УДК 517.51

В. К. Маслюченко, О. Г. Фотій

ПІВНЕПЕРЕРВНІ ЗНИЗУ ВІДОБРАЖЕННЯ З КОМПАКТНИМИ ЗНАЧЕННЯМИ В ПРЯМІЙ ЗОРҐЕНФРЕЯ

V. K. Maslyuchenko, O. G. Fotiy. *Lower semi-continuous mappings with compact values in Sorgenfrei line*, Matematychni Studii, **24** (2005) 203–206.

The example of lower semi-continuous compact-valued mapping acting from the real line to the Sorgenfrei line which is not upper semi-continuous in any point is constructed.

В. К. Маслюченко, О. Г. Фотий. *Полунепрерывные снизу отображения с компактными значениями в прямой Зоргенфрея* // Математичні Студії. – 2005. – Т.24, №2. – С.203–206.

Приведен пример полунепрерывного снизу компактнозначного отображения числовой прямой в прямую Зоргенфрея, которое не является полунепрерывным сверху ни в одной точке.

1. У статті Ґ. Дебса [1] встановлено, що у кожного півнеперервного знизу компактнозначного відображення F берового простору X у метризовний простір Y множина $C^+(F)$ тих точок, в яких F півнеперервне зверху, є залишковою в X. У [2] сформульовано питання про можливість розширення цієї теореми на випадок відображень зі значеннями у неметризовних просторах і отримані деякі позитивні результати для відображень зі значеннями у супер-σ-метризовних просторах і прямій Зорґенфрея, причому в останньому випадку розглядалися лише скінченнозначні відображення. Залишалося відкритим питання, чи вірне твердження теореми Дебса для відображень зі значеннями у прямій Зорґенфрея. Тут ми встановлюємо, що відповідь на це питання негативна.

2. Нехай X і Y — топологічні простори. Нагадаємо, що многозначне відображення $F\colon X \to Y$ називається *півнеперервним зверху (знизу) в точці x_0 з X*, якщо для кожної відкритої в Y множини V, такої, що $F(x_0) \subseteq V$ $(F(x_0) \cap V \neq \varnothing)$, існує окіл U точки x_0 в X, такий, що $F(x) \subseteq V$ $(F(x) \cap V \neq \varnothing)$, для кожного x з U. Відображення F називається *півнеперервним зверху (знизу) на X*, якщо воно є таким у кожній точці простору X.

Пряму Зорґенфрея [3, с.47] позначаємо символом $\mathbb{L}$. Нагадаємо, що $\mathbb{L}$, як множина, збігається з числовою прямою $\mathbb{R}$, але топологічна структура в $\mathbb{L}$ вводиться не так як на $\mathbb{R}$, а саме: околом точки x в просторі $\mathbb{L}$ вважається будь-яка множина U в $\mathbb{L}$ яка містить деякий проміжок $[x, x+\varepsilon)$.

Наша мета — побудувати півнеперервне знизу компактнозначне відображення $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{L}$, яке не буде півнеперервним зверху в жодній точці з $\mathbb{R}$. В [2] доведено, що

2000 *Mathematics Subject Classification:* 54C05, 54E52.

для скінченнозначних відображень це неможливо. Тому перші зусилля авторів спрямовувались на те, щоб отримати позитивний варіант теореми Дебса для відображень зі значеннями у прямій Зорґенфрея. На цьому шляху отримано результат, який доповнює теорему 3 з [2], і цікавий сам по собі. Ми почнемо саме з нього.

Теорема 1. *Нехай X — берів простір, який задовольняє другу аксіому зліченності, $f\colon X \to \mathbb{R}$ — функція, у якої кожна точка x з X є точкою локального мінімуму. Тоді множина M всіх тих точок з X, в яких f локально стала, відкрита і скрізь щільна в X.*

Доведення. Нехай $\mathcal{B} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ — база топології простору X. Для кожного номера n розглянемо множини

$$A_n = \{x \in X : x \in U_n \quad \text{і} \quad f(u) \geq f(x), \quad \text{як тільки} \quad u \in U_n\}.$$

Виявляється, що $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X$. Справді, нехай $x \in X$. Оскільки x — точка локального мінімуму, то існує відкритий окіл U точки x в X, такий, що $f(u) \geq f(x)$, як тільки $u \in U$. З того, що $\mathcal{B}$ — база випливає, що існує такий номер n, що $x \in U_n \subseteq U$. Зрозуміло, що $f(u) \geq f(x)$ на U_n, отже, $x \in A_n$.

Покладемо $F_n = \overline{A}_n$ і $G_n = \operatorname{int} F_n$. Оскільки $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = X$, то з беровості простору X випливає [4, с.64], що відкрита множина $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ скрізь щільна в X. Оскільки $G_n \subseteq \overline{A}_n$ і множина G_n відкрита, то $G_n \subseteq \overline{G_n \cap A_n}$. Нехай $B_n = A_n \cap G_n$ і $H_n = U_n \cap G_n$. За побудовою $A_n \subseteq U_n$, отже, $B_n \subseteq H_n \subseteq G_n \subseteq \overline{B}_n \subseteq \overline{H}_n$, зокрема, $G_n \subseteq \overline{H}_n$. Множина $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$, очевидно, відкрита. При цьому

$$\overline{H} \supseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{H} \supseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = G,$$

отже, $\overline{H} = \overline{\overline{H}} \supseteq \overline{G} = X$, звідки $\overline{H} = X$. Отже, множина H скрізь щільна в X.

Доведемо тепер, що для кожного n звуження $f|_{H_n}$ стале. Для цього спочатку доведемо, що звуження $f|_{B_n}$ стале. Нехай x_1 і x_2 — довільні точки з B_n. Оскільки $B_n \subseteq A_n$, то $f(u) \geq f(x_1)$ і $f(u) \geq f(x_2)$, як тільки $u \in U_n$. Крім того, $x_i \in U_n$ при $i \in \{1, 2\}$. Тому $f(x_2) \geq f(x_1)$ і $f(x_1) \geq f(x_2)$, отже, $f(x_1) = f(x_2)$.

Можемо вважати, що $H_n \neq \varnothing$. Тоді і $B_n \neq \varnothing$, адже $H_n \subseteq \overline{B}_n$. Візьмемо деяку точку a з B_n і приймемо $f(a) = \alpha$. Доведемо, що $f(x) = \alpha$ для кожного $x \in H_n$. Оскільки $H_n \subseteq U_n$ і $a \in A_n$, то $f(u) \geq \alpha$ для кожного $u \in H_n$. Нехай $f(x_0) > \alpha$ для деякої точки x_0 з H_n. Функція f має в точці x_0 локальний мінімум. Тому існує такий окіл U точки x_0, що $f(x) \geq f(x_0)$ для кожного $x \in U$. Але $x_0 \in \overline{B}_n$, отже, $U \cap B_n \neq \varnothing$. Візьмемо точку $b \in U \cap B_n$. Оскільки $a, b \in B_n$, то $f(b) = f(a) = \alpha$. З іншого боку, $b \in U$, отже, $f(b) \geq f(x_0) > \alpha$, звідки $f(b) > \alpha$. Отримана суперечність вказує на те, що $f(x) = \alpha$ для всіх x з H_n, тобто звуження $f|_{H_n}$ стале.

З доведеного випливає, що $H_n \subseteq M$ для кожного n. Отже, $H \subseteq M$, звідки негайно отримуємо, що $\overline{M} = X$. Оскільки множина M, очевидно, відкрита, то теорему доведено. □

3. Приступимо тепер до побудови обіцяного прикладу. Наша конструкція базується на наступному простому твердженні.

Лема. *Нехай $(d_n)_{n=1}^{\infty}$ — довільна послідовність дійсних чисел. Тоді існує така послідовність дійсних чисел a_n, що множини $A_n = \{a_n + kd_n : k \in \mathbb{Z}\}$ попарно не перетинаються.*

Доведення. Виберемо довільне число $a_1 \in \mathbb{R}$. Припустимо, що $n > 1$ і числа a_m при $m < n$ вже побудовані так, що $A_m \cap A_l = \varnothing$ при $m \neq l$ і $l, m < n$. Розглянемо множину

$$B_n = \{a_m + ld_m + kd_n : \quad m \in \{1, \dots, n-1\}, \quad l, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Зрозуміло, що ця множина не більш ніж зліченна. Оскільки за теоремою Кантора числова пряма $\mathbb{R}$ незліченна, то існує число $a_n \in \mathbb{R} \setminus B_n$. Покажемо, що $A_m \cap A_n = \varnothing$ для кожного $m \in \{1, \dots, n-1\}$. Справді, нехай $A_m \cap A_n \neq \varnothing$ для деякого $m \in \{1, \dots, n-1\}$.Тоді існують такі цілі числа k і l, що $a_n + kd_n = a_m + ld_m$. Звідси $a_n = a_m + ld_m - kd_n$. Оскільки числа l і $-k$ цілі, то $a_n \in B_n$, що суперечить вибору числа a_n. Отже, число a_n шукане. Ця індуктивна побудова і доводить лему. $\square$

Нехай a, b, d — деякі дійсні числа, $d > 0$ і $x_k = a + kd$ при $k \in \mathbb{Z}$. Визначимо функцію $f = f_{a,b,d} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ так: $f(x) = x_k + b$, якщо $x_{k-1} < x < x_k$ для деякого $k \in \mathbb{Z}$, і $f(x_k) = x_k$ для кожного $k \in \mathbb{Z}$.

Теорема 2. *Нехай $(d_n)_{n=1}^{\infty}$ — довільна послідовність додатних чисел d_n, для яких $\sum_{n=1}^{\infty} d_n = 1$, $b_n = \sum_{m>n} d_m$, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ — послідовність дійсних чисел, існування якої гарантується лемою, $x_{n,k} = a_n + kd_n$, $A_n = \{x_{n,k} : k \in \mathbb{Z}\}$, $f_n = f_{a_n,b_n,d_n}$ для кожного $n \in \mathbb{N}$ і $F(x) = \{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ для кожного x з X. Визначене відображення $F \colon \mathbb{R} \to \mathbb{L}$ є компактнозначним півнеперервним знизу таким, що $C^+(F) = \varnothing$.*

Доведення. Зафіксуємо x з $\mathbb{R}$ і доведемо, що множина $F(x)$ компактна в $\mathbb{L}$. Припустимо спочатку, що $x \notin A_n$ для довільного $n \in \mathbb{N}$. Тоді для кожного n існує єдине ціле число k_n, таке, що $x_{n,k_n-1} < x < x_{n,k_n}$. Тому $f_n(x) = x_{n,k_n} + b_n$ для кожного n. Доведемо, що $f_{n+1}(x) < f_n(x)$. Справді,

$$f_{n+1}(x) = x_{n+1,k_{n+1}} + b_{n+1} = x_{n+1,k_{n+1}-1} + d_{n+1} + b_{n+1} = x_{n+1,k_{n+1}-1} + b_n <$$

$$< x + b_n < x_{n,k_n} + b_n = f_n(x).$$

З'ясуємо тепер, що $f_n(x) \to x$ при $n \to +\infty$ в $\mathbb{L}$. Зрозуміло, що

$$f_n(x) = x_{n,k_n} + b_n > x + b_n > x.$$

Далі,

$$f_n(x) = x_{n,k_n-1} + d_n + b_n < x + d_n + b_n.$$

Отже, $x < f_n(x) < x + d_n + b_n$ для кожного n. Оскільки $\lim_{n\to\infty}(d_n + b_n) = 0$, бо загальний член і залишок збіжного ряду прямують до нуля, то $f_n(x) \to x$ при $n \to \infty$ в $\mathbb{L}$. Тому, $F(x)$ — це множина точок збіжної в $\mathbb{L}$ послідовності $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ разом з її границею x в $\mathbb{L}$. Тому $F(x)$ є компактною множиною в $\mathbb{L}$.

Нехай $x \in A_m$ для деякого $m \in \mathbb{N}$. Тоді $x \notin A_n$ при $n \neq m$ і $f_m(x) = x$. Зрозуміло, що

$$f_1(x) > \dots > f_{m-1}(x) \quad \text{і} \quad f_{m+1}(x) > f_{m+2}(x) > \dots.$$

Доведемо, що $f_{m-1}(x) > f_{m+1}(x)$. Справді,

$$f_{m+1}(x) = x_{m+1,k_{m+1}} + b_{m+1} = x_{m+1,k_{m+1}-1} + d_{m+1} + b_{m+1} <$$

$$< x + b_m < x_{m-1,k_{m-1}} + b_{m-1} = f_{m-1}(x),$$

позаяк $b_m < b_{m-1}$. Оскільки знову $x < f_n(x) < x + d_n + b_n$ при $n > m$, то і в цьому випадку $f_n(x) \to x$ при $n \to +\infty$ в $\mathbb{L}$. Тому, і в цьому випадку множина $F(x)$ компактна в $\mathbb{L}$.

З'ясуємо, чи відображення F півнеперервне знизу. Нехай $x \in \mathbb{R}$, $V = [y, y+\varepsilon)$ і $F(x) \cap V \neq \varnothing$. З умови $F(x) \cap V \neq \varnothing$ і будови множини $F(x)$ легко випливає, що існує такий номер m, що $f_m(x) \in V$ і $f_m(x) > x$. Тому $x \notin A_m$, отже, $x \in U = (x_{m,k_m-1}, x_{m,k_m})$. Але $f_m(u) = f_m(x)$ для всіх $u \in U$. В такому разі $f_m(u) \in F(u) \cap V$ для кожного u з U, отже, $F(u) \cap V \neq \varnothing$, як тільки $u \in U$.

Доведемо нарешті, що відображення F не є півнеперервним зверху у жодній точці $x \in \mathbb{R}$. Справді, нехай $V = [x, x+2)$. Множина V відкрита в $\mathbb{L}$ і $F(x) \subseteq V$. Розглянемо довільний окіл U точки x в $\mathbb{R}$. Тоді існує таке $\delta > 0$, що $(x-\delta, x+\delta) \subseteq U$. Нехай $u \in (x-\delta, x)$. Звідси $u < x$, отже, $u \notin V$. З іншого боку, за побудовою $u \in F(u)$. Тому $F(u) \not\subseteq V$. Це доводить, що F не може бути півнеперервним зверху у точці x. □

Зауважимо, що результати цієї статті анонсовано в [5].

ЛІТЕРАТУРА

1. Debs G. *Points de continuité d'une fonction séparément continue* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1986. – V.97, no. 1. – P. 167–176.
2. Кожукар О.Г., Маслюченко В.К. *Навколо теорем Дебса про многозначні відображення* // Наук. вісн. Чернів. ун-ту: Збірник наук. праць. Вип. 191–192. Математика. – Чернівці: Рута, 2004. – С. 61–66.
3. Энгелькинг Р. Общая топология. – М.: Мир, 1986. – 752 с.
4. Маслюченко В.К. Перші типи топологічних векторних просторів. – Чернівці: Рута, 2002. – 72 с.
5. Кожукар О.Г., Маслюченко В.К. *Компактнозначні відображення зі значеннями в прямій Зорґенфрея* // Міжнар. конф., присв. 125 річниці від дня народження Ганса Гана. Тези доповідей. 27 червня – 3 липня 2004 р. – Чернівці: Рута, 2004. – С. 43–44.

Чернівецький національний університет імені Ю. Федьковича

Надійшло 25.10.2004