УДК 517.95

О. М. Бугрій

СКІНЧЕННІСТЬ ЧАСУ СТАБІЛІЗАЦІЇ РОЗВ'ЯЗКУ НЕЛІНІЙНОЇ ПАРАБОЛІЧНОЇ ВАРІАЦІЙНОЇ НЕРІВНОСТІ ЗІ ЗМІННИМ СТЕПЕНЕМ НЕЛІНІЙНОСТІ

O. M. Buhrii. *Finiteness of time vanishing of the solution of a nonlinear parabolic variational inequality with variable exponent of nonlinearity*, Matematychni Studii, **24** (2005) 167–172.

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be a bounded domain, $Q_{0,T} = \Omega \times (0,T)$. We consider a nonlinear parabolic variational inequality with $\Delta_{p(x)}$-Laplacian $(1 < p(x) < 2)$ in the domain $Q_{0,T}$. Under a some simple assumption we deduce that the solution of this inequality vanishes after a finite time.

О. Н. Бугрий. *Конечность времени стабилизации решения нелинейного параболического вариационного неравенства с переменной степенью нелинейности* // Математичні Студії. – 2005. – Т.24, №2. – С.167–172.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область, $Q_{0,T} = \Omega \times (0,T)$. В области $Q_{0,T}$ рассматривается параболическое вариационное неравенство с $\Delta_{p(x)}$-лапласианом $(1 < p(x) < 2)$. Найдены условия на коэффициенты неравенства, гарантирующие, что решение этого неравенства обращается в нуль с некоторого момента времени.

Скінченність часу стабілізації розв'язку мішаної задачі для параболічного рівняння, моделлю якого є рівняння $u_t = \sum_{i=1}^n (|u_{x_i}|^{p-2} u_{x_i})_{x_i}$ встановлено в [1] при $p \in (1,2)$ (див. також [2]). Таку ж властивість розв'язків лінійних параболічних варіаційних нерівностей доведено в [3]. Якщо показник нелінійності рівняння є функцією, то скінченність часу стабілізації розв'язку цього рівняння доведено в [4], [5]. У цій статті встановлено скінченність часу стабілізації розв'язку задачі з початковою умовою для однієї нелінійної параболічної варіаційної нерівності в узагальнених просторах Соболєва.

Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — обмежена область з $\partial\Omega \subset C^1$, $Q_{t_1,t_2} = \Omega \times (t_1,t_2)$, $0 \le t_1 < t_2 \le T$, $\Omega_\tau = \{(x,t) : x \in \Omega, t = \tau\}$, $\tau \in [0,T]$. Норму банахового простору B позначимо $\|\cdot; B\|$, а спряжений до B простір — B^*.

У статті [6] введено узагальнені простори Лебега $L^{p(x)}(\Omega)$ та Соболєва $W^{1,p(x)}(\Omega)$, $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Наведемо ці означення. Нехай $p \in L^\infty(\Omega)$,

$$1 < p_1 \equiv \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} p(x) \le \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} p(x) \equiv p_2 < +\infty. \tag{1}$$

Визначимо функціонал $\rho_p(\cdot,\Omega)$ рівністю $\rho_p(v,\Omega) = \int_\Omega |v(x)|^{p(x)} dx$, де v — деяка вимірна функція. Узагальненим простором Лебега $L^{p(x)}(\Omega)$ називають множину таких вимірних

2000 *Mathematics Subject Classification:* 35R45.

функцій v, для яких $\rho_p(v,\Omega) < +\infty$. У [6] доведено, що $L^{p(x)}(\Omega)$ є банаховим простором з нормою

$$\|v; L^{p(x)}(\Omega)\| = \inf\{\lambda > 0 \,:\, \rho_p(v/\lambda,\Omega) \le 1\}.$$

Зауваження 1. У [6, с. 594] доведено, що якщо $\|v; L^{p(x)}(\Omega)\| \le 1$, то $\rho_p(v,\Omega) \le 1$. Зворотнє твердження зразу випливає з означення норми простору $L^{p(x)}(\Omega)$.

Через $W^{1,p(x)}(\Omega)$ позначимо простір таких вимірних функцій $v \in L^{p(x)}(\Omega)$, що їх узагальнені похідні $v_{x_1}, \ldots, v_{x_n}$ також належать до $L^{p(x)}(\Omega)$. Відомо, що це банахів простір з нормою

$$\|v; W^{1,p(x)}(\Omega)\| = \sum_{|\alpha|\le 1} \|D^\alpha v; L^{p(x)}(\Omega)\|. \tag{2}$$

$W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ — це замикання $C_0^\infty(\Omega)$ за нормою простору $W^{1,p(x)}(\Omega)$. Якщо додатково припустити, що $p \in C(\overline{\Omega})$, то простори $W^{1,p(x)}(\Omega)$ та $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ компактно вкладаються в $L^{p(x)}(\Omega)$ і вираз

$$\|v; W_0^{1,p(x)}(\Omega)\| = \sum_{i=1}^{n} \|v_{x_i}; L^{p(x)}(\Omega)\| \tag{3}$$

задає еквівалентну до (2) норму в просторі $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ (див., наприклад, [7, с. 644]).

Нехай K — опукла замкнена підмножина простору $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, яка містить нульовий елемент. Подібно до $L^{p(x)}(\Omega)$ визначимо простір $L^{p(x)}(Q_{0,T})$, ввівши замість $\rho_p(\cdot,\Omega)$ функціонал $\rho_p(\cdot, Q_{0,T})$. Нехай $U(Q_{0,T})$ — простір таких функцій $v \in L^2(Q_{0,T})$, що їх узагальнені похідні $v_{x_1}, \ldots, v_{x_n}$ належать до $L^{p(x)}(Q_{0,T})$.

Нехай виконуються умови:

(A): $a_i \in L^\infty(Q_{0,T})$, $a_i(x,t) \ge a_0 > 0$, $i \in \{1,\ldots,n\}$, майже для всіх $(x,t) \in Q_{0,T}$;

(U): $u_0 \in L^2(\Omega)$.

Дамо означення розв'язку задачі, яку досліджуватимемо.

Означення 1. Функцію $u \in U(Q_{0,T}) \cap C([0,T]; L^2(\Omega))$ таку, що $u(t) \in K$ майже для всіх $t \in (0,T)$, називатимемо *розв'язком параболічної варіаційної нерівності*

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \Big[v_t(v-u) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)|u_{x_i}|^{p(x)-2}u_{x_i}(v_{x_i} - u_{x_i})\Big]dxdt \ge \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{t_2}} |v-u|^2dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{t_1}} |v-u|^2dx \tag{4}$$

з початковою умовою

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{майже для всіх} \quad x \in \Omega, \tag{5}$$

якщо u задовольняє умову (5) та задовольняє нерівність (4) для всіх $0 \le t_1 < t_2 \le T$ та всіх $v \in U(Q_{0,T}) \cap C([0,T]; L^2(\Omega))$, $v(t) \in K$ майже для всіх $t \in (0,T)$, $v_t \in [U(Q_{0,T})]^*$.

Перш ніж перейти до встановлення основного результату цієї статті, доведемо допоміжні твердження.

Лема 1. *Нехай* $p \in L^\infty(\Omega)$, *виконується умова (1),* $S_p(s) = \begin{cases} s^{p_1}, & s \in [0,1], \\ s^{p_2}, & s > 1, \end{cases}$

$S_{1/p}(s) = \begin{cases} s^{1/p_2}, & s \in [0,1], \\ s^{1/p_1}, & s > 1. \end{cases}$ *Тоді для довільної вимірної функції* $v\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *:*

1) $\rho_p(v,\Omega) < +\infty \Rightarrow \|v; L^{p(x)}(\Omega)\| \le S_{1/p}(\rho_p(v,\Omega))$;

2) $\|v; L^{p(x)}(\Omega)\| < +\infty \Rightarrow \rho_p(v,\Omega) \le S_p(\|v; L^{p(x)}(\Omega)\|)$.

Доведення. У випадках $\rho_p(v,\Omega) = 0$ або $\|v; L^{p(x)}(\Omega)\| = 0$ наші нерівності тривіальні.

1) Очевидно, що виконуються нерівності $\rho_p(v/\lambda,\Omega) \le \rho_p(v,\Omega)/\lambda^{p_2}$ при $0 < \lambda \le 1$ та $\rho_p(v/\mu,\Omega) \le \rho_p(v,\Omega)/\mu^{p_1}$ при $\mu \ge 1$.

Якщо $0 < \rho_p(v,\Omega) \le 1$, то $\rho_p(v/[\rho_p(v,\Omega)]^{1/p_2},\Omega) \le \rho_p(v,\Omega)/\rho_p(v,\Omega) = 1$. Тому з означення норми в просторі $L^{p(x)}(\Omega)$ отримаємо оцінку $\|v; L^{p(x)}(\Omega)\| \le [\rho_p(v,\Omega)]^{1/p_2}$. Якщо ж $\rho_p(v,\Omega) \ge 1$, то $\rho_p(v/[\rho_p(v,\Omega)]^{1/p_1},\Omega) \le \rho_p(v,\Omega)/\rho_p(v,\Omega) = 1$. Отже, виконується оцінка $\|v; L^{p(x)}(\Omega)\| \le [\rho_p(v,\Omega)]^{1/p_1}$.

2) Очевидно, що $\rho_p(v,\Omega)/\lambda^{p_1} \le \rho_p(v/\lambda,\Omega)$ при $0 < \lambda \le 1$, і $\rho_p(v,\Omega)/\mu^{p_2} \le \rho_p(v/\mu,\Omega)$ при $\mu \ge 1$.

Якщо $0 < \|v; L^{p(x)}(\Omega)\| \le 1$, то, враховуючи наведені оцінки та зауваження 1, одержимо нерівність $\rho_p(v,\Omega)/\|v; L^{p(x)}(\Omega)\|^{p_1} \le \rho_p(v/\|v; L^{p(x)}(\Omega)\|,\Omega) \le 1$. Тому матимемо оцінку $\rho_p(v,\Omega) \le \|v; L^{p(x)}(\Omega)\|^{p_1}$.

Якщо ж $\|v; L^{p(x)}(\Omega)\| \ge 1$, то $\rho_p(v,\Omega)/\|v; L^{p(x)}(\Omega)\|^{p_2} \le \rho_p(v/\|v; L^{p(x)}(\Omega)\|,\Omega) \le 1$. Тоді одержимо, що $\rho_p(v,\Omega) \le \|v; L^{p(x)}(\Omega)\|^{p_2}$. Лему доведено. □

З нерівності Гельдера отримується наступна елементарна нерівність.

Лема 2. *Якщо $q > 1$, то для всіх $b_1,\dots,b_n \ge 0$ виконується оцінка*

$$(b_1 + \ldots + b_n)^q \le n^{q-1}(b_1^q + \ldots + b_n^q). \tag{6}$$

Лема 3. *Нехай функція $p \in C(\overline{\Omega})$ задовольняє умову (1). Тоді для всіх $v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ правильні нерівності*

$$\frac{1}{2^{p_2} n^{p_2-1}} \cdot \|v; W_0^{1,p(x)}(\Omega)\|^{s_1} \le \rho_p^{\nabla}(v,\Omega) \equiv \sum_{i=1}^{n} \rho_p(v_{x_i},\Omega) \le 2n\|v; W_0^{1,p(x)}(\Omega)\|^{s_2}, \tag{7}$$

де

$$s_1 = \begin{cases} p_1, & \|v; W_0^{1,p(x)}(\Omega)\| \ge 1, \\ p_2, & \|v; W_0^{1,p(x)}(\Omega)\| \le 1, \end{cases} \qquad s_2 = \begin{cases} p_2, & \|v; W_0^{1,p(x)}(\Omega)\| \ge 1, \\ p_1, & \|v; W_0^{1,p(x)}(\Omega)\| \le 1. \end{cases}$$

Доведення. Нагадаємо, що при $p \in C(\overline{\Omega})$ норму простору $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ можна записати у вигляді (3). Доведемо спочатку першу частину нерівності (7). З леми 1 матимемо

$$\sum_{i=1}^{n} \|v_{x_i}; L^{p(x)}(\Omega)\| \le \sum_{i=1}^{n} S_{1/p}(\rho_p(v_{x_i},\Omega)) = \sum_{i=1}^{n} \begin{cases} [\rho_p(v_{x_i},\Omega)]^{1/p_2}, & \rho_p(v_{x_i},\Omega) \le 1, \\ [\rho_p(v_{x_i},\Omega)]^{1/p_1}, & \rho_p(v_{x_i},\Omega) > 1. \end{cases} \tag{8}$$

Не зменшуючи загальності, вважатимемо, що $\rho_p(v_{x_1},\Omega) \le 1, \ldots, \rho_p(v_{x_r},\Omega) \le 1$, $\rho_p(v_{x_{r+1}},\Omega) > 1, \ldots, \rho_p(v_{x_n},\Omega) > 1$. Тоді з нерівності (8) отримаємо, що

$$\sum_{i=1}^{n} \|v_{x_i}; L^{p(x)}(\Omega)\| \le \sum_{i=1}^{r} [\rho_p(v_{x_i},\Omega)]^{1/p_2} + \sum_{i=r+1}^{n} [\rho_p(v_{x_i},\Omega)]^{1/p_1} \le$$

$$\le 2\max\Big\{\sum_{i=1}^{n} [\rho_p(v_{x_i},\Omega)]^{1/p_2}, \sum_{i=1}^{n} [\rho_p(v_{x_i},\Omega)]^{1/p_1}\Big\}.$$

Отже, $\left(\sum_{i=1}^{n}\|v_{x_i}; L^{p(x)}(\Omega)\|\right)^{p_1} \leq 2^{p_1}n^{p_1-1}\rho_p^{\nabla}(v,\Omega)$, тобто, $\rho_p^{\nabla}(v,\Omega) \geq (2^{p_1}n^{p_1-1})^{-1}\times \|v; W_0^{1,p(x)}(\Omega)\|^{p_1}$, або $\left(\sum_{i=1}^{n}\|v_{x_i}; L^{p(x)}(\Omega)\|\right)^{p_2} \leq 2^{p_2}n^{p_2-1}\rho_p^{\nabla}(v,\Omega)$, тобто, $\rho_p^{\nabla}(v,\Omega) \geq (2^{p_2}n^{p_2-1})^{-1}\cdot \|v; W_0^{1,p(x)}(\Omega)\|^{p_2}$, звідки і отримуємо доведення першої частини нерівності (7).

Доведемо тепер другу частину нерівності (7). З леми 1 матимемо, що

$$\rho_p^{\nabla}(v,\Omega) \leq \sum_{i=1}^{n} S_p(\|v_{x_i}; L^{p(x)}(\Omega)\|) = \sum_{i=1}^{n} \begin{cases} \|v_{x_i}; L^{p(x)}(\Omega)\|^{p_1}, & \|v_{x_i}; L^{p(x)}(\Omega)\| \leq 1, \\ \|v_{x_i}; L^{p(x)}(\Omega)\|^{p_2}, & \|v_{x_i}; L^{p(x)}(\Omega)\| > 1. \end{cases} \quad (9)$$

Не зменшуючи загальності, вважатимемо, що $\|v_{x_1}; L^{p(x)}(\Omega)\| \leq 1, \ldots, \|v_{x_r}; L^{p(x)}(\Omega)\| \leq 1$, $\|v_{x_{r+1}}; L^{p(x)}(\Omega)\| > 1, \ldots, \|v_{x_n}; L^{p(x)}(\Omega)\| > 1$. Тоді нерівність (9) набуде вигляду

$$\rho_p^{\nabla}(v,\Omega) \leq \sum_{i=1}^{r}\|v_{x_i}; L^{p(x)}(\Omega)\|^{p_1} + \sum_{i=r+1}^{n}\|v_{x_i}; L^{p(x)}(\Omega)\|^{p_2} \leq r\|v; W_0^{1,p(x)}(\Omega)\|^{p_1} +$$
$$+ (n-r-1)\|v; W_0^{1,p(x)}(\Omega)\|^{p_2} \leq 2n\max\{\|v; W_0^{1,p(x)}(\Omega)\|^{p_1}, \|v; W_0^{1,p(x)}(\Omega)\|^{p_2}\}.$$

Лему доведено. □

Зауваження 2. Лему 1 без доведення наведено у [8]. Для виконання твердження леми 3 треба, щоб справджувалася умова (1) та щоб вираз (3) задавав еквівалентну норму в просторі $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$. Останнє виконується, наприклад, якщо справджується умова 2 теореми 1.5 ([7, с. 644]).

Встановимо тепер основний результат нашої статті.

Теорема. *Нехай виконуються умови* **(A)**, **(U)**, $p \in C(\overline{\Omega})$, *p задовольняє (1),*

$$1 < p_1 \leq p_2 < 2, \qquad \frac{2n}{n+2} \leq p_1, \quad (10)$$

$T > 0$ — досить велике число, u — деякий розв'язок задачі (4)-(5). Якщо $\|u_0; L^2(\Omega)\| > 0$, то існує така стала $t_0 = t_0(\|u_0; L^2(\Omega)\|, mes_n\Omega, p, n)$, що $u(x,t) = 0$ майже для всіх $(x,t) \in Q_{t_0,T}$.

Доведення. Нехай виконуються умови теореми, u — розв'язок параболічної варіаційної нерівності (4), який задовольняє початкову умову (5). Візьмемо в нерівності (4) $v = 0$. Після елементарних перетворень отримаємо

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{t_2}}|u|^2dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{t_1}}|u|^2dx + a_0\int\limits_{Q_{t_1,t_2}}\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}|^{p(x)}dxdt \leq 0, \quad 0 \leq t_1 < t_2 \leq T. \quad (11)$$

Оскільки за умови (10) простір $W_0^{1,p_1}(\Omega)$ неперервно вкладається в $L^2(\Omega)$, то з [6, с. 604] матимемо, що $\|v; L^2(\Omega)\| \leq C_1\|v; W_0^{1,p_1}(\Omega)\| \leq C_2\|v; W_0^{1,p(x)}(\Omega)\|$. Звідси та з леми 3 отримаємо існування такої сталої $C_3 > 0$, що

$$\left(\int\limits_{\Omega}|v|^2dx\right)^{s_1/2} \leq \frac{2a_0}{C_3}\cdot\rho_p^{\nabla}(v,\Omega) \quad \text{для всіх} \quad v \in W_0^{1,p(x)}(\Omega), \quad (12)$$

де функціонал ρ_p^∇ та число $s_1 \in (1,2)$ взяті з леми 3.

Нехай $y(t) = \int_\Omega |u(x,t)|^2 dx$, $t \in (0,T)$. Використавши (12), з оцінки (11) одержимо, що

$$y(t_2) - y(t_1) + C_3 \int\limits_{t_1}^{t_2} y^{s_1/2}(t)dt \leq 0, \quad 0 \leq t_1 < t_2 \leq T. \tag{13}$$

Гладкість розв'язку u гарантує, що $y \in C([0,T])$. З оцінки (13) випливає, що функція y є монотонно незростаючою, а тому диференційовною майже для всіх $t \in (0,T)$ (теорема 1 [9, с. 305]). Нехай $\tau \in (0,T)$, $\delta \in (0, T-\tau)$. Приймемо в (13) $t_1 = \tau$, $t_2 = \tau + \delta$ (див. [10, с. 60]). Поділивши цю нерівність на δ, одержимо, що

$$\frac{y(\tau+\delta) - y(\tau)}{\delta} + C_3 \frac{\int\limits_0^{\tau+\delta} y^{s_1/2}(t)dt - \int\limits_0^{\tau} y^{s_1/2}(t)dt}{\delta} \leq 0. \tag{14}$$

Спрямуємо $\delta \to +0$. З теореми Лебега про похідну монотонної функції ([9, с. 305]) маємо, що для майже всіх $\tau \in (0,T)$ границя першого доданку зліва дорівнює $y'(\tau)$. З теореми 1 [9, с. 317] випливає, що майже всіх $\tau \in (0,T)$ границя другого доданку зліва дорівнює $C_3 y^{s_1/2}(\tau)$. Тому з (14) одержуємо нерівність $y'(\tau) + C_3 y^{s_1/2}(\tau) \leq 0$ майже для всіх $\tau \in (0,T)$. Припустимо, що твердження теореми не виконується. Тоді $y(\tau) > 0$, $\tau \in [0,T]$. Тому $y'(\tau)/y^{s_1/2}(\tau) + C_3 \leq 0$ майже для всіх $\tau \in (0,T)$. Інтегруючи за τ, матимемо, що

$$\int\limits_0^t \frac{y'(\tau)}{y^{s_1/2}(\tau)}\, d\tau + C_3 t \leq 0, \qquad \frac{y^{1-\frac{s_1}{2}}(t)}{1-\frac{s_1}{2}} \leq \frac{y^{1-\frac{s_1}{2}}(0)}{1-\frac{s_1}{2}} - C_3 t, \quad t \in (0,T).$$

Тому, якщо вибрати $t_0 = \dfrac{2\|u_0; L^2(\Omega)\|^{2-s_1}}{(2-s_1)C_3}$, то для всіх $t \in [t_0, T]$ виконується нерівність

$$y^{(2-s_1)/2}(t) \leq y^{(2-s_1)/2}(0) - \frac{2-s_1}{2} C_3 t \leq \|u_0; L^2(\Omega)\|^{2-s_1} - \frac{2-s_1}{2} C_3 t_0 = 0.$$

Отже, $y(t) = 0$ при $t > t_0$, а тому $u(x,t) = 0$ майже для всіх $(x,t) \in Q_{t_0,T}$. □

Зауваження 3. Враховуючи зауваження 2, у нашій теоремі можна вимагати виконання дещо слабших умов на гладкість функції p.

Зауваження 4. Існування розв'язку параболічної варіаційної нерівності (4) з початковою умовою (5) можна довести подібно як і в [11]. Для цього додатково треба припустити, наприклад, що $a_1, \ldots, a_n \in C([0,T]; L^\infty(\Omega))$, $u_0 \in K$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Антонцев С.Н. *О характере возмущений, описываемых решениями многомерных вырождающихся параболических уравнений* // Динамика жидкости со свободными границами. – 1979. – Вып. 40. – С. 114-122.
2. Калашников А.С. *Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка* // Успехи мат. наук. – 1987. – Т.42, №2. – С. 135-176.
3. Diaz J.I., Mossino J. *Inégalité isoperimetrique dans un probleme d'obstacle parabolique* // C. r. Acad. Sc. Paris. Serie 1. – 1987. – T.305.– P. 737-740.
4. Antontsev S. *Nonlinear parabolic equations with a variable exponent of degeneration* // International Conference "N.P.D.E.": Abstracts. – Donetsk, 2003.– P. 12.
5. Antontsev S.N., Shmarev S.I. *A model porous medium equation with variable exponent of nonlinearity: existence, uniqueness and localization properties of solutions* // Nonlinear Analysis. – 2005. – V. 60. – P. 515-545.
6. Kovacik O., Rakosnik J. *On spaces* $L^{p(x)}$ *and* $W^{1,p(x)}$ // Czechoslovak Math. J. – 1991. – V.41 (116). – P. 592-618.
7. Самохин В.Н. *Об одном классе уравнений, обобщающих уравнения политропной фильтрации* // Дифф. уравнения. – 1996. – Т.32, №5. – С. 643-651.
8. Бугрій О.М. *Параболічні варіаційні нерівності в узагальнених просторах Лебега* // Наук. записки Вінницького держ. пед. ун-ту ім. М. Коцюбинського – Сер. фіз.-мат. – 2002. – Вип. 1. – С. 310-321.
9. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука. – 1972. – 496 с.
10. *Bokalo M.M. Well-posedness of problems without initial conditions for nonlinear parabolic variational inequalities* // Nonlinear boundary value problems. – 1998. – №8. – P. 58-63.
11. Бугрій О.М., Лавренюк С.П. *Параболічна варіаційна нерівність, що узагальнює рівняння політропної фільтрації* // Укр. мат. журн. – 2001. – Т.53, №7. – С. 867-878.

Львівський національний університет імені Івана Франка
механіко-математичний факультет

Надійшло 09.02.2005
Після переробки 03.10.2005