1}$ є розв'язками НРШ (27). Випадку (54) відповідає регулярний солітон

$$q = \frac{\mu^{-1}}{\bar{\varphi}} = \frac{C\exp\, i\,\left\{ax+(a^2-\mu^{-1}C^2)\,y+\theta_1\right\}}{\mu\operatorname{ch}\left\{C\sqrt{\mu^{-1}}(x+2ay)+\theta_0\right\}}, \tag{58}$$

$$|q|^2(x,y) = \frac{C^2}{\mu^2}\operatorname{sech}^2\left\{C\sqrt{\mu^{-1}}(x+2ay)+\theta_0\right\},$$

а для $\mu < 0$ відповідні розв'язки є сингулярними.

Подібно знаходяться розв'язки $\varphi(x,t)$ системи (49)

$$\begin{gathered} \mu > 0: \quad \varphi(x,t) = C^{-1}\operatorname{ch}\left\{C\,\sqrt{\mu^{-1}}\left[x+\left(\mu^{-1}C^2-3a^2\right)t+\theta_0\right]\right\}\times \\ \times\exp i\left\{ax+\left(3\mu^{-1}C^2-a^2\right)\,at+\theta_1\right\}, \end{gathered} \tag{59}$$

$$\begin{gathered} \mu < 0: \quad \varphi(x,t) = C^{-1}\operatorname{sh}\left\{C\,\sqrt{-\mu^{-1}}\left[x-\left(\mu^{-1}C^2+3a^2\right)\,t+\theta_0\right]\right\}\times \\ \times\exp\, i\left\{ax-\left(3\mu^{-1}C^2+a^2\right)\,at\,+\theta_1\right\}, \end{gathered} \tag{60}$$

$$\varphi(x,t) = C^{-1}\sin\left\{C\sqrt{-\mu^{-1}}\left[x + \left(\mu^{-1}C^2 - 3a^2\right)t + \theta_0\right]\right\}\times \tag{61}$$
$$\times\exp i\left\{ax + \left(3\mu^{-1}C^2 - a^2\right)at + \theta_1\right\},$$

$$\varphi(x,t) = \pm\sqrt{-\mu^{-1}}\left[x - 3a^2t + \theta_0\right]\exp i\left\{ax - a^3t + \theta_1\right\}. \tag{62}$$

За теоремою 8, функції $q := (\mu\bar{\varphi}(x,t))^{-1}$ задовольняють комплексне рівняння $mKdV$ (30), а розв'язкам (59)–(60) відповідають, відповідно, регулярний і сингулярний солітон.

Зауваження. 1. Дійсна редукція до розв'язків рівняння $mKdV$ (32) забезпечується, очевидно, спеціальним вибором сталих $a = \theta_0 = 0$ в формулах (59)–(62).
2. Побудовані нами розв'язки (54)–(57) і (59)–(62) дозволяють знайти і деякі розв'язки рівняння Кадомцева-Петвіашвілі (КП-2)

$$\left(4u_t - u_{xxx} + 12uu_x\right)_x + 3u_{yy} = 0. \tag{63}$$

(Рівняння (63) отримується з рівняння КП-1 (23) після заміни $y \to iy$.) А саме, вірне таке твердження.

Теорема 9. *Функція $u := \mu\left|q\right|^2(x,y,t)$, де $q(x,y,t)$ є сумісним розв'язком НРШ (27) і комплексного рівняння $mKdV$ (30), задовольняє рівняння КП-2 (63).*

Доведення. Комутативність лаксових потоків (21) при $n = 2$ і $n = 3$ рівносильна до рівняння КП-1 (23), а при заміні $y \to iy$ — до рівняння (63). Нелокальна 1-в'язь (тобто $L_{KP} = \mathcal{D} + \mu q\mathcal{D}^{-1}q^*$) рівносильна до заміни $U_i = (-1)^{i-1}\mu q q^{*\,(i-1)}$, де $q = q(x,t_2,t_3\ldots)$ задовольняє (при $k = 1$) скалярну ($l = 1$) ієрархію НРШ (27), а $u := U_1 = \mu\left|q\right|^2 = \left(\mu\left|\varphi\right|^2\right)^{-1}$. □

Наслідок. *Функції*

$$u(x,y,t) = \frac{C^2}{\mu}\operatorname{sech}^2\left\{C\sqrt{\mu^{-1}}\left[x + 2ay + \left(\mu^{-1}C^2 - 3a^2\right)t + \theta_0\right]\right\},$$

$$u(x,y,t) = \frac{C^2}{\mu}\operatorname{cosech}^2\left\{C\sqrt{-\mu^{-1}}\left[x + 2ay - \left(\mu^{-1}C^2 + 3a^2\right)t + \theta_0\right]\right\},$$
$$u(x,y,t) = \frac{C^2}{\mu}\operatorname{cosec}^2\left\{C\sqrt{-\mu^{-1}}\left[x + 2ay + \left(\mu^{-1}C^2 - 3a^2\right)t + \theta_0\right]\right\},$$
$$u(x,y,t) = -\frac{\mu}{(x + 2ay - 3a^2\,t + \theta_0)^2}$$

є розв'язками рівняння КП-2 (63).

3.5. Теореми Дарбу для бінарних перетворень лінійної системи, асоційованої з нелінійною моделлю Шредінгера. Наслідком формули Лагранжа ([45–48])

$$P_{t_n} := \alpha_n(g^\top f)_{t_n} = \left[\sum_{i=1}^{n(M)}\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j(g^\top v_i)^{(j)}f^{(i-j-1)}\right]_x := Q_x$$

для еволюційних рівнянь

$$M\{f\} = M^{\tau}\{g\} = 0; \;\; M = \alpha_n \partial_{t_n} - \sum_{i=0}^{n(M)} v_i \mathcal{D}^i, \tag{64}$$

є існування потенціальної функції (матричного потенціалу) $\Omega[g, f]$, визначеної на довільних розв'язках рівнянь (64), а саме

$$d\Omega[g, f] = Pdx + Qdt_n, \;\; \Omega[g, f] = \int_{(x_0, t_{n_0})}^{(x, t_n)} Pdx + Qdt_n + \Omega_0, \tag{65}$$

де Ω_0 — довільна стала матриця (стала інтегрування). Для рівнянь (26)–(27) відповідний потенціал (65) має вигляд

$$\Omega[g, f] = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} g^{\top} f \, dx + i(g_x^{\top} f - g^{\top} f_x) \, dy + \Omega_0.$$

Визначимо дію оператора $\mathcal{D}^{-1}\mathbf{q}^*$ на розв'язки еволюційного рівняння (64) формулою

$$(\mathcal{D}^{-1}\mathbf{q}^*)\{f\} := \mathcal{D}^{-1}\{\mathbf{q}^* f\} = \Omega[\bar{\mathbf{q}}, f], \tag{66}$$

тобто ототожнимо оператори $\mathcal{D}^{-1}\mathbf{q}^* \equiv \Omega[\bar{\mathbf{q}}, \cdot]$ на просторі розв'язків еволюційного рівняння $M\{f\} = 0$.

Зауважимо, що оператори M і L для НРШ (27) є ермітовим і косоермітовим відповідно ($M^* := \bar{M}^{\tau} = M$; $L^* = -L$), наслідком чого є допустима редукція розв'язків $g = \bar{f}$.

Теорема 10. *Нехай: 1) f — довільний (скалярний) розв'язок системи (25) при $\mathbf{q} \equiv 0$ ($k = 1$, $n = 2$); 2) $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_K)$ — фіксований (векторний) розв'язок системи: $\begin{cases} \varphi_x = \varphi \Lambda, \\ i\varphi_y = \varphi_{xx} \end{cases}$, де Λ — стала комплексна матриця розмірності ($K \times K$): $\Lambda \in \mathrm{Mat}_{K\times K}(\mathbb{C})$. 3) $W = I - \varphi(C + \Omega[\bar{\varphi}, \varphi])^{-1}\Omega[\bar{\varphi}, \cdot] := I - \tilde{\Phi}\Omega[\bar{\varphi}, \cdot]$, де $C = C^*$ — довільна стала ермітова ($K \times K$) матриця.*

Тоді: 1) Оператори $\hat{L} = WLW^{-1}$ та $\hat{M} = WMW^{-1}$ мають вигляд $\hat{L} = \mathcal{D} + \tilde{\Phi}\hat{\mathcal{M}}\mathcal{D}^{-1}\tilde{\Phi}^*$, $\hat{M} = i\partial_y - \mathcal{D}^2 - 2\tilde{\Phi}\hat{\mathcal{M}}\tilde{\Phi}^*$, де $\hat{\mathcal{M}} = C\Lambda + \Lambda^* C$.
2) Функція $\hat{f} := W\{f\} = f - \tilde{\Phi}\Omega[\bar{\varphi}, f]$ задовольняє систему рівнянь $\hat{L}\{\hat{f}\} = \lambda \hat{f}$, $\hat{M}\{\hat{f}\} = 0$.

Доведення здійснюється безпосередньою перевіркою.

Наслідок. *Нехай $K \geq l$, $\hat{\mathcal{M}} = \mathrm{diag}(\mu_1, \ldots \mu_l, 0, \ldots 0) \in \mathrm{Mat}_{K\times K}(\mathbb{R})$, тоді $\hat{\mathbf{q}} = \tilde{\Phi}(x, y) = \varphi(C + \Omega[\bar{\varphi}, \varphi])^{-1}$ є розв'язком нелінійного рівняння Шредінгера (27).*

Як і в розділі 3.4, розглянемо випадок $K = l = 1$. Взявши $\varphi = \varphi_1 = \rho_1 e^{(\lambda_1 x - i\lambda_1^2 y) + i\theta_0}$, де $\Lambda := \lambda_1$, $\lambda_1 \in \mathbb{C}$, ρ_1, $\theta_0 \in \mathbb{R}$, $\hat{\mathcal{M}} := \mu \in \mathbb{R}$ отримаємо розв'язки (27) у вигляді

$$\hat{\mathbf{q}} = \hat{q}_1 = \Phi = \frac{2\rho_1\lambda_{11}\exp(\lambda_{11}x + 2\lambda_{11}\lambda_{12}y)}{\mu + \rho_1^2 \exp 2(\lambda_{11}x + 2\lambda_{11}\lambda_{12}y)} \exp i\{\lambda_{12}x - (\lambda_{11}^2 - \lambda_{12}^2)y + \theta_0\},$$

де $\lambda_{11} = \mathrm{Re}\lambda_1$, $\lambda_{12} = \mathrm{Im}\lambda_1$ та $\mu = 2\lambda_{11}C$.

Для $\mu > 0$, поклавши $\rho_1 = \sqrt{\mu}e^{\gamma_1}$, отримуємо

$$\hat{\mathbf{q}} = \hat{q}_1 = \frac{\lambda_{11}}{\sqrt{\mu}} \frac{\exp i\{\lambda_{12}x - (\lambda_{11}^2 - \lambda_{12}^2)y + \theta_0\}}{\operatorname{ch}(\lambda_{11}x + 2\lambda_{11}\lambda_{12}y + \gamma_1)}.$$

Подібно, для $\mu < 0$, $\rho_1 = \sqrt{-\mu}e^{\gamma_1}$, маємо

$$\hat{\mathbf{q}} = \hat{q}_1 = \frac{\lambda_{11}}{\sqrt{-\mu}} \frac{\exp i\{\lambda_{12}x - (\lambda_{11}^2 - \lambda_{12}^2)y + \theta_0\}}{\operatorname{sh}(\lambda_{11}x + 2\lambda_{11}\lambda_{12}y + \gamma_1)}.$$

При $\lambda_{11} = \frac{C}{\sqrt{\pm\mu}}$, $\lambda_{12} = a$, $\theta_0 = \theta_1$, $\gamma_1 = \theta_0$ наведені розв'язки отримані раніше згідно формул (54)–(55) відповідно (див. також (58)).

Теорема 11. *Нехай: 1) f — довільний (скалярний) розв'язок системи (25) при $k = 1$, $n = 2$ і $\mathbf{r} = \bar{\mathbf{q}}$; 2) $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_K)$ — фіксований (векторний) розв'язок системи*

$$\begin{cases} L\{\varphi\} := \varphi_x + \mathbf{q}\mathcal{M}\Omega[\bar{\mathbf{q}}, \varphi] = \varphi\Lambda, \\ M\{\varphi\} := i\varphi_y - \varphi_{xx} - 2(\mathbf{q}\mathcal{M}\mathbf{q}^*)\varphi = 0, \end{cases} \tag{67}$$

де $\mathbf{q} = \mathbf{q}(x, y)$ — деякий фіксований розв'язок НРШ (27); $\Lambda \in \mathrm{Mat}_{K\times K}(\mathbb{C})$;
3) $W = I - \varphi\Omega^{-1}[\bar{\varphi}, \varphi]\Omega[\bar{\varphi}, \cdot]$ — оператор бінарних перетворень Дарбу (див. (18), де стала матриця C згідно означення (66) є нульовою, на відміну від відповідного оператора перетворень з теореми 10).

Тоді: 1) Оператори $\hat{L} = WLW^{-1}$ та $\hat{M} = WMW^{-1}$ мають вигляд $\hat{L} = \mathcal{D} + \hat{\mathbf{q}}\mathcal{M}\mathcal{D}^{-1}\hat{\mathbf{q}}^*$, $\hat{M} = i\partial_t - \mathcal{D}^2 - 2\hat{\mathbf{q}}\mathcal{M}\hat{\mathbf{q}}^*$, де $\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{q} - \varphi\Omega^{-1}[\bar{\varphi}, \varphi]\Omega[\bar{\varphi}, \mathbf{q}] = W\{\mathbf{q}\}$.
2) Функція $\hat{f} := W\{f\} = f - \varphi\Omega^{-1}[\bar{\varphi}, \varphi]\Omega[\bar{\varphi}, f]$ задовольняє систему рівнянь $\hat{L}\{\hat{f}\} = \lambda\hat{f}$, $\hat{M}\{\hat{f}\} = 0$.

Доведення здійснюється безпосередньою перевіркою.

Наслідок. *Функція $\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{q} - \varphi\Omega^{-1}[\bar{\varphi}, \varphi]\Omega[\bar{\varphi}, \mathbf{q}]$ є розв'язком нелінійного рівняння Шредінгера (27).*

У випадку $K = l = 1$, $\mathcal{M} = \mu$, за частковий розв'язок НРШ (27) можна взяти $\mathbf{q} = q_1 = \rho_1 \exp\{i(\nu_1 x + (\nu_1^2 - 2\mu\rho_1^2)y + \theta_0)\}$, $\rho_1, \nu, \mu, \theta_0 \in \mathbb{R}$ (оскільки $|q_1|^2 = \rho_1^2 = \mathrm{const}$, рівняння (27) стає лінійним). Нехай $\varphi = \varphi_1 = \tilde{\rho}_1 \exp\{i(\tilde{\lambda}_1 x + (\tilde{\lambda}_1^2 - 2\mu\rho_1^2)y + \tilde{\theta}_0)\}$, $\varphi \neq q_1$. Нескладно перевірити, що φ_1 є розв'язком системи (67) якщо $\mathbb{C} \ni \tilde{\lambda}_1 = \tilde{\lambda}_{11} + i\tilde{\lambda}_{12}$ визначається з рівності:

$$\lambda_1 = i\left(\tilde{\lambda}_1 - \frac{\mu\rho_1^2}{\tilde{\lambda}_1 - \nu_1}\right), \quad \tilde{\lambda}_1 \neq \nu_1. \tag{68}$$

Якщо $\tilde{\lambda}_{11} = \tilde{\lambda}_1 \in \mathbb{R}$, тоді розв'язок НРШ (27), за наслідком з теореми 11, має вигляд

$$\hat{\mathbf{q}} = \hat{q}_1 = \rho_1 \exp\{i(\nu_1 x + (\nu_1^2 - 2\mu\rho_1^2)y + \theta_0)\}\left[1 + \frac{i}{(\nu_1 - \tilde{\lambda}_{11})(x + 2\tilde{\lambda}_{11}y)}\right].$$

У випадку комплексного $\tilde{\lambda}_1$ ($\tilde{\lambda}_{12} \neq 0$) відповідна формула для $\hat{\mathbf{q}}$ з цього ж наслідку визначає розв'язок НРШ (27) у вигляді $\hat{\mathbf{q}} := \hat{q}_1 = q_1(\tilde{\lambda}_1 - \nu_1)/(\bar{\tilde{\lambda}}_1 - \nu_1)$, тобто ми маємо тривіальний результат — як і вихідна функція q_1, $\hat{q}_1$ теж є розв'язком лінійного рівняння.

Отже, у випадку $K = 1$ теорема 11 дозволяє нам отримати одну 4-х–параметричну сім'ю розв'язків НРШ (27). Наступна теорема узагальнює дві попередні.

Теорема 12. *Нехай виконуються умови 1), 2) теореми 11 та*

$$W = I - \varphi(C + \Omega[\bar{\varphi}, \varphi])^{-1}\Omega[\bar{\varphi}, \cdot] := I - \Phi\Omega[\bar{\varphi}, \cdot], \quad C \in \mathrm{Mat}_{K\times K}(\mathbb{C}), \quad C^* = C.$$

Тоді: 1) Оператори $\hat{L} = WLW^{-1}$ *та* $\hat{M} = WMW^{-1}$ *мають вигляд* $\hat{L} = \mathcal{D} + \tilde{\Phi}\hat{\mathcal{M}}\mathcal{D}^{-1}\tilde{\Phi}^* + \hat{\mathbf{q}}\mathcal{M}\mathcal{D}^{-1}\hat{\mathbf{q}}^*$, $\hat{M} = i\partial_y - \mathcal{D}^2 - 2(\hat{\mathbf{q}}\mathcal{M}\hat{\mathbf{q}}^* + \tilde{\Phi}\hat{\mathcal{M}}\tilde{\Phi}^*)$, *де* $\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{q} - \tilde{\Phi}\Omega[\bar{\varphi}, \mathbf{q}] = W\{\mathbf{q}\}$, $\hat{\mathcal{M}} = C\Lambda + \Lambda^* C$.
2) Функція $\hat{f} := W\{f\} = f - \tilde{\Phi}\Omega[\bar{\varphi}, f]$ *задовольняє систему рівнянь* $\hat{L}\{\hat{f}\} = \lambda\hat{f}$, $\hat{M}\{\hat{f}\} = 0$.

Як і в попередніх випадках, доведення здійснюється безпосередньою перевіркою.

Зауваження. 1) Якщо $C\Lambda + \Lambda^* C = 0$ то $\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{q} - \tilde{\Phi}\Omega[\bar{\varphi}, \mathbf{q}]$ є розв'язком нелінійного рівняння Шредінгера (27).
2) Якщо $\mathbf{q} = 0$, тоді ми потрапляємо в умови теореми 10.
3) Якщо $C = 0$, тоді ми потрапляємо в умови теореми 11.

Отже, нам залишилося розглянути перший випадок (при $C \neq 0$).

Нехай $K = 1$, а функції $\mathbf{q}$ та φ визначені так само, що й у прикладі до теореми 11.

Умова $C\Lambda + \Lambda^* C = 0$ в нашому випадку ($K = 1$) рівносильна до умови $\lambda_{11} := \mathrm{Re}\lambda_1 = 0$. Із співвідношення (68) слідує: $\tilde{\lambda}_1 - \frac{\mu\rho_1^2}{\tilde{\lambda}_1 - \nu_1} \in \mathbb{R}$. Тому, отримуємо дві можливості: 1)$\tilde{\lambda}_1 \in \mathbb{R}$. 2)$\tilde{\lambda}_1 \in \mathbb{C}$ і $\mathrm{Im}\left(\tilde{\lambda}_1 - \frac{\mu\rho_1^2}{\tilde{\lambda}_1 - \nu_1}\right) = 0$.

У першому випадку отримуємо: $\hat{\mathbf{q}} := \hat{q}_1 = \mathbf{q} - \tilde{\Phi}\Omega[\bar{\varphi}, \mathbf{q}] := q_1 - \tilde{\Phi}\Omega[\bar{\varphi}_1, q_1]$, а саме

$$\hat{\mathbf{q}} := \hat{q}_1 = \rho_1 \exp\{i(\nu_1 x + (\nu_1^2 - 2\mu_1\rho_1^2)y) + \theta_0\}\left[1 + \frac{i\tilde{\rho}_1^2}{(\nu_1 - \tilde{\lambda}_1)(C + \tilde{\rho}_1^2 x + 2\tilde{\rho}_1^2\tilde{\lambda}_1 y)}\right].$$

У другому випадку отримаємо таку умову на $\tilde{\lambda}_1$

$$(\tilde{\lambda}_{11} - \nu_1)^2 + \tilde{\lambda}_{12}^2 = -\mu\rho_1^2;\ \tilde{\lambda}_{12} \neq 0,\ \mu < 0.$$

Наприклад, можемо прийняти $\tilde{\lambda}_1 = \nu_1 + i\sqrt{-\mu}|\rho_1|$ і отримаємо

$$\hat{\mathbf{q}} := \hat{q}_1 = q_1 \frac{c_1 + \exp\{-2\sqrt{-\mu}|\rho_1|(x + 2\nu_1 y)\}}{c_1 - \exp\{-2\sqrt{-\mu}|\rho_1|(x + 2\nu_1 y)\}},\ \ C := \frac{\tilde{\rho}_1^2}{2\sqrt{-\mu}|\rho_1|}c_1.$$

При $c_1 = -1 \Rightarrow \hat{\mathbf{q}} = q_1 \,\mathrm{th}\,\{\sqrt{-\mu}|\rho_1|(x + 2\nu_1 y)\}$, при $c_1 = 1 \Rightarrow \hat{\mathbf{q}} = q_1 \,\mathrm{cth}\,\{\sqrt{-\mu}|\rho_1|(x + 2\nu_1 y)\}$.

На завершення розділу 3 зробимо деякі зауваження.

1. Використання класичних перетворень типу Дарбу-Крама-Матвєєва для інтегрування ермітової k-cKP ієрархії можливе, але потребує вирішення додаткових (причому значних) проблем, а саме — знаходження розв'язків нелінійних систем звичайних диференціальних рівнянь типу (46).

2. При використанні різних версій операторів бінарних перетворень (теореми 10-11) таких ускладнень, як у попередньому випадку, не виникає. Це пов'язано з тим, що вони є унітарними ($WW^* = I$), отже переводять (косо)ермітові оператори Лакса в (косо)ермітові.

3. Оператори бінарних перетворень ([22, 23, 27–35]) $W = I - \varphi\Omega^{-1}[\bar{\psi}, \varphi]\Omega[\bar{\psi}, \cdot]$, де $\Omega[\bar{\psi}, f] := \mathcal{D}^{-1}\{\psi^* f\}$ за побудовою (див. розділи 1.4, 2.3) переводять диференціальні оператори в диференціальні, тобто

$$\hat{\zeta}_+ \ni L \to WLW^{-1} = \hat{L} \in \hat{\zeta}_+, \tag{69}$$

тому їх неможливо використати для перетворення типу

$$\mathcal{D}^k \to W\mathcal{D}^k W^{-1} = \hat{L}_{Hk-cKP}. \tag{70}$$

Єдина можливість їх використання для інтегрування Hk-cKP ієрархії, це одягаюче перетворення типу

$$L_{Hk-cKP} \to W L_{Hk-cKP} W^{-1} = \hat{L}_{Hk-cKP}, \tag{71}$$

реалізоване нами в теоремі 11 (для оператора L_{H1-cKP}).

4. Бінарні перетворення, пов'язані (індуковані) з оператором W вигляду

$$W = I - \varphi(C + \Omega[\bar{\psi}, \varphi])^{-1}\Omega[\bar{\psi}, \cdot], \;\; C \neq 0 \tag{72}$$

вперше використані у статтях [49–50, 47] при інтегруванні рівнянь з диференціальними зображеннями Лакса-Захарова-Шабата (більш детально див. також статтю [48]), тобто для перетворень типу (69). Можливість застосувань оператора W (72) для перетворень типу (70) доведено у статті [51], де, зокрема, побудовано n-солітонні класи розв'язків векторної моделі НРШ (27). Інші рівняння з k-cKP ієрархії досліджувалися також в [52,53]. Однак у цитованих статтях ми обмежувалися конкретною реалізацією потенціалу Ω, а саме — частковим випадком

$$\Omega[\bar{\psi}, f] := \mathcal{D}^{-1}\{\psi^* f\} := \int_{\pm\infty}^{x} \psi^*(s) f(s)\, ds,$$

на відміну від представленої тут теореми 10.

5. Загальну теорему Дарбу для перетворень типу (71) з оператором W вигляду (72) доведено в [54], а теорема 12 є її реалізацією для нелінійної моделі Шредінгера.

4. Бінарні перетворення $\mathcal{D}$-ермітових операторів.

Означення. Оператор $L \in \hat{\zeta}$ називається $\mathcal{D}$-*ермітовим* ($\mathcal{D}$-*косоермітовим*), якщо $L^* = \mathcal{D}L\mathcal{D}^{-1}$ ($L^* = -\mathcal{D}L\mathcal{D}^{-1}$). Інтегральний оператор W називається $\mathcal{D}$-*унітарним*, якщо $W^{-1} = \mathcal{D}^{-1}W^*\mathcal{D}$.

Зауваження. 1. Після домноження $\mathcal{D}$-ермітового оператора на уявну одиницю i, отримуємо $\mathcal{D}$-косоермітовий оператор і навпаки. $\mathcal{D}$-косоермітові оператори утворюють алгебру Лі $\mathcal{D}u(\hat{\zeta})$.

2. Групою Лі алгебри $\mathcal{D}u(\hat{\zeta})$ є група $\mathcal{D}U(\hat{\zeta})$ $\mathcal{D}$-унітарних операторів.

3. Очевидно, оператор L є $\mathcal{D}$-ермітовим тоді і тільки тоді, якщо оператор $L\mathcal{D}^{-1}$ є косоермітовим, тобто $L \in \mathcal{D}u(\hat{\zeta}) \Leftrightarrow iL\mathcal{D}^{-1} \in u(\hat{\zeta})$.

Поняття $\mathcal{D}$-ермітових ієрархій введено в [55], де також побудовано відповідну групу $\mathcal{D}$-унітарних бінарних перетворень типу Дарбу і проінтегровано векторну версію однієї з модифікацій нелінійного рівняння Шредінгера з інтегродиференціальним $\mathcal{D}$-косоермітовим оператором Лакса. Зауважимо також, що хоча бінарні перетворення типу Дарбу використовувались для інтегрування нелінійної моделі з $\mathcal{D}$-ермітовим зображенням Лакса в алгебрі чисто диференціальних операторів раніше (вперше, мабуть, в [30, 32, 56] для нелінійних моделей mKP та Ішиморі-I ([57])), отримана в [55] група перетворень є ширшою, що дозволило побудувати нові класи розв'язків як просторово-двовимірних рівнянь Гейзенберга ([58]), так і багатьох систем з, так званої, нелокально-редукованої $\mathcal{D}$-ермітової модифікованої ієрархії Кадомцева-Петвіашвілі ($\mathcal{D}$Hk-cmKP) ([55, 59, 60]).

Добре відомо, що між просторово-двовимірними моделями Гейзенберга-II (Ішиморі-II) і Деві-Стюартсона-II (DS-II) існує калібрувальна еквівалентність ([61]), яка дозволяє будувати розв'язки однієї з систем знаючи розв'язки іншої. Але для систем DS-I і Ішиморі-I такий зв'язок (що зауважено в [56]) на даний час є невідомим.

В цьому розділі ми продемонструємо простий зв'язок між загальними перетвореннями Дарбу і $\mathcal{D}$-унітарними перетвореннями, а саме — дамо відповідь на питання: як останні можна отримати відштовхуючись від попередніх?

Розглянемо загальний матричний випадок еволюційного диференціального оператора L (див. розділ 1.1). Нехай $\hat{\zeta} \ni L = L_{\geq 0} = \alpha\partial_\tau - \sum_{i=0}^{n(L)} u_i \mathcal{D}^i$, $u_i = u_i(x,\tau) \in \mathrm{Mat}_{N\times N}(\mathbb{C})$; $i \in \{0, 1, \ldots, n(L)\}$, є $(N \times N)$-матричними функціями змінної $x \in \mathbb{R}$ і еволюційного параметра $\tau \in \mathbb{R}$; $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha\partial_\tau := \alpha I_N \partial_\tau$, $I_N := I$ — одиничний (тотожний) оператор, що діє у відповідному просторі. Нехай, також, $f = f(x,\tau)$, $g = g(x,\tau)$ — довільні розв'язки, а $\varphi = \varphi(x,\tau) \in \mathrm{Mat}_{N\times N}(\mathbb{C}) \ni \psi = \psi(x,\tau)$ — фіксовані $(N \times K)$-матричні розв'язки відповідних лінійних задач

$$L\{f\} = \lambda f, \;\; L\{\varphi\} = \varphi\Lambda, \tag{73}$$

$$L^\tau\{g\} = \tilde{\lambda} g, \;\; L^\tau\{\psi\} = \psi\tilde{\Lambda}, \tag{74}$$

де $\mathbb{C} \ni \lambda, \tilde{\lambda}$ — спектральні параметри, а $\mathrm{Mat}_{K\times K}(\mathbb{C}) \ni \Lambda, \tilde{\Lambda}$ — "спектральні матриці" відповідної розмірності.

Зауваження. У попередніх розділах цієї статті визначення функцій $g(x,\tau)$ і $\psi(x,\tau)$ неістотно відрізнялось від (74), а саме — функції g і ψ були розв'язками рівнянь $L^\tau\{\bar{g}\} = L^\tau\{\bar{\psi}\} = 0$ ($\Leftrightarrow L^*\{g\} = L^*\{\psi\} = 0$, див. розділи 1.1, 2.2), що є частковим випадком (74).

Розглянемо оператор $W = W[\psi, \varphi]$ загальних бінарних перетворень Дарбу ([35, 48, 54]), побудований за розв'язками лінійних задач (73)–(74)

$$W = I - \varphi(C + \mathcal{D}^{-1}\{\psi^\top\varphi\})^{-1}\mathcal{D}^{-1}\psi^\top := I - \tilde{\Phi}\mathcal{D}^{-1}\psi^\top,$$

$$W^{-1} = I + \varphi\mathcal{D}^{-1}(C + \mathcal{D}^{-1}\{\psi^\top\varphi\})^{-1}\psi^\top := I + \varphi\mathcal{D}^{-1}\tilde{\Psi}^\top,$$

де $\mathrm{Mat}_{K\times K}(\mathbb{C}) \ni C$ — деяка стала матриця.

Теорема 13. ([48,52]) *1. Оператор $\hat{L} = WLW^{-1}$ має вигляд*

$$\hat{L} = \hat{L}_{\geq 0} + \tilde{\Phi}(C\Lambda - \tilde{\Lambda}^\top C)\mathcal{D}^{-1}\tilde{\Psi}^\top, \;\; \hat{L}_{\geq 0} = \alpha\partial_\tau - \sum_{i=0}^{n(L)} \hat{u}_i\mathcal{D}^i \;\in \hat{\zeta}_{\geq 0}$$

2. Функція $f := W\{f\}$ задовольняє рівняння $\hat{L}\{\hat{f}\} = \lambda\hat{f}$.

Явний вигляд коефіцієнтів $\hat{u}_i(x,\tau)$ оператора $\hat{L}$ наведений в [51].

Зауваження. Якщо $A \in \hat{\zeta}_{\geq 0}$ і $h = h(x,\tau)$ — розв'язок рівняння $A\{h\} = 0$, то, очевидно, оператор $h^{-1}Ah \in \hat{\zeta}_{\geq 1}$ (позаяк вільний член $(h^{-1}Ah)_0$ — коефіцієнт при $\mathcal{D}^0$ у оператора $h^{-1}Ah$ дорівнює $h^{-1}A\{h\} = 0$).

Наслідок. *Нехай: 1) $\mathcal{M} = C\Lambda - \tilde{\Lambda}^\top C = 0$ (наприклад, $\Lambda = \tilde{\Lambda} = 0$), тобто $\hat{L} = \hat{L}_{\geq 0}$.*
2) $f = f_0 = f_0(x,\tau) \in \mathrm{Mat}_{N\times N}(\mathbb{C})$ є розв'язком рівняння (73), що відповідає власному значенню $\lambda = 0$ (тобто $f_0 \in \mathrm{Ker}L$).

Тоді, за теоремою 13, $\hat{L}\{\hat{f}_0\} = 0$, де $\hat{f}_0 := W\{f_0\}$, а, згідно із зауваженням, оператор $\hat{\hat{L}} := \hat{f}_0^{-1}\hat{L}\hat{f}_0 \in \zeta_{\geq 1}$.

Нехай тепер вихідний оператор $L \in \hat{\zeta}_{\geq 1}$ і є $\mathcal{D}$-косоермітовим: $L^* = \mathcal{D}^{-1}L\mathcal{D}$ ($\Rightarrow \alpha \in \mathbb{R}$, $u_0 = 0$). В якості розв'язку $f_0(x,\tau)$ візьмемо сталу одиничну матрицю: $f_0(x,\tau) = I_N := I$. З означення $\mathcal{D}$-косоермітового (як і $\mathcal{D}$-ермітового теж) оператора випливає, що в просторі розв'язків рівнянь (73)–(74) допустима редукція $\psi = \bar{\varphi}_x$: $L^\tau\{\bar{\varphi}_x\} = \overline{L^*\{\varphi_x\}} = -\overline{\mathcal{D}L\mathcal{D}^{-1}\{\varphi_x\}} = -\overline{\mathcal{D}L\{\varphi\}} = -\overline{\mathcal{D}\{\varphi\Lambda\}} = -\bar{\varphi}_x\bar{\Lambda}$, якщо $\tilde{\Lambda} = -\bar{\Lambda}$.

Теорема 14. *Нехай: 1. Вихідний оператор* $L \in \hat{\zeta}_{\geq 1} \cap \mathcal{D}u(\hat{\zeta})$*;*
2. Функції f і φ є розв'язками рівнянь (73), а $f_0 = I$*;*
3. $C\Lambda + \Lambda^* C = 0$ *(наприклад, можна взяти* $\Lambda = 0$*).*
Тоді: 1. $W_{\mathcal{D}U}[\varphi] := (W[\bar{\varphi}_x, \varphi]\{f_0\})^{-1} W[\bar{\varphi}_x, \varphi] \in \mathcal{D}U(\hat{\zeta})$*;*
2. $W_{\mathcal{D}U}[\varphi] L W_{\mathcal{D}U}^{-1}[\varphi] := \hat{L}_{\mathcal{D}u} \in \hat{\zeta}_{\geq 1} \cap \mathcal{D}u(\hat{\zeta})$.

Доведення. 1. а) Знайдемо $\hat{f}_0^{-1} = (W\{f_0\})^{-1} = (I - \varphi(C + \mathcal{D}^{-1}\{\varphi_x^*\varphi\})^{-1}\varphi^*)^{-1}$.
Зауваження. Оскільки потенціал $\mathcal{D}^{-1}\{\varphi_x^*\varphi\}$ визначається з точністю до деякої довільної сталої матриці $\tilde{C}$ (відповідно $\mathcal{D}^{-1}\{\varphi^*\varphi_x\}$ з точністю до $\tilde{C}^*$), то ми завжди, очевидно, можемо задовольнити рівність

$$\varphi^*\varphi(x,\tau) = C + C^* + \mathcal{D}^{-1}\{\varphi_x^*\varphi\} + \mathcal{D}^{-1}\{\varphi^*\varphi_x\}. \tag{75}$$

З ланцюжка рівностей

$$[I - \varphi(C + \mathcal{D}^{-1}\{\varphi_x^*\varphi\})^{-1}\varphi^*] \cdot [I - \varphi(C^* + \mathcal{D}^{-1}\{\varphi^*\varphi_x\})^{-1}\varphi^*] =$$

$$= I - \varphi(C + \mathcal{D}^{-1}\{\varphi_x^*\varphi\})^{-1}\varphi^* - \varphi(C^* + \mathcal{D}^{-1}\{\varphi^*\varphi_x\})^{-1}\varphi^* +$$

$$+\varphi(C + \mathcal{D}^{-1}\{\varphi_x^*\varphi\})^{-1}\left[(C + \mathcal{D}^{-1}\{\varphi_x^*\varphi\}) + (C^* + \mathcal{D}^{-1}\{\varphi^*\varphi_x\})\right](C^* + \mathcal{D}^{-1}\{\varphi^*\varphi_x\})^{-1}\varphi^* = I,$$

в якому ми скористались умовою (75), випливає, що $\hat{f}_0\hat{f}_0^* = I \Leftrightarrow \hat{f}_0 = I - \varphi(C + \mathcal{D}^{-1}\{\varphi_x^*\varphi\})^{-1}\varphi^* \in U(\mathbb{N})$.

б) Знайдемо явний вигляд оператора $W_{\mathcal{D}U}[\varphi] := \hat{f}_0^* W[\bar{\varphi}_x, \varphi]$

$$[I - \varphi(C^* + \mathcal{D}^{-1}\{\varphi^*\varphi_x\})^{-1}\varphi^*] \cdot [I - \varphi(C + \mathcal{D}^{-1}\{\varphi_x^*\varphi\})^{-1}\mathcal{D}^{-1}\varphi_x^*] =$$

$$= [I - \varphi(C^* + \mathcal{D}^{-1}\{\varphi^*\varphi_x\})^{-1}\varphi^*] - [\varphi(C + \mathcal{D}^{-1}\{\varphi_x^*\varphi\})^{-1} -$$

$$-\varphi(C^* + \mathcal{D}^{-1}\{\varphi^*\varphi_x\})^{-1}\varphi^*\varphi(C + \mathcal{D}^{-1}\{\varphi_x^*\varphi\})^{-1}]\mathcal{D}^{-1}\varphi_x^* \stackrel{(75)}{=}$$

$$= [I - \varphi(C^* + \mathcal{D}^{-1}\{\varphi^*\varphi_x\})^{-1}\varphi^*] - [\varphi(C + \mathcal{D}^{-1}\{\varphi_x^*\varphi\})^{-1} -$$

$$-\varphi(C + \mathcal{D}^{-1}\{\varphi_x^*\varphi\})^{-1} - \varphi(C^* + \mathcal{D}^{-1}\{\varphi^*\varphi_x\})^{-1}]\mathcal{D}^{-1}\varphi_x^* =$$

$$= I - \varphi(C^* + \mathcal{D}^{-1}\{\varphi^*\varphi_x\})^{-1}\mathcal{D}^{-1}\varphi^*\mathcal{D} = W_{\mathcal{D}U}[\varphi],$$

і ми отримали шуканий оператор такого ж вигляду, що й отримано в [55] (див. також [58]), де було доведено його $\mathcal{D}$-унітарність. Отже, перше твердження теореми 14 доведено.

2. $\mathcal{D}$-косоермітовість оператора $\hat{L}_{\mathcal{D}u}$ є простим наслідком $\mathcal{D}$-унітарності оператора $W_{\mathcal{D}U}[\varphi]$ ([55]), і, тому, справедливість другого твердження теореми 14 випливає з наслідку з теореми 13. □

Висновки і заключні зауваження.

1. У цій статті ми досліджували можливість використання різних типів операторів перетворень в алгебрі косоермітових інтегродиференціальних операторів Лакса з, так званої, Hk-cKP ієрархії. Основним висновком, який ми можемо зробити, є те, що бінарні перетворення найбільш пристосовані для інтегрування рівнянь Лакса з додатковими редукціями. Це обумовлено тим, що структура оператора загального бінарного перетворення допускає безпосередню редукцію до групи $U(\hat{\zeta})$ унітарних перетворень в алгебрі Лі $u(\hat{\zeta})$, а саме $W[\varphi] := I - \varphi(C + \mathcal{D}^{-1}\{\varphi^*\varphi\})^{-1}\mathcal{D}^{-1}\varphi^* \in U(\hat{\zeta})$, так як $W^{-1} = W^*$ (це випливає з останньої леми розділу 2).

2. Використання класичних перетворень Дарбу-Крама-Матвєєва, як ми зауважили в кінці розділу 3, пов'язане з додатковими проблемами, які ще потребують свого вирішення. Однак відкидати цей підхід, на наш погляд, недоречно з таких міркувань:

а) унітарність оператора перетворень є лише достатньою умовою збереження косоермітовості при одягаючому перетворенні $u(\hat{\zeta}) \ni L \to WLW^{-1} := \hat{L} \in u(\hat{\zeta})$; критерієм збереження цієї структури, як неважко показати, є належність оператора $WW^* \in S(L)$ до стабілізатора елемента L в $\hat{\zeta}$. Прикладом такого неунітарного оператора і є оператор елементарного класичного перетворення Дарбу $W_e[\varphi] = \varphi\mathcal{D}\varphi^{-1}$, наведений нами в розділі 3.4 (див. теорему 8).

б) У розділі 3.3 ми розглянули лише одягаюче перетворення (70) (теорема 7). Можливо перетворення (71) з тим же оператором W дозволить отримати нові розв'язки рівнянь з Hk-cKP ієрархії. Ми плануємо продовжити дослідження в цьому напрямку.

в) Хоча результати теореми 12 для НРШ ($k = 1$) дозволяють побудувати значно ширшу множину розв'язків ніж теорема 8, однак нам не вдалось встановити, що вона містить розв'язки (56).

3. У розділі 4, відштовхуючись від загальних бінарних перетворень Дарбу, ми продемонстрували простий спосіб побудови $\mathcal{D}$-унітарних перетворень. На нашу думку, це дозволить у найближчий час довести загальні теореми Дарбу для $\mathcal{D}$Hk-cmKP ієрархії [55], використовуючи аналогічні результати для k-cKP ієрархії, отримані в [54]. Автори планують присвятити цим дослідженням наступну публікацію.

На завершення хочемо подякувати Рецензенту за корисні зауваження щодо редакції попереднього варіанту роботи, що дозволило значно покращити кінцевий вигляд нашої статті.

ЛІТЕРАТУРА

1. Самойленко А.М., Самойленко В.Г, Сидоренко Ю.М. *Ієрархія рівнянь Кадомцева-Петвіашвілі з нелокальними в'язями: Багатовимірні узагальнення та точні розв'язки редукованих систем* // Укр. мат. журн. – 1999. – Т. 51, №1. – С.78-97.

2. Митропольський Ю.О., Самойленко В.Г, Сидоренко Ю.М. *Просторово-двовимірне узагальнення ієрархії Кадомцева-Петвіашвілі з нелокальними в'язями* // Доп. НАН України. – 1999. – №8. – С.19-23.

3. Konopelchenko B., Sidorenko Yu., Strampp W. *(1+1)-dimensional integrable systems as symmetry constraints of (2+1)-dimensional systems* // Phys. Lett. A. – 1991. – V. 157. – P. 17-21.

4. Sidorenko Yu., Strampp W. *Symmetry constraints of the KP–hierarchy* // Inverse Problems. – 1991. – V. 7. – P. L37-L43.

5. Konopelchenko B., Strampp W. *New reductions of the Kadomtsev-Petviashvili hierarchy and two-dimensional Toda hierarchies via symmetry constraints* // J. Math. Phys. – 1992. – V. 33, №11. – P. 3676–3684.

6. Cheng Yi. *Constrained of the Kadomtsev-Petviashvili hierarchy* // J. Math. Phys. – 1992. – V. 33. – P. 3774-3787.

7. Oevel W., Sidorenko Yu., Strampp W. *Hamiltonian structures of the Melnicov system and its Reductions* // Inverse Problems. – 1993. – V. 9. – P. 737-747.

8. Sidorenko Yu. *KP–hierarchy and (1+1)-dimensional multicomponent integrable systems* // Ukr. Math. Journ. – 1993. – V. 25, №1. – P. 91-104.

9. Sidorenko Yu., Strampp W. *Multicomponent integrable reductions in Kadomtsev-Petviashvilli hierarchy* // J. Math. Phys. – 1993. – V. 34, №4. – P. 1429-1446.

10. Марченко В.А. Спектральная теория операторов Штурма-Лиувилля. – Киев: Наук. думка, 1972. – 219 с.

11. Фаддеев Л.Д. *Обратная задача квантовой теории рассеяния* // Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики.- М.: ВИНИТИ, 1974. – С. 93-180.

12. Захаров В.Е., Шабат А.Б. *Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния* // Функцион. анализ и его прил. – 1974. – Т. 8, №3. – С. 43-53.

13. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов. Метод обратной задачи. – М.: Наука, 1980. – 320 с.

14. Нижник Л.П. Обратные задачи рассеяния для гиперболических уравнений.- Киев: Наук. думка, 1991. – 232 с.

15. Солитоны / Под ред. Р. Буллафа, Ф. Кодри. – М.: Мир, 1983. – 408 с.

16. Марченко В.А. Нелинейные уравнения и операторные алгебры. – Киев: Наук. думка, 1986. – 156 с.

17. Dickey L.A. *Soliton equations and Hamiltonian systems* // Adv. Math. Phys. – 1991. – V. 12. – 310 p.

18. Ohta Y., Satsuma J., Takahashi D., Tokihiro T. *An elementary introduction to Sato theory* // Prog. Theor. Phys. Suppl. – 1988. – V. 94. – P. 210-241.

19. Darboux G. Leçons sur la Théorie Générale de Surface et les Applications Geometriques du Calcul Infinitesimal II., Paris, Gauthiers - Villars, 1889.

20. Crum M.M. *Associated Sturm-Liouville systems* // Quart. J. Math. Oxford, – 1955. – V. 2, №6, P. 121-127.

21. Matveev V.B. *Darboux transformations and explicit solutions of the Kadomtsev–Petviashvily equation depending on the functional parameters* // Letter in Mathematical Physics, – V. 3. – 1979. – P. 213-216.

22. Matveev V. B., Salle M.A. Darboux transformations and solitons.- Berlin Heidelberg, Springer-Verlag. – 1991.

23. Nimmo J.J.C. *Darboux transformations for a two-dimensional Zakharov-Shabat AKNS spectral problem* // Inverse Problems. – 1992. – V.8. – P. 219-243.

24. Oevel W., Schief W. *Darboux theorems and the KP–hierarchy* // Applications of Analisys and Geometric Methods to Nonlinear Differential Equations. Ed. Clarcson P.A. – Dordrecht: Kluwer. – 1993. – P. 193-206.

25. Oevel W. *Darboux Theorems and Wronskian Formulas for Integrable Systems I: Constrained KP Flows* // Physica A. – 1993. – V.195. – P. 533-576.

26. Сидоренко Ю. Н. *Метод одевания и преобразования Дарбу* // Диф. уравнения. – 2001. – Т. 37, №6.– С. 853-854.

27. Бабич М.В., Матвеев В.Б., Салль М.А. *Бинарное преобразование Дарбу для цепочки Тоды* // В кн.: Вопросы квантовой теории поля и статистической физики. (Зап. науч. семин. ЛОМИ АН СССР, Т. 145), Л.: Наука – 1985. – С. 34-45.

28. Matveev V. B., Salle M.A. *On some new class of the solutions of the KP equation and Johnson equation* // Some Topics on Inverse Problems. – 1988. – P. 182-212.

29. Boiti M., Pempinelli F., Pogrebkov A.K., Polivanov M.C. *New features of Bäcklund and Darboux transformations in 2+1 dimensions* // Inverse Problems. – 1991. – V.7. – P. 43-56.

30. Leble S.B., Ustinov N.V. *Third order spectral problems: reductions and Darboux transformations* // Inverse Problems. – 1994. – V.10. – P. 617-633.

31. Willox R., Loris I., Gilson C.R. *Binary Darboux transformations for constrained KP hierarchies* // Inverse problems. – 1997. – V.13. – P. 849-865.

32. Nimmo J.J.C. *Darboux transformations from reductions of the KP hierarchy* // Nonlinear Evolution Equations and Dynamical Systems. NEEDS '94. – World Scientific. – 1995. – P. 168-178.

33. Guil F., Manas M. *Darboux transformation for the Davey-Stewartson equations* // Phys. Lett. A. – 1996. – V.217. – P. 1-6.

34. Ниммо Дж.Дж.К., Джилсон К.Р., Охта Й. *Применения преобразований Дарбу к самодуальным уравнениям Янга-Миллса* // Теор. и матем. физика. – 2000. – Т.122, №2. – С. 284-293.

35. Sydorenko Yu.M. *Factorization of matrix differential operators and Darboux-like transformations* // Математичні студії. – 2003. – Т. 19, №2. – С. 181-192.

36. Sakhnovich A. *Iterated Bäcklund–Darboux transformation and transfer matrix-function (nonisosrectral case)* // Chaos, Solitons & Fractals. – 1996. – V.7, №8 – P. 1251-1259.

37. Sakhnovich A. *Generalized Bäcklund-Darboux transformation: spectral properties and nonlinear equations* // Journ. of Math. Anal. and Applic. – 2001. – V.262. – P. 274-306.

38. Sakhnovich A.I. *Matrix Kadomtsev-Petviashvili equation: matrix identities and explicit non-singular solutions* // J. Phys. A.: Math. Gen. – 2003. – V.36, №18. – P. 5023-5034.

39. Сидоренко Ю.М. *Матричне узагальнення ієрархії Кадомцева-Петвіашвілі і нелінійні інтегровні системи* // Нелінійні коливання. – 1999. – Т.2, №2. – С. 30-39.

40. Кадомцев Б.Б., Петвиашвили В.И. *Об устойчивости уединенных волн в слабо диспергирующих средах* // Докл. АН СССР. – 1970. – Т. 192, №4. – С. 753-756.

41. Манаков С. В. *Про интегрируемость уравнений Эйлера динамики n-мерного твердого тела* // Функцион. анализ и его прил. – 1976. – Т. 10, №4. – С. 93-94.

42. Yajima N., Oikawa M. *Formation and interaction of Sonic-Langmuir solitons: inverse scattering method* // Progress Theoret. Phys. – 1976. – V. 56, №6. – P. 1719-1739.

43. Дринфельд В.Г., Соколов В.В. *Алгебры Ли и уравнения типа Кортевега–де Фриза* // Современные проблемы математики. (Итоги науки и техники) – М.: ВИНИТИ. – 1984. – т. 24, С. 81-180.

44. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальнным уравнениям. – М.: Наука, 1976. – 576 с.

45. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. – 525 с.

46. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.:ИЛ, 1958. – 475 с.

47. Сидоренко Ю.М., Гвоздева Е.В. *Бинарные преобразования общих уравнений Лакса-Захарова-Шабата* // Нелинейные краев. задачи мат. физики и их прилож. – Киев: Ин-т математики НАН Украины. – 1999. – С. 220-224.

48. Сидоренко Ю.М. *Бінарні перетворення і (2+1)-вимірні інтегровні системи* // Укр. мат. журн. – 2002. – Т. 54, №11. – С. 1531-1550.

49. Сидоренко Ю.М. *Нелокальні редукції в системах, інтегровних методом оберненої задачі* // Нелинейные краевые задачи мат.физики и их прилож. Киев: Ин–т математики НАН Украины. – 1998. – С. 199-202.

50. Сидоренко Ю.М. *Про узагальнення τ–функції для ієрархії Кадомцева-Петвіашвілі* // Вісник Київського університету. Сер. математика і механіка. – 1998. – С. 40-49.

51. Сидоренко Ю.М. *Метод інтегрування рівнянь Лакса з нелокальними редукціями* // Доповіді НАН України. – 1999. – №9. – С. 33-36.

52. Berkela Yu.Yu., Sidorenko Yu.M. *The exact solutions of some multicomponent integrable models* // Математичні студії. – 2002. – Т. 17, №1. – С. 47–58.

53. Berkela Yu.Yu. *Exact solutions of matrix generalization of some integrable systems* // Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. – 2002. – V. 43, Part 1. – P. 296-301.

54. Sydorenko Yu. *Generalized Binary Darboux–like Theorem for Constrained Kadomtsev–Petviashvili (cKP) Flows* // Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. – 2004. – V. 50, Part 1. – P. 470-477.

55. Sidorenko Yu. *Transformation operators for integrable hierarchies with additional reductions* // Proceedings of Institute of Math. of NAS of Ukraine. – 2002.– V. 43, Part 1. – P. 352-357.

56. Imai K. *Dromion and lump solutions of the Ishimori-I equation* // Progress of Theor. Physics. – 1997. – V. 98, №5. – P. 1013-1023.

57. Ishimori Y. *Multi-vortex solutions of a two-dimentional nonlinear wave equation* // Progr. Theor. Rhys.- 1983. – V.72. №1. – C. 33-39.

58. Сидоренко Ю., Беркела Ю. *Інтегрування нелінійних просторово-двовимірних рівнянь Гейзенберга* // Математичні студії. – 2002. – Т. 18, №1. – С. 57-68.

59. Berkela Yu. *Integration of Bi-hamiltonian Systems by Using the Dressing Method* // Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. – 2004. – V. 50, Part 1. – P. 319-324.

60. Беркела Ю., Сидоренко Ю. *Векторно-матричні узагальнення бігамільтонових динамічних систем та їх інтегрування* // Математичні студії. – 2005. – Т. 23, №1. – С. 31–51.

61. Konopelchenko B.G. Solitons in Multidimensions. Singapore: World Scientific, 1993.

Карпатський біосферний заповідник
Львівський національний університет імені Івана Франка

Надійшло 26.05.2004
Після переробки 02.11.2004