УДК 517.53

Ю. С. Трухан

ЗБЕРЕЖЕННЯ ОБМЕЖЕНОСТІ l-ІНДЕКСУ ДОБУТКУ БЛЯШКЕ ПРИ ЗСУВАХ НУЛІВ

Yu. S. Trukhan. *Preservation of l-index boundedness of the Blaschke product under zeros shifts*, Matematychni Studii, **25** (2006) 29–37.

For the Blaschke product with zeros a_k and of bounded l-index the l-index boundedness of the product with zeros $a_k + \psi_k$ is investigated.

Ю. С. Трухан. *Сохранение ограниченности l-индекса произведения Бляшке при сдвигах нулей* // Математичні Студії. – 2006. – Т.25, №1. – С.29–37.

Для произведения Бляшке с нулями a_k ограниченного l-индекса исследуется ограниченность l-индекса произведения с нулями $a_k + \psi_k$.

1. Вступ. Нехай (a_k) — послідовність чисел з $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$, занумерованих у порядку неспадання модулів, $\sum_{k=1}^{\infty}(1 - |a_k|) < +\infty$. Тоді добуток Бляшке

$$B(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k|}{a_k} \frac{a_k - z}{1 - \overline{a}_k z} \tag{1}$$

задає аналітичну і обмежену в $\mathbb{D}$ функцію. Для додатної неперервної на $[0, 1)$ функції l такої, що $(1 - r)l(r) > \beta > 1$ для всіх $r \in [0, 1)$, функція B за означенням ([1, с. 71]) називається функцією обмеженого l-індексу, якщо існує $N \in \mathbb{Z}_+$ таке, що $\frac{|B^{(n)}(z)|}{n! l^n(|z|)} \leq \max\left\{\frac{|B^{(k)}(z)|}{k! l^k(|z|)} : 0 \leq k \leq N\right\}$ для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ і $z \in \mathbb{D}$. Як і в [1, с. 71], для $q \in [0, \beta)$ покладемо $\lambda_1(q) = \inf\left\{\frac{l(r)}{l(r_0)} : |r - r_0| \leq \frac{q}{l(r_0)},\, 0 \leq r_0 < 1\right\}$ і $\lambda_2(q) = \sup\left\{\frac{l(r)}{l(r_0)} : |r - r_0| \leq \frac{q}{l(r_0)},\, 0 \leq r_0 < 1\right\}$ і будемо говорити, що $l \in Q_\beta(\mathbb{D})$, якщо $(1 - r)l(r) > \beta > 1$ для всіх $r \in [0, 1)$ і $0 < \lambda_1(q) \leq 1 \leq \lambda_2(q) < +\infty$ для кожного $q \in [0, \beta)$. Для неспадної функції $l \in Q_\beta(\mathbb{D})$ припустимо також додатково, що $l(1 - 1/2x) = O(l(1 - 1/x))$ $(x \to +\infty)$ і клас таких функцій l позначимо через $Q^*_\beta(\mathbb{D})$. Легко бачити, що до класу $Q^*_\beta(\mathbb{D})$ належить, наприклад, функція $l(r) = \frac{p}{(1-r)^\rho}$ з $p > \beta$ і $\rho \geq 1$.

Зауважимо, що еквівалентне означення обмеженості l-індексу аналітичної в $\mathbb{D}$ функції наведено в [2], де замість $l(|z|)$ в означенні стоїть $l\left(\frac{1}{1-|z|}\right)$, а додатна і неперевна на $[1, +\infty)$ функція l така, що $l(x)/x > \beta > 1$, $x \in [1, +\infty)$. Тоді умова $l \in Q^*_\beta(\mathbb{D})$, для такої функції l, має наступний вигляд: $l(2x) = O(l(x))$ $(x \to +\infty)$.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 30D50.

Тут ми вивчимо умови на послідовність $\psi = (\psi_k)$ комлексних чисел, за яких з обмеженості l-індексу функції B, що задається рівністю (1), випливає обмеженість l-індексу добутку

$$B_{\psi}(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{|b_k|}{b_k} \frac{b_k - z}{1 - \bar{b}_k z}, \quad b_k = a_k + \psi_k. \tag{2}$$

При цьому скористаємось методикою з [3], використаною там для дослідження цілих функцій обмеженого індексу та застосованою в [4] для дослідження цілих функцій обмеженого l-індексу.

Основні твердження цієї статті містять теореми 1 і 2.

Теорема 1. *Нехай функція $l \in Q^*_{\beta}(\mathbb{D})$, а добуток Бляшке (1) з додатними нулями a_k є обмеженого l-індексу. Якщо послідовність $\psi = (\psi_k)$ комплексних чисел задовольняє умову $|\psi_k| \le \frac{K}{l(a_k)}$, $(k \ge 1)$, де $K = \mathrm{const} > 0$ і $K < \frac{q^*}{2\lambda_2(q^*)}$ для деякого $q^* \in (0, \beta)$, то добуток Бляшке (2) з нулями $b_k = a_k + \psi_k$ є також обмеженого l-індексу.*

Теорема 2. *Нехай функція $l \in Q^*_{\beta}(\mathbb{D})$, а добуток Бляшке (1) є обмеженого l-індексу з комплексними нулями a_k, що задовольняють умову $l(|a_k|)(|a_{k+1}| - |a_k|) > 2q_0$ для деякого $q_0 \in (0, \beta)$ і всіх $k \ge k_0$. Якщо послідовність $\psi = (\psi_k)$ комплексних чисел задовольняє умову $|\psi_k| \le \frac{K}{l(|a_k|)}$, $(k \ge 1)$, де $K = \mathrm{const} > 0$ і $K < \min\{\beta/2, q_0\}$, то добуток Бляшке (2) з нулями $b_k = a_k + \psi_k$ є також обмеженого l-індексу.*

Зауважимо, що умова $|\psi_k| \le \frac{K}{l(|a_k|)}$ забезпечує належність до $\mathbb{D}$ всіх b_k та збіжність добутку (2). Справді, $1 - |b_k| = 1 - |a_k + \psi_k| \ge 1 - |a_k| - \frac{K}{l(|a_k|)} \ge (1 - |a_k|) - \frac{K}{\beta}(1 - |a_k|) \ge$ $\ge (1 - \frac{K}{\beta})(1 - |a_k|) > 0$, звідки і випливає, що $b_k \in \mathbb{D}$ для всіх $k \in \mathbb{N}$. А оскільки $1 - |b_k| = 1 - |a_k + \psi_k| \le 1 - |a_k| + \frac{K}{l(|a_k|)} \le (1 - |a_k|) + \frac{K}{\beta}(1 - |a_k|) \le (1 + \frac{K}{\beta})(1 - |a_k|)$, то $\sum_{k=1}^{\infty}(1 - |b_k|) < +\infty$.

Для доведення теорем нам потрібні декілька лем.

2. Допоміжні твердження. Для $l \in Q_{\beta}(\mathbb{D})$ і $q \in (0, \beta)$ покладемо

$$G_q(B) = \bigcup_k \left\{ z : \, |z - a_k| \le \frac{q}{l(|a_k|)} \right\}$$

і $n(r, z_0, 1/B) = \sum_{|a_k - z_0| \le r} 1$. Безпосереднім наслідком теореми 2.1 з [1, с. 27] є наступна лема.

Лема 1. *Для функції $l \in Q_{\beta}(\mathbb{D})$, $\beta > 1$, добуток Бляшке B є обмеженого l-індексу тоді і тільки тоді, коли 1) для кожного $q \in (0, \beta)$ існує таке $P(q) > 0$, що $|B'(z)/B(z)| \le P(q) l(|z|)$ для всіх $z \in \mathbb{D} \setminus G_q(B)$, і 2) для кожного $q \in (0, \beta)$ існує таке $n^*(q) \in \mathbb{N}$, що $n(q/l(|z_0|), z_0, 1/B) \le n^*(q)$ для кожного $z_0 \in \mathbb{D}$.*

Із леми 2 в [5] бачимо, що є правильною наступна лема.

Лема 2. *Умова 2) леми 1 виконується, якщо $l \in Q_{\beta}(\mathbb{D})$, $\beta > 1$, і для деякого $q_0 \in (0, \beta)$ і всіх $k \ge k_0$*

$$|a_{k+1}| - |a_k| > 2q_0/l(|a_k|).$$

А з леми 4 в [5] випливає, що правильною є і така лема.

Лема 3. *Якщо* $l \in Q_\beta(\mathbb{D})$, $\beta > 1$, $|z - a_n| \geq \frac{\rho}{l(|a_n|)}$ *і* $|z - a_{n+1}| \geq \frac{\rho}{l(|a_{n+1}|)}$, $0 < \rho < \beta$, *то,*

$$\left|\frac{1}{z - a_n}\right| + \left|\frac{1}{z - a_{n+1}}\right| \leq P_1(\rho) l(|z|), \quad P_1(\rho) = \mathrm{const} > 0.$$

Лема 4. *Нехай неспадна функція* $l \in Q_\beta(\mathbb{D})$, *а послідовність комплексних чисел* (c_k) *з* $\mathbb{D}$ *є така, що* $l(|c_k|)(|c_{k+1}| - |c_k|) > 2q_0$ *для деякого* $q_0 \in (0, \beta)$ *і всіх* $k \geq k_0$. *Тоді для кожного* $r \in (0,1)$

1) $\sum_{|c_k| \leq r} \frac{1}{(1-|c_k|)^2 l(|c_k|)} \leq K_1 l(r), \quad K_1 = \mathrm{const} > 0;$
2) $\sum_{|c_k| > r} \frac{1}{l(|c_k|)} \leq K_2(1 - r), \quad K_2 = \mathrm{const} > 0.$

Доведення. Визначимо за індукцією послідовність $r_{n+1} = r_n + \frac{q_0}{\lambda_2(q_0) l(r_n)}$, $n \in \mathbb{N}$, де $r_1 \in (0, |c_1|)$.

Доведемо, що $\lim_{n\to\infty} r_n = 1$. Зрозуміло, що послідовність (r_n) є неспадною. Оскільки $l \in Q_\beta(\mathbb{D})$, то

$$1 - r_{n+1} = 1 - r_n - \frac{q_0}{\lambda_2(q_0) l(r_n)} = \frac{l(r_n)(1 - r_n) - q_0/\lambda_2(q_0)}{l(r_n)} \geq \frac{\beta - q_0/\lambda_2(q_0)}{l(r_n)} \geq \frac{\beta - q_0}{l(r_n)} > 0.$$

Тому $r_{n+1} < 1$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Отже, існує $\lim_{n\to\infty} r_n = C \leq 1$. Припустимо, що $C < 1$. Тоді, спрямувавши $n \to +\infty$ в означенні послідовності (r_n), отримаємо $C = C + q_0/\lambda_2(q_0) l(C)$, що неможливо. Отже, $C = 1$.

Нехай $n_c(r) = \sum_{|c_k| \leq r} 1$ — лічильна функція послідовності (c_k). З умови $l(|c_k|)(|c_{k+1}| - |c_k|) > 2q_0$ випливає, що для всіх $r \in (0,1)$

$$n_c\left(r + \frac{q_0}{\lambda_2(q_0) l(r)}\right) - n_c\left(r - \frac{q_0}{\lambda_2(q_0) l(r)}\right) \leq 1.$$

Справді, припустимо, що для деякого $r \in (0,1)$

$$r - \frac{q_0}{\lambda_2(q_0) l(r)} < |c_k| < |c_{k+1}| \leq r + \frac{q_0}{\lambda_2(q_0) l(r)}.$$

Тоді

$$|c_{k+1}| - |c_k| \leq \frac{2q_0}{\lambda_2(q_0) l(r)}$$

і

$$l(|c_k|) \leq \lambda_2\left(\frac{q_0}{\lambda_2(q_0)}\right) l(r) \leq \lambda_2(q_0) l(r),$$

тобто

$$|c_{k+1}| - |c_k| \leq \frac{2q_0}{l(|c_k|)},$$

що неможливо. Звідси випливає, що

$$n_c(r_{n+1}) - n_c(r_n) = n_c\left(r_n + \frac{q_0}{\lambda_2(q_0) l(r_n)}\right) - n_c(r_n) \leq$$
$$\leq n_c\left(r_n + \frac{q_0}{\lambda_2(q_0) l(r_n)}\right) - n_c\left(r_n - \frac{q_0}{\lambda_2(q_0) l(r_n)}\right) \leq 1.$$

Нехай $r \geq r_1$, тоді $r \in [r_m, r_{m+1})$ для деякого $m \in \mathbb{N}$. Використовуючи означення (r_k) та належність l до $Q_\beta(\mathbb{D})$, маємо

$$\sum_{|c_k|\leq r} \frac{1}{(1-|c_k|)^2 l(|c_k|)} \leq \sum_{k=1}^{m} \sum_{r_k<|c_j|\leq r_{k+1}} \frac{1}{(1-|c_j|)^2 l(|c_j|)} \leq \sum_{k=1}^{m} \frac{n_c(r_{k+1})-n_c(r_k)}{(1-r_{k+1})^2 l(r_k)} \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(1-r_{k+1})^2 l(r_k)} \leq \lambda_2\left(\frac{q_0}{\lambda_2(q_0)}\right) \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(1-r_{k+1})^2 l(r_{k+1})} =$$

$$= \frac{\lambda_2(q_0)}{q_0}\lambda_2\left(\frac{q_0}{\lambda_2(q_0)}\right) \sum_{k=1}^{m} \frac{r_{k+2}-r_{k+1}}{(1-r_{k+1})^2} \leq \frac{\lambda_2^2(q_0)}{q_0} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(1-r_{k+1})^2} \int_{r_{k+1}}^{r_{k+2}} dt \leq$$

$$\leq \frac{\lambda_2^2(q_0)}{q_0} \sum_{k=1}^{m} \int_{r_{k+1}}^{r_{k+2}} \frac{dt}{(1-t)^2} = \frac{\lambda_2^2(q_0)}{q_0} \int_{r_2}^{r_{m+2}} \frac{dt}{(1-t)^2} \leq \frac{\lambda_2^2(q_0)}{q_0} \frac{1}{(1-r_{m+2})} <$$

$$< \frac{\lambda_2^2(q_0)}{q_0\beta} l(r_{m+2}) \leq \frac{\lambda_2^4(q_0)}{q_0\beta} l(r_m) \leq \frac{\lambda_2^4(q_0)}{q_0\beta} l(r).$$

Твердження 1) доведено. Доведемо твердження 2). Подібно, як і у доведенні 1),

$$\sum_{|c_k|>r} \frac{1}{l(|c_k|)} \leq \sum_{k=m}^{\infty} \sum_{r_k<|c_j|\leq r_{k+1}} \frac{1}{l(|c_j|)} \leq \sum_{k=m}^{\infty} \frac{n_c(r_{k+1})-n_c(r_k)}{l(r_k)} \leq \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{l(r_k)} \leq$$

$$\leq \lambda_2\left(\frac{q_0}{\lambda_2(q_0)}\right) \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{l(r_{k+1})} = \frac{\lambda_2(q_0)}{q_0}\lambda_2\left(\frac{q_0}{\lambda_2(q_0)}\right) \sum_{k=m}^{\infty} (r_{k+2}-r_{k+1}) =$$

$$= \frac{\lambda_2(q_0)}{q_0}\lambda_2\left(\frac{q_0}{\lambda_2(q_0)}\right)(1-r_{m+1}) \leq \frac{\lambda_2^2(q_0)}{q_0}(1-r).$$

Лему 4 доведено. □

Доведемо також наступну лему.

Лема 5. *Нехай функція $l \in Q_\beta^*(\mathbb{D})$, а B — добуток Бляшке з комплексними нулями (a_k), що задовольняють умову $l(|a_k|)(|a_{k+1}|-|a_k|) > 2q_0$ для деякого $q_0 \in (0,\beta)$ і всіх $k \geq k_0$. Припустимо, що послідовність $\psi = (\psi_k)$ комплексних чисел така, що $|\psi_k| \leq \frac{K}{l(|a_k|)}$, $(k \geq 1)$, де $K < \min\{\beta/2, 2q_0\}$. Тоді для будь-яких $\rho \in (0,q_0)$ і $q \in (0,q_0)$ існує таке число $P(\rho,q) > 0$, що для всіх $z \in \mathbb{D} \setminus (G_\rho(B) \cup G_q(B_\psi))$*

$$\left|\frac{B'_\psi(z)}{B_\psi(z)} - \frac{B'(z)}{B(z)}\right| \leq P(\rho,q)\, l(|z|). \tag{3}$$

Доведення. Легко перевірити, що

$$\frac{B'(z)}{B(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-|a_k|^2}{(z-a_k)(1-\overline{a}_k z)}$$

і

$$\frac{1-|b_k|^2}{(z-b_k)(1-\overline{b}_k z)} - \frac{1-|a_k|^2}{(z-a_k)(1-\overline{a}_k z)} = \frac{\psi_k(1-\overline{a}_k z)(1-\overline{b}_k z) + \overline{\psi}_k(z-a_k)(z-b_k)}{(z-a_k)(1-\overline{a}_k z)(z-b_k)(1-\overline{b}_k z)} =$$

$$= \frac{\psi_k}{(z-a_k)(z-b_k)} + \frac{\overline{\psi}_k}{(1-\overline{a}_k z)(1-\overline{b}_k z)}.$$

Позначимо $C_n = \{z: |a_n| \le |z| \le |a_{n+1}|\}$, $n \ge k_0+1$, і нехай $z \in C_n \setminus (G_\rho(B) \cup G_q(B_\psi))$.

З умови $l(|a_k|)(|a_{k+1}| - |a_k|) > 2q_0$ для $k \le n-1$ випливає, що

$$\min\{|z-a_k|,\, |z-a_k-\psi_k|\} \ge |z| - |a_k| - |\psi_k| \ge |a_n| - |a_k| - |\psi_k| >$$
$$> \sum_{j=k+1}^{n-1} \frac{2q_0}{l(|a_j|)} + \frac{2q_0 - K}{l(|a_k|)} \ge 2q_0 \frac{n-k-(K/2q_0)}{l(|a_n|)} \ge 2q_0 \frac{n-k-(K/2q_0)}{l(|z|)},$$

а з умови $l \in Q^*_\beta(\mathbb{D})$ для $1-|a_k| \le 2(1-r)$ маємо $l(r) \le K_4 l(|a_k|)$. Тому

$$\sum_{\substack{1-|a_k|\le 2(1-r)\\ k\le n-1}} \frac{|\psi_k|}{|z-a_k||z-a_k-\psi_k|} \le \sum_{\substack{|a_k|\ge 2r-1\\ k\le n-1}} \frac{K/l(|a_k|)}{4q_0^2(n-k-(K/2q_0))^2/l^2(r)} \le$$
$$\le \frac{K}{4q_0^2} l(r) \sum_{\substack{|a_k|\ge 2r-1\\ k\le n-1}} \frac{l(r)}{(n-k-(K/2q_0))^2 l(|a_k|)} \le \tag{4}$$
$$\le \frac{KK_4}{4q_0^2} l(r) \sum_{k\le n-1} \frac{1}{(n-k-(K/2q_0))^2} \le K_5 l(r).$$

Якщо ж $k \le n-1$ і $1-|a_k| \ge 2(1-r)$, то $|z-a_k| \ge (1-|a_k|) - (1-r) \ge \frac{1-|a_k|}{2}$, а

$$|z-a_k-\psi_k| \ge \frac{1-|a_k|}{2} - \frac{K}{l(|a_k|)} > \frac{1-|a_k|}{2} - \frac{K(1-|a_k|)}{\beta} = \frac{\beta-2K}{2\beta}(1-|a_k|).$$

Тому, використовуючи твердження 1) леми 4, отримуємо

$$\sum_{\substack{(1-|a_k|)\ge 2(1-r)\\ k\le n-1}} \frac{|\psi_k|}{|z-a_k||z-a_k-\psi_k|} \le \frac{4\beta}{\beta-2K} \sum_{|a_k|\le 2r-1} \frac{K}{(1-|a_k|)^2 l(|a_k|)} \le$$
$$\le \frac{4\beta K}{\beta-2K} K_1 l(2r-1) \le K_6 l(r). \tag{5}$$

Зауважимо, що за умови $r < 1/2$ цей доданок перетворюється в нуль.

Далі, для $k \ge n+2$ маємо

$$\min\{|a_k - z|,\, |a_k+\psi_k-z|\} \ge |a_k| - |z| - |\psi_k| \ge |a_k| - |a_{n+1}| - |\psi_k| >$$
$$> \sum_{j=n+1}^{k-1} \frac{2q_0}{l(|a_j|)} - \frac{K}{l(|a_k|)} \ge 2q_0 \frac{k-n-1-(K/2q_0)}{l(|a_k|)},$$

а для $2(1-|a_k|) \ge (1-r)$ з умови $l \in Q^*_\beta(\mathbb{D})$ випливає $l(|a_k|) \le K_4 l(r)$. Якщо ж $2(1-|a_k|) \le (1-r)$, то $|a_k - z| \ge (1-r) - (1-|a_k|) \ge \frac{1-r}{2}$, а

$$|a_k+\psi_k-z| \ge |a_k-z| - |\psi_k| \ge \frac{1-r}{2} - \frac{K}{l(|a_k|)} > \frac{1-r}{2} - \frac{K(1-|a_k|)}{\beta} \ge$$
$$\ge \frac{1-r}{2} - \frac{K(1-r)}{2\beta} = \frac{\beta-K}{2\beta}(1-r).$$

Отже, використовуючи твердження 2) леми 4, отримуємо

$$\sum_{k=n+2}^{\infty}\frac{|\psi_k|}{|a_k-z||a_k+\psi_k-z|}\le\sum_{\substack{1-|a_k|\ge\frac{1-r}{2}\\k\ge n+2}}\frac{|\psi_k|}{|a_k-z||a_k+\psi_k-z|}+$$
$$+\sum_{\substack{1-|a_k|\le\frac{1-r}{2}\\k\ge n+2}}\frac{|\psi_k|}{|a_k-z||a_k+\psi_k-z|}\le\frac{1}{4q_0^2}\sum_{\substack{1-|a_k|\ge\frac{1-r}{2}\\k\ge n+2}}\frac{K/l(|a_k|)}{(k-n-1-(K/2q_0))^2/l^2(|a_k|)}+$$
$$+\frac{4\beta}{\beta-K}\sum_{|a_k|\ge\frac{1+r}{2}}\frac{K}{(1-r)^2l(|a_k|)}\le\frac{KK_4}{4q_0^2}l(r)\sum_{k\ge n+2}\frac{1}{(k-n-1-(K/2q_0))^2}+ \tag{6}$$
$$+K_7\frac{(1-\frac{1+r}{2})}{(1-r)^2}\le K_8l(r)+\frac{K_7}{2}\frac{1}{(1-r)}\le K_9l(r).$$

Далі, якщо $z\in C_n$ і $|z-a_n|\ge\frac{\rho}{l(|a_n|)}$, $|z-b_n|\ge\frac{q}{l(|b_n|)}$, $|z-a_{n+1}|\ge\frac{\rho}{l(|a_{n+1}|)}$, $|z-b_{n+1}|\ge\frac{q}{l(|b_{n+1}|)}$, то, використовуючи лему 3, маємо

$$\left|\frac{1-|b_n|^2}{(z-b_n)(1-\overline{b}_nz)}-\frac{1-|a_n|^2}{(z-a_n)(1-\overline{a}_nz)}\right|+$$
$$+\left|\frac{1-|b_{n+1}|^2}{(z-b_{n+1})(1-\overline{b}_{n+1}z)}-\frac{1-|a_{n+1}|^2}{(z-a_{n+1})(1-\overline{a}_{n+1}z)}\right|\le \tag{7}$$
$$\le\left|\frac{2}{z-b_n}\right|+\left|\frac{2}{z-a_n}\right|+\left|\frac{2}{z-b_{n+1}}\right|+\left|\frac{2}{z-a_{n+1}}\right|\le 2(P_1(q)+P_1(\rho))l(|z|).$$

Оскільки

$$\frac{1-|a_k|}{1-|b_k|}\le\frac{1-|a_k|}{1-|a_k|-|\psi_k|}=1+\frac{|\psi_k|}{1-|a_k|-|\psi_k|}\le 1+\frac{1}{\frac{(1-|a_k|)l(|a_k|)}{K}-1}\le 1+\frac{1}{\frac{\beta}{K}-1}<2,$$

то, застосовуючи твердження 1) та 2) леми 4, маємо

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\overline{\psi}_k|}{|(1-\overline{a}_kz)(1-\overline{b}_kz)|}=\sum_{|a_k|\le r}\frac{|\overline{\psi}_k|}{|(1-\overline{a}_kz)(1-\overline{b}_kz)|}+\sum_{|a_k|>r}\frac{|\overline{\psi}_k|}{|(1-\overline{a}_kz)(1-\overline{b}_kz)|}\le$$
$$\le\sum_{|a_k|\le r}\frac{|\overline{\psi}_k|}{(1-|a_k|)(1-|b_k|)}+\sum_{|a_k|>r}\frac{|\overline{\psi}_k|}{(1-r)^2}\le \tag{8}$$
$$\le\sum_{|a_k|\le r}\frac{2K}{(1-|a_k|)^2l(|a_k|)}+\frac{1}{(1-r)^2}\sum_{|a_k|>r}\frac{K}{l(|a_k|)}\le K_{10}l(r).$$

Використовуючи (4)-(8), для $z\in C_n\setminus(G_\rho(B)\cup G_q(B_\psi))$ маємо

$$\left|\frac{B'_\psi(z)}{B_\psi(z)}-\frac{B'(z)}{B(z)}\right|=\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-|b_k|^2}{(z-b_k)(1-\overline{b}_kz)}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-|a_k|^2}{(z-a_k)(1-\overline{a}_kz)}\right|\le$$
$$\le K_5l(|z|)+K_6l(|z|)+2(P_1(q)+P_1(\rho))l(|z|)+K_9l(|z|)+K_{10}l(|z|)\le P_1(\rho,q)l(|z|).$$

Отже, виконується (3) для всіх $|z| \geq |a_{k_0+1}|$ і $z \notin (G_\rho(B) \cup G_q(B_\psi))$. Для $|z| \leq |a_{k_0+1}|$ і $z \notin (G_\rho(B) \cup G_q(B_\psi))$ оцінка (3) (можливо, з іншою сталою $P(\rho, q)$) доводиться з використанням принципу максимуму модуля і додатності функції l. Власне, для таких z маємо $\left|\frac{B'_\psi(z)}{B_\psi(z)} - \frac{B'(z)}{B(z)}\right| \leq P_2(\rho, q) \leq \frac{P_2(\rho,q)l(|z|)}{\min\{l(t)\colon 0\leq t\leq |a_{k_0+1}|\}}$. Лему 5 доведено. $\square$

3. Доведення теореми 1. Оскільки добуток Бляшке (1) є обмеженого l-індексу, то за лемою 1 для всіх $z_0 \in \mathbb{D}$

$$n(q/l(|z_0|), z_0, 1/B) \leq n^*(q) \qquad (9).$$

Як і в доведенні леми 4, визначимо послідовність $(r_n), n \in \mathbb{N}$, за індукцією: $r_{n+1} = r_n + q^*/l(r_n)$, $n \in \mathbb{N}$, де $r_1 = 0$, $q^* \in (0, \beta)$. У доведенні леми 4 встановлено, що $\lim_{n\to\infty} r_n = 1$.

За нерівністю (9) кількість нулів a_k на $[r_n, r_{n+1}]$ не перевищує $n(q^*/l(r_n), r_n, 1/B) \leq n^*(q^*)$. Покладемо $I_n = (r_n, r_{n+1}]$. З кожного інтервалу I_{2m} виберемо один з нулів (якщо такий існує) добутку B і побудуємо добуток Бляшке B_1^* за цими нулями. Тоді виберемо наступний нуль (якщо такий існує) добутку B і побудуємо добуток Бляшке B_2^*. Продовжуючи процес, ми отримаємо $n_1 \leq n^*(q^*)$ добутків Бляшке B_j^* з нулями $a_k^{(j)}$, що задовольняють умову

$$l(a_k^{(j)})\left(a_{k+1}^{(j)} - a_k^{(j)}\right) > 2q_0 > 0,\ k \geq k_0. \qquad (10)$$

Справді, нехай $a_{k+1}^{(j)} \in I_{2m} = (r_{2m+1}, r_{2m+2}]$. Тоді $a_k^{(j)} \leq r_{2m}$, а отже, $a_{k+1}^{(j)} - a_k^{(j)} > r_{2m+1} - r_{2m} = q^*/l(r_{2m})$. Якщо $a_k^{(j)} + \frac{q^*}{l(a_k^{(j)})} < r_{2m}$, то, оскільки $r_{2m} < a_{k+1}^{(j)}$, маємо $a_{k+1}^{(j)} - a_k^{(j)} > q^*/l(a_k^{(j)})$. Якщо ж $a_k^{(j)} + \frac{q^*}{l(a_k^{(j)})} \geq r_{2m}$, то, оскільки $l \in Q_\beta(\mathbb{D})$, маємо $l(r_{2m}) \leq \lambda_2(q^*)l(a_k^{(j)})$. А отже,

$$a_{k+1}^{(j)} - a_k^{(j)} > \frac{q^*}{l(r_{2m})} \geq \frac{q^*}{\lambda_2(q^*)l(a_k^{(j)})}.$$

Тобто, у будь-якому випадку виконується (10) з $2q_0 = \frac{q^*}{\lambda_2(q^*)}$. Зауважимо також, що $2q_0 < \beta$. А отже, $\min\{\beta/2,\, q_0\} = \frac{q^*}{2\lambda_2(q^*)}$.

Подібно, вибираючи нулі добутку Бляшке B з кожного інтервалу I_{2m+1} побудуємо $n_2 \leq n^*(q^*)$ добутків Бляшке B_j^{**}з нулями, що задовольняють ту ж умову.

Отже, $B(z) = \prod_{j=1}^{n_1} B_j^* \prod_{k=1}^{n_2} B_k^{**}$, де B_j^* та B_k^{**} — добутки Бляшке з нулями, що задовольняють умову (10).

Кожній послідовності $(a_k^{(j)})$ відповідає послідовність $(b_k^{(j)})$, де $b_k^{(j)} = a_k^{(j)} + \psi_k^{(j)}$. Причому,

$$|b_{k+1}^{(j)}| - |b_k^{(j)}| \geq a_{k+1}^{(j)} - |\psi_{k+1}^{(j)}| - a_k^{(j)} - |\psi_k^{(j)}| > \frac{2q_0}{l(a_k^{(j)})} - \frac{K}{l(a_k^{(j)})} - \frac{K}{l(a_{k+1}^{(j)})} \geq$$
$$\geq \frac{2q_0 - 2K}{l(a_k^{(j)})} \geq \frac{\lambda_1(K)(2q_0 - 2K)}{l(|b_k^{(j)}|)}.$$

Тому за лемою 2 для кожного з добутків $B_{j,\psi}(z)$ виконується умова 2) леми 1, а отже ця умова виконується і для B_ψ (відповідно, з іншим $n^*(q)$).

Очевидно, що

$$\left|\frac{B'_\psi(z)}{B_\psi(z)}-\frac{B'(z)}{B(z)}\right|\le\sum_{j=1}^{n_1+n_2}\left|\frac{B'_{j,\psi}(z)}{B_{j,\psi}(z)}-\frac{B'_j(z)}{B_j(z)}\right|.$$

Зафіксуємо довільне $j\in\{1,n_1+n_2\}$ та розглянемо $\left|\frac{B'_{j,\psi}(z)}{B_{j,\psi}(z)}-\frac{B'_j(z)}{B_j(z)}\right|$. Ми можемо застосувати лему 5 до $B_j(z)$ з $2q_0=\frac{q^*}{\lambda_2(q^*)}$.

Тому

$$\left|\frac{B'_{j,\psi}(z)}{B_{j,\psi}(z)}-\frac{B'_j(z)}{B_j(z)}\right|\le P_j(\rho,q)l(|z|),\quad z\in\mathbb{D}\setminus(G_\rho(B_j)\cup G_q(B_{j,\psi}))$$

і

$$\left|\frac{B'_\psi(z)}{B_\psi(z)}-\frac{B'(z)}{B(z)}\right|\le\sum_{j=1}^{n_1+n_2}P_j(\rho,q)l(|z|)=P(\rho,q)l(|z|),\ z\in\mathbb{D}\setminus(G_\rho(B)\cup G_q(B_\psi)).$$

Оскільки функція $B(z)$ є обмеженого l-індексу, то для кожного $\rho\in(0,q_0)$ існує $P_1(\rho)>0$ таке, що $\left|\frac{B'(z)}{B(z)}\right|\le P_1(\rho)l(|z|)$ для всіх $z\in\mathbb{D}\setminus(G_\rho(B)\cup G_q(B_\psi))$. Отже, для таких z

$$\left|\frac{B'_\psi(z)}{B_\psi(z)}\right|\le P(\rho,q)l(|z|)+P_1(\rho)l(|z|)=P_2(q,\rho)l(|z|).\tag{11}$$

Зауважимо, що $l(|b_k|)\le l\left(|a_k|+\frac{K}{l(|a_k|)}\right)\le\lambda_2(K)l(|a_k|)$. Тоді, як і при доведенні теореми 2 з [4], розглянувши множини $C'_n=C'_n(\rho)$ та $C''_n=C''_n(\rho)$, де $\rho=q/4\lambda_2(K)$, можна показати, що нерівність (11) справджується при всіх $z\in\mathbb{D}\setminus G_q(B_\psi)$. Тому за лемою 1 B_ψ є обмеженого l-індексу.

Теорему 1 доведено. □

Теорема 2 доводиться цілком подібно, з тією відмінністю, що умова $l(|a_k|)(|a_{k+1}|-|a_k|)>2q_0$ виконується автоматично, і тому немає потреби розбивати послідовність нулів (a_k) на підпослідовності.

Зауваження 1. Як видно із доведення, теорема 1 є правильною також і у випадку, коли нулі добутку (1) не додатні, але лежать на скінченній кількості променів, що виходять з початку координат.

Зауваження 2. Теорема 2 є правильною також і у випадку, коли умова $l(|a_k|)(|a_{k+1}|-|a_k|)>2q_0$ не виконується, але послідовність нулів добутку (1) складається з підпослідовностей $(a_k^{(j)})$, для кожної з яких $l(|a_k^{(j)}|)(|a_{k+1}^{(j)}|-|a_k^{(j)}|)>2q_0>0$, $k\ge k_0$.

Зауваження 3. Якщо розглядати частковий випадок зсуву нулів добутку (1), а саме поворот кожного з a_k на кут φ_k, то, оскільки $|\psi_k|=|a_ke^{i\varphi_k}-a_k|\asymp|\varphi_k|$, умова $|\psi_k|\le\frac{K}{l(|a_k|)}$ має вигляд $|\varphi_k|\le\frac{K}{l(|a_k|)}$, причому, як видно із доведення відповідних теорем, стала K — довільне додатне число.

Автор висловлює щиру подяку проф. М.М.Шереметі за постановку задачі та цінні зауваження, а також усім учасникам Львівського міжвузівського семінару з теорії аналітичних функцій за цінні вказівки та пропозиції.

ЛІТЕРАТУРА

1. Sheremeta M.M. Analytic functions of bounded index. – Lviv: VNTL Publishers. – 1999. – 141 p.
2. Строчик С.М., Шеремета М.М. *Аналітичні в крузі функції обмеженого l-індексу* // Доп. НАН України. – 1993. – №1. – С. 19-22.
3. Sheremeta M.M. *Problems in the theory of entire functions of bounded index and functions of sine type* // Matematychni Studii. – 2001. – V. 15, no 2. – P. 217-224.
4. Bordulyak M.T., Chyzhykov I.E., Sheremeta M.M. *Preservation of l-index boundedness under zeros shifts* // Matematychni Studii. – 2003. – V.19, no 1. – P. 21–30.
5. Trukhan Yu.S., Sheremeta M.M. *On l-index boundedness of the Blaschke product* // Matematychni Studii. – 2003. – V.19, no 1. – P. 106-112.

Львівський національний університет імені Івана Франка

Надійшло 03.02.2005