УДК 517.946

П. І. Каленюк, І. В. Когут, З. М. Нитребич

НЕЛОКАЛЬНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ НЕОДНОРІДНОЇ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ ЗА ЧАСОМ

P. I. Kalenyuk, I. V. Kohut, Z. M. Nytrebych. *Nonlocal boundary value problem for inhomogeneous system of PDE of first order in time*, Matematychni Studii, **24** (2005) 159–166.

We investigate the problem for an inhomogeneous system of PDE of first order in time and generally infinite order in spatial variables, with a homogeneous nonlocal boundary condition. By means of the differential-symbol method, we construct a solution of the problem and specify the classes of its univalent solvability in the class of vector-functions whose components are quasi-polynomials of a special form. In the case of non-uniqueness of a solution of the problem, we propose a method of constructing a partial solution.

П. И. Каленюк, И. В. Когут, З. Н. Нитребич. *Нелокальная краевая задача для неоднородной системы уравнений в частных производных первого порядка по времени* // Математичні Студії. – 2005. – Т.24, №2. – С.159–166.

Исследована задача для неоднородной системы уравнений в частных производных первого порядка по времени и, вообще говоря, бесконечного порядка по пространственным переменным с однородным нелокальным краевым условием. С помощью дифференциально-символьного метода построено решение задачи и выделены классы ее однозначной разрешимости в классе вектор-функций, компоненты которых суть квазиполиномы специального вида. При условии неединственности решения задачи указан способ построения частного решения.

1. Постановка задачі. Будемо вивчати в області змінних $t \in (0,h)$, $x \in \mathbb{R}^s$, $h > 0$ нелокальну крайову задачу

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) U(t,x) \equiv \left[E_n \frac{\partial}{\partial t} - A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right] U(t,x) = F(t,x), \tag{1}$$

$$U(0,x) + \mu U(h,x) = 0, \quad \mu \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

де $U(t,x) = (U_1(t,x), U_2(t,x), \ldots, U_n(t,x))^\tau$, $F(t,x) = (F_1(t,x), F_2(t,x), \ldots, F_n(t,x))^\tau$, $A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \left\|a_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right\|_{i,j\in\{1,\ldots,n\}}$, $a_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ — довільні диференціальні вирази зі сталими коефіцієнтами, символами яких є цілі аналітичні функції $a_{ij}(\nu)$, τ — символ транспонування, E_n — одинична матриця порядку n.

Поряд із неоднорідною системою (1) розглядатимемо відповідну до неї однорідну систему рівнянь

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) U(t,x) = 0. \tag{3}$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 35G15, 35K05.

Нелокальні крайові умови вперше введені та використані для опису всіх розв'язних розширень диференціального оператора у дослідженнях О.О. Дезіна ([2]). Класифікації нелокальних крайових умов присвячена стаття А.М. Нахушева ([8]). Згодом задачі з нелокальними крайовими умовами досліджувалися у багатьох працях (див., зокрема, [9], [1], [7] тощо). У статті [4] за допомогою диференціально-символьного методу ([6]) досліджено крайову задачу з неоднорідною нелокальною крайовою умовою для диференціального оператора першого порядку за часом та загалом нескінченного порядку за просторовими змінними. Задача (1)-(2) для випадку скалярного рівняння вивчалася у статті [5], де побудовано розв'язок задачі, доведено його існування та єдиність у певних класах функцій, а у статті [11] вказано алгоритм побудови часткового розв'язку такої задачі за умови існування її неєдиного розв'язку. Дослідженню задачі (3)-(2) присвячено статтю [3], де побудовано розв'язок цієї задачі у класі квазіполіномів спеціального вигляду.

У даній статті побудовано розв'язок задачі (1)-(2) і доведено його існування та єдиність у класі квазіполіномів деякого вигляду. Крім того, запропоновано спосіб побудови часткового розв'язку задачі (1)-(2) у дещо ширшому класі квазіполіномів.

Як і у випадку скалярного рівняння ([5]), задача (1)-(2) є, загалом, некоректною, оскільки відповідна задача (3)-(2) може мати нетривіальні розв'язки. У загальному випадку розв'язок задачі (1)-(2) будемо шукати як суму розв'язку задачі (3)-(2) і часткового розв'язку задачі (1)-(2).

2. Знаходження розв'язку задачі у класі єдиності. Для $n, r \in \mathbb{Z}_+^s$, $x, \nu \in \mathbb{R}^s$ введемо такі позначення

$$x^r = \prod_{i=1}^{s} x_i^{r_i}\ , \quad \nu \cdot x = \sum_{i=1}^{s} \nu_i x_i\ ,$$

$$r! = \prod_{i=1}^{s} r_i!\ , \quad C_n^r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}\ , \quad |r| = \sum_{i=1}^{s} r_i\ , \quad \frac{\partial^r}{\partial \nu^r} = \frac{\partial^{|r|}}{\partial \nu_1^{r_1} \partial \nu_2^{r_2} \dots \partial \nu_s^{r_s}}\ ,$$

при цьому вважаємо, що $r \le n \Leftrightarrow r_i \le n_i,\ i \in \{1, \dots, s\}$.

Розглянемо характеристичний поліном $\varphi(\lambda, \nu) \equiv \det L\,(\lambda, \nu) = \lambda^n + \sum_{j=1}^{n} \xi_j(\nu) \lambda^{n-j}$ матриці $A(\nu)$, яка одержується з $A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ заміною $\frac{\partial}{\partial x}$ на $\nu \in \mathbb{R}^s$. Оскільки елементи матриці $A(\nu)$ є цілими функціями, то $\xi_j(\nu)$, $j \in \{1, \dots, n\}$, як суперпозиції цілих функцій є цілими функціями.

Позначимо через $\widetilde{L}\,(\lambda, \nu)$ приєднану матрицю для $L\,(\lambda, \nu)$. Тоді правильним буде співвідношення $L(\lambda, \nu)\widetilde{L}(\lambda, \nu) = \varphi(\lambda, \nu) E_n$. Характеристичному поліномові $\varphi(\lambda, \nu)$ заміною λ на $\frac{d}{dt}$ співставимо диференціальний вираз $\varphi\left(\frac{d}{dt}, \nu\right)$. Позначимо через $W(t, \nu)$ розв'язок задачі Коші

$$\varphi\left(\frac{d}{dt}, \nu\right) W(t, \nu) = 0, \tag{4}$$

$$\frac{d^k W}{dt^k}(0, \nu) = \delta_{k,n-1}, \quad k \in \{0, \dots, n-1\}, \tag{5}$$

де $\delta_{k,n-1}$ — символ Кронекера. Крім того, позначимо $D(\nu) = E_n + \mu B(h, \nu)$, $\quad \Delta(\nu) = \det D(\nu)$, $B(t, \nu) = \widetilde{L}^{\tau}\left(\frac{d}{dt}, \nu\right)\left(W(t, \nu) E_n\right)$.

У випадку, коли $\Delta(\nu)\equiv 0$, задача є виродженою. Надалі його не розглядатимемо, тобто вважатимемо, що $\Delta(\nu)\not\equiv 0$.

Лема 1. *Матриця $B(t,\nu)$ має такі властивості:*

1) $L\left(\frac{d}{dt},\nu\right)B^\tau(t,\nu)=0$; 2) $B(0,\nu)=E_n$; 3) елементи матриці $B(t,\nu)$ — цілі функції за змінною ν; 4) елементи матриці $B(t,\nu)$ — квазіполіноми за змінною t.

Доведення. Доведемо 1). Маємо $L\left(\frac{d}{dt},\nu\right)B^\tau(t,\nu) = L\left(\frac{d}{dt},\nu\right)\left[\widetilde{L}^\tau\left(\frac{d}{dt},\nu\right)(W(t,\nu)E_n)\right]^\tau$. Запишемо і перетворимо подібний вираз для довільних числової матриці L розміру $n\times n$ та числа W $L\left[\widetilde{L}^\tau(WE_n)\right]^\tau = L\left[(WE_n)\widetilde{L}\right] = L\left[\widetilde{L}(WE_n)\right] = \left(L\widetilde{L}\right)(WE_n) = (\det L)(WE_n) = [(\det L)W]E_n$. Використовуючи цю рівність, перетворимо попередній вираз $L\left(\frac{d}{dt},\nu\right)B^\tau(t,\nu)=\left[\varphi\left(\frac{d}{dt},\nu\right)W(t,\nu)\right]E_n=0$. Властивість 1) доведено.

Доведемо 2). Неважко переконатися, що $\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)^{n-1}\widetilde{L}(\lambda,\nu)=(n-1)!E_n$. На підставі такого співвідношення, а також (5), отримаємо $B(0,\nu)=E_n$, що доводить властивість.

Доведемо 3). За властивостями 1) і 2) матриця $V=B^\tau(t,\nu)$ є розв'язком задачі Коші $L\left(\frac{d}{dt},\nu\right)V(t,\nu)=0$, $V(0,\nu)=E_n$, а оскільки коефіцієнти оператор-матриці $L\left(\frac{d}{dt},\nu\right)$ є цілими функціями стосовно ν, то за теоремою Пуанкаре ([10]) $B^\tau(t,\nu)$ є цілою за ν. Властивість доведено.

4) випливає з вигляду матриці $B(t,\nu)$ і з того, що функція $W(t,\nu)$ як розв'язок задачі Коші (4)-(5) для рівняння зі сталими коефіцієнтами є квазіполіномом за t. □

Лема 2. *Матриця*

$$\Gamma(\lambda,\nu,t)=\frac{\widetilde{L}^\tau(\lambda,\nu)}{\varphi(\lambda,\nu)}\left[\exp[\lambda t]E_n-(1+\mu\exp[\lambda h])D^{-1}(\nu)B(t,\nu)\right], \tag{6}$$

є цілою за λ і при $\mu\neq 0$ може мати особливості для $\nu\in P$, де

$$P=\{\nu\in\mathbb{C}^s:\Delta(\nu)=0\}. \tag{7}$$

Доведення. Матрицю (6) можна подати у вигляді

$$\Gamma(\lambda,\nu,t)=Q(\lambda,\nu,t)-\mu Q(\lambda,\nu,h)D^{-1}(\nu)B(t,\nu), \tag{8}$$

де

$$Q(\lambda,\nu,t)=\frac{\widetilde{L}^\tau(\lambda,\nu)}{\varphi(\lambda,\nu)}\left[\exp[\lambda t]E_n-B(t,\nu)\right]. \tag{9}$$

Справді, з (6) отримуємо:

$$\begin{aligned}
\Gamma(\lambda,\nu,t)&=\frac{\widetilde{L}^\tau(\lambda,\nu)}{\varphi(\lambda,\nu)}\left[\exp[\lambda t]E_n-(1+\mu\exp[\lambda h])D^{-1}(\nu)B(t,\nu)\right]=\\
&=Q(\lambda,\nu,t)+\frac{\widetilde{L}^\tau(\lambda,\nu)}{\varphi(\lambda,\nu)}B(t,\nu)-\frac{\widetilde{L}^\tau(\lambda,\nu)}{\varphi(\lambda,\nu)}(1+\mu\exp[\lambda h])D^{-1}(\nu)B(t,\nu)=\\
&=Q(\lambda,\nu,t)+\frac{\widetilde{L}^\tau(\lambda,\nu)}{\varphi(\lambda,\nu)}\left\{E_n-(1+\mu\exp[\lambda h])D^{-1}(\nu)\right\}B(t,\nu)=\\
&=Q(\lambda,\nu,t)+\frac{\widetilde{L}^\tau(\lambda,\nu)}{\varphi(\lambda,\nu)}\left\{D(\nu)D^{-1}(\nu)-(1+\mu\exp[\lambda h])D^{-1}(\nu)\right\}B(t,\nu)=\\
&=Q(\lambda,\nu,t)+\frac{\widetilde{L}^\tau(\lambda,\nu)}{\varphi(\lambda,\nu)}\left\{D(\nu)-(1+\mu\exp[\lambda h])E_n\right\}D^{-1}(\nu)B(t,\nu)=
\end{aligned}$$

$$= Q(\lambda,\nu,t) + \frac{\widetilde{L}^{\tau}(\lambda,\nu)}{\varphi(\lambda,\nu)}\left\{E_n + \mu B(h,\nu) - E_n - \mu\exp\left[\lambda h\right]E_n\right\}D^{-1}(\nu)B(t,\nu) =$$
$$= Q(\lambda,\nu,t) + \frac{\widetilde{L}^{\tau}(\lambda,\nu)}{\varphi(\lambda,\nu)}\left\{-\mu\left(\exp\left[\lambda h\right]E_n - B(h,\nu)\right)\right\}D^{-1}(\nu)B(t,\nu) =$$
$$= Q(\lambda,\nu,t) - \mu\frac{\widetilde{L}^{\tau}(\lambda,\nu)}{\varphi(\lambda,\nu)}\left\{\exp\left[\lambda h\right]E_n - B(h,\nu)\right\}D^{-1}(\nu)B(t,\nu) =$$
$$= Q(\lambda,\nu,t) - \mu Q(\lambda,\nu,h)D^{-1}(\nu)B(t,\nu).$$

За лемою 1, як неважко переконатися, матриця $V = Q^{\tau}(\lambda,\nu,t)$ є розв'язком задачі Коші $L\left(\frac{d}{dt},\nu\right)V(\lambda,\nu,t) = \exp[\lambda t]E_n$, $V(\lambda,\nu,0) = 0$, а, отже, за теоремою Пуанкаре ([10]), є цілою за λ та ν. З урахуванням цього, а також властивості 3) матриці $B(\nu,t)$ з леми 1, з (8) випливає твердження леми 2. □

Лема 3. *Матриця $V = \Gamma^{\tau}(\lambda,\nu,t)$ вигляду (6) є розв'язком задачі*

$$L\left(\frac{d}{dt},\nu\right)V(\lambda,\nu,t) = \exp[\lambda t]E_n, \quad V(\lambda,\nu,0) + \mu V(\lambda,\nu,h) = 0.$$

Доведення. Справді, $L\left(\frac{d}{dt},\nu\right)\Gamma^{\tau}(\lambda,\nu,t) = L\left(\frac{d}{dt},\nu\right)\left[\frac{\widetilde{L}^{\tau}(\lambda,\nu)}{\varphi(\lambda,\nu)}\left[\exp[\lambda t]E_n - \right.\right.$ $\left.\left.-(1+\mu\exp[\lambda h])D^{-1}(\nu)B(t,\nu)\right]\right]^{\tau}$. Застосовуючи матричну рівність $L\left[G^{\tau}B\right]^{\tau} = \left[G^{\tau}\left[LB^{\tau}\right]^{\tau}\right]^{\tau}$, отримаємо $L\left(\frac{d}{dt},\nu\right)\Gamma^{\tau}(\lambda,\nu,t) =$

$$= \frac{1}{\varphi(\lambda,\nu)}\left[\widetilde{L}^{\tau}(\lambda,\nu)\left[L\left(\frac{d}{dt},\nu\right)\left[\exp\left[\lambda t\right]E_n - \left(1+\mu\exp\left[\lambda h\right]\right)D^{-1}(\nu)B(t,\nu)\right]^{\tau}\right]^{\tau}\right]^{\tau} =$$
$$= \frac{1}{\varphi(\lambda,\nu)}\left[\widetilde{L}^{\tau}(\lambda,\nu)\left[L\left(\frac{d}{dt},\nu\right)\left[\exp\left[\lambda t\right]E_n\right]^{\tau}\right]^{\tau}\right]^{\tau} -$$
$$-\frac{\left(1+\mu\exp\left[\lambda h\right]\right)}{\varphi(\lambda,\nu)}\left[\widetilde{L}^{\tau}(\lambda,\nu)\left[L\left(\frac{d}{dt},\nu\right)\left[D^{-1}(\nu)B(t,\nu)\right]^{\tau}\right]^{\tau}\right]^{\tau}.$$

Використовуючи лему 1, одержуємо

$$L\left(\frac{d}{dt},\nu\right)\Gamma^{\tau}(\lambda,\nu,t) = \frac{1}{\varphi(\lambda,\nu)}\left[\widetilde{L}^{\tau}(\lambda,\nu)L^{\tau}\left(\frac{d}{dt},\nu\right)\left[\exp\left[\lambda t\right]E_n\right]\right]^{\tau} -$$
$$-\frac{\left(1+\mu\exp\left[\lambda h\right]\right)}{\varphi(\lambda,\nu)}\left[\widetilde{L}^{\tau}(\lambda,\nu)\left[L\left(\frac{d}{dt},\nu\right)B^{\tau}(t,\nu)\left(D^{-1}(\nu)\right)^{\tau}\right]^{\tau}\right]^{\tau} =$$
$$= \frac{1}{\varphi(\lambda,\nu)}\left[\widetilde{L}^{\tau}(\lambda,\nu)\left[\exp\left[\lambda t\right]L^{\tau}\left(\lambda,\nu\right)\right]\right]^{\tau} = \exp[\lambda t]E_n.$$

Перевіримо виконання нелокальної умови: $\Gamma(\lambda,\nu,0) + \mu\Gamma(\lambda,\nu,h) =$

$$= \left.\left[\frac{\widetilde{L}^{\tau}(\lambda,\nu)}{\varphi(\lambda,\nu)}\left[\exp\left[\lambda t\right]E_n - \left(1+\mu\exp\left[\lambda h\right]\right)D^{-1}(\nu)B(t,\nu)\right]\right]\right|_{t=0} +$$
$$+\mu\left.\left[\frac{\widetilde{L}^{\tau}(\lambda,\nu)}{\varphi(\lambda,\nu)}\left[\exp\left[\lambda t\right]E_n - \left(1+\mu\exp\left[\lambda h\right]\right)D^{-1}(\nu)B(t,\nu)\right]\right]\right|_{t=h} =$$
$$= \frac{\widetilde{L}^{\tau}(\lambda,\nu)}{\varphi(\lambda,\nu)}\Big\{E_n - \left(1+\mu\exp\left[\lambda h\right]\right)D^{-1}(\nu) +$$

$$+\mu\left[\exp[\lambda h]E_n-(1+\mu\exp[\lambda h])D^{-1}(\nu)B(h,\nu)\right]\Big\}=$$

$$=\frac{\widetilde{L}^{\tau}(\lambda,\nu)}{\varphi(\lambda,\nu)}\Big\{E_n-(1+\mu\exp[\lambda h])\left[D^{-1}(\nu)+\mu D^{-1}(\nu)B(h,\nu)\right]+\mu\exp[\lambda h]E_n\Big\}=$$

$$=\frac{\widetilde{L}^{\tau}(\lambda,\nu)}{\varphi(\lambda,\nu)}\Big\{E_n-(1+\mu\exp[\lambda h])E_n+\mu\exp[\lambda h]E_n\Big\}=0.$$

Очевидно, що ця умова буде виконуватися і для $\Gamma^{\tau}(\lambda,\nu,t)$, що й треба було довести. □

Введемо до розгляду клас $K_{M,L}$ квазіполіномів вигляду

$$f(t,x)=\sum_{j=1}^{m}\exp[\beta_j t+\alpha_j\cdot x]Q_j(t,x),$$

де $(t,x)\in\mathbb{R}^{1+s}$, $m\in\mathbb{N}$, $\beta_j\in M\subseteq\mathbb{C}$, $\alpha_j\in L\subseteq\mathbb{C}^s$, $Q_j(t,x)$ — многочлени змінних t і x.

Теорема 1. *Якщо у системі* (1) $F_k(t,x)\in K_{\mathbb{C},\mathbb{C}^s\setminus P}, k\in\{1,\ldots,n\}$, *де* P — *множина* (7)*, то у класі вектор-функцій, компоненти яких належать до* $K_{\mathbb{C},\mathbb{C}^s\setminus P}$*, існує єдиний розв'язок задачі* (1)-(2)*. Цей розв'язок можна зобразити у вигляді*

$$U(t,x)=\left[F^{\tau}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\{\exp[\nu\cdot x]\,\Gamma(\lambda,\nu,t)\}\Big|_{\lambda=0,\,\nu=0}\right]^{\tau}.\tag{10}$$

Доведення. Доведемо спочатку, що вектор-функція (10) задовольняє систему (1). Зауважимо, що оператори $L\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)$ і $F^{\tau}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right)$ є диференціальними операторами зі сталими коефіцієнтами, а матриця $\Gamma^{\tau}(\lambda,\nu,t)$ за лемою 2 є цілою за λ із певними особливостями за ν. Враховуючи матричну рівність $L\left[F^{\tau}\Gamma\right]^{\tau}=\left[F^{\tau}\left\{L\Gamma^{\tau}\right\}^{\tau}\right]^{\tau}$, комутативність операцій $\frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial\lambda}$, $\frac{\partial}{\partial\nu}$ і лему 3, одержуємо

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)U(t,x)=\left[F^{\tau}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left[L\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)\{\exp[\nu\cdot x]\,\Gamma^{\tau}(\lambda,\nu,t)\}\right]^{\tau}\Big|_{\lambda=0,\,\nu=0}\right]^{\tau}=$$

$$=\left[F^{\tau}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\exp[\nu\cdot x]\left[L\left(\frac{d}{dt},\nu\right)\Gamma^{\tau}(\lambda,\nu,t)\right]^{\tau}\right\}\Big|_{\lambda=0,\,\nu=0}\right]^{\tau}=$$

$$=\left[F^{\tau}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\{\exp[\lambda t+\nu\cdot x]\,E_n\}\Big|_{\lambda=0,\,\nu=0}\right]^{\tau}=F(t,x).$$

Використовуючи леми 2 і 3, маємо $U(0,x)+\mu U(h,x)=$

$$=\left[F^{\tau}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda},\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\{\exp[\nu\cdot x]\left[\Gamma(\lambda,\nu,0)+\mu\Gamma(\lambda,\nu,h)\right]\}\Big|_{\lambda=0,\,\nu=0}\right]^{\tau}=0.$$

Нехай $F_k(t,x)\in K_{\mathbb{C},\mathbb{C}^s\setminus P}$, $k\in\{1,\ldots,n\}$. Тоді вектор-функцію $F(t,x)$ можна записати у вигляді

$$F(t,x)=\sum_{j=1}^{m}\exp[\beta_j t+\alpha_j\cdot x]Q_j(t,x),\quad \beta_j\in\mathbb{C},\quad \alpha_j\in\mathbb{C}^s\setminus P,$$

де $Q_j(t,x) = (Q_{j1}(t,x), Q_{j2}(t,x), \ldots, Q_{jn}(t,x))^\tau$, $Q_{jk}(t,x)$, $j \in \{1,\ldots,m\}$, $k \in \{1,\ldots,n\}$, — многочлени.

За формулою (10) знаходимо

$$U\left(t,x\right) = \left[\sum_{j=1}^{m} \exp\left[\beta_j \frac{\partial}{\partial\lambda} + \alpha_j \cdot \frac{\partial}{\partial\nu}\right] Q_j^\tau\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}, \frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\exp\left[\nu\cdot x\right]\Gamma(\lambda,\nu,t)\right\}\Bigg|_{\lambda=0,\,\nu=0}\right]^\tau =$$

$$= \left[\sum_{j=1}^{m} Q_j^\tau\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}, \frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\exp\left[\nu\cdot x\right]\Gamma(\lambda,\nu,t)\right\}\Bigg|_{\lambda=\beta_j,\,\nu=\alpha_j}\right]^\tau.$$

Матриця $\Gamma(\lambda,\nu,t)$ та її частинні похідні в точках (β_j,α_j), $j \in \{1,\ldots,m\}$, згідно з лемою 2, є визначеними. Крім того, знайдений за поданою формулою розв'язок $U(t,x)$ є вектор-функцією, компоненти якої є квазіполіномами з класу $K_{\mathbb{C},\mathbb{C}^s\setminus P}$, якщо $F_k\left(t,x\right) \in K_{\mathbb{C},\mathbb{C}^s\setminus P}$, $k \in \{1,\ldots,n\}$ (це випливає з вигляду розв'язку $U(t,x)$, а також властивості 1 матриці $B(\nu,t)$ з леми 1). Отже, доведено існування розв'язку задачі (1)-(2) у класі вектор-функцій, компоненти яких належать до $K_{\mathbb{C},\mathbb{C}^s\setminus P}$.

Єдиність розв'язку задачі (1)-(2) доведемо від супротивного. Припустимо, що у класі вектор-функцій, компоненти яких належать до $K_{\mathbb{C},\mathbb{C}^s\setminus P}$, існують розв'язки $U_1(t,x)$, $U_2(t,x)$ задачі (1)-(2), причому $U_1(t,x) \neq U_2(t,x)$. Тоді $U(t,x) = U_1(t,x) - U_2(t,x)$ є вектор-функцією, компоненти якої є квазіполіномами з класу $K_{\mathbb{C},\mathbb{C}^s\setminus P}$, і є розв'язком задачі (3)-(2). Однак, елементи ядра задачі (1)-(2) з компонентами квазіполіномного вигляду можуть міститися лише в $K_{\mathbb{C},P}$ (див. [3]). Очевидно, що $K_{\mathbb{C},\mathbb{C}^s\setminus P} \cap K_{\mathbb{C},P} = \{0\}$, тоді $U(t,x) = U_1(t,x) - U_2(t,x) \equiv 0$, тобто $U_1(t,x) = U_2(t,x)$. Одержали суперечність. Теорему доведено. $\square$

Зауваження 1. Якщо в задачі (1)-(2) покласти $\mu = 0$, то матимемо задачу Коші, яка вивчалася у книзі [6]. При покладанні $\mu = 0$ у формулі (10) одержимо розв'язок задачі Коші, отриманий у цій праці, власне, для цього у формулі (10) слід замінити $\Gamma(\lambda,\nu,t)$ на $Q(\lambda,\nu,t)$, де $Q(\lambda,\nu,t)$ — матриця (9).

Надалі вважатимемо, що $\mu \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

3. Знаходження розв'язку задачі у класі неєдиності. Припустимо, що компоненти вектор-функції $F(t,x)$ у системі (1) є квазіполіномами, проте не належать до класу $K_{\mathbb{C},\mathbb{C}^s\setminus P}$, тобто порушуються умови теореми 1 У такому разі формула (10), очевидно, є незастосовною. Тоді виникає проблема знаходження часткового розв'язку задачі у ширшому класі ($K_{\mathbb{C},\mathbb{C}^s}$), з точністю до елементів ядра. Для знаходження часткового розв'язку у цьому випадку виділимо з квазіполіномів $F_k\left(t,x\right)$ ті доданки, що належать до $K_{\mathbb{C},\mathbb{C}^s\setminus P}$, окремо від тих, що належать до $K_{\mathbb{C},P}$, і подамо вектор-функцію $F(t,x)$ у вигляді суми двох вектор-функцій: $F(t,x) = F^+(t,x) + F^-(t,x)$, де $F_k^+(t,x) \in K_{\mathbb{C},\mathbb{C}^s\setminus P}$, $F_k^-(t,x) \in K_{\mathbb{C},P}$, $k \in \{1,\ldots,n\}$. Тоді для $F^+(t,x)$ можна застосовувати формулу (10), а для $F^-(t,x)$ вкажемо іншу формулу.

Введемо для $\alpha \in P$ множину $\Omega(\alpha) = \left\{\omega \in \mathbb{Z}_+^s : \frac{\partial^\omega \Delta(\nu)}{\partial\nu^\omega}\Big|_{\nu=\alpha} \neq 0\right\}$ (подібно як у [3]). Очевидно, що $\Omega(\alpha) \neq \varnothing$.

Нехай $F(t,x) = \exp[\beta t + \alpha\cdot x]Q(t,x)$, де $Q(t,x)$ — поліном, коефіцієнтами якого є вектор-стовпці розміру n, m — степінь полінома $Q(t,x)$ за сукупністю змінних

$x_1, x_2, \ldots, x_s$. Зауважимо, що матриця $\sigma(\lambda, \nu, t, x) = \Delta(\nu)\exp[\nu \cdot x]\Gamma(\lambda, \nu, t)$ є цілою за λ і ν. Тоді формула (10) матиме вигляд

$$U(t,x) = \left[Q^{\tau}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}, \frac{\partial}{\partial\nu}\right) \left\{ \frac{\sigma(\lambda,\nu,t,x)}{\Delta(\nu)} \right\}\Big|_{\lambda=\beta,\, \nu=\alpha} \right]^{\tau}.$$

Вираз, отриманий у результаті дії векторного диференціального полінома $Q^{\tau}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}, \frac{\partial}{\partial\nu}\right)$ на вираз у фігурних дужках, подамо у вигляді

$$\left[Q^{\tau}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}, \frac{\partial}{\partial\nu}\right) \left\{ \frac{\sigma(\lambda,\nu,t,x)}{\Delta(\nu)} \right\} \right]^{\tau} = \frac{\rho(\lambda,\nu,t,x)}{[\Delta(\nu)]^{m+1}}. \tag{11}$$

Теорема 2. *Нехай* $F(t,x) = \exp[\beta t + \alpha \cdot x]Q(t,x)$, *де* $\alpha \in P$, r_0 — *довільний вектор з* $\Omega(\alpha)$, *для якого виконується рівність* $|r_0| = \min_{r\in\Omega(\alpha)} |r|$, $Q(t,x)$ — *поліном, коефіцієнтами якого є вектор-стовпці розміру* n, m — *степінь полінома* $Q(t,x)$ *за сукупністю змінних* $x_1, x_2, \ldots, x_s$. *Тоді частковий розв'язок задачі* (1), (2) *можна знайти за формулою*

$$U(t,x) = \frac{\frac{\partial^{r_m}}{\partial\nu^{r_m}}\rho(\beta,\nu,t,x)\big|_{\nu=\alpha}}{\frac{\partial^{r_m}}{\partial\nu^{r_m}}[\Delta(\nu)]^{m+1}\big|_{\nu=\alpha}}, \tag{12}$$

де $\rho(\beta,\nu,t,x) = \rho(\lambda,\nu,t,x)|_{\lambda=\beta}$, *а* $\rho(\lambda,\nu,t,x)$ — *вектор-функція, що визначається рівністю* (11), r_m — *довільний вектор, такий що* $|r_m| = (m+1)|r_0|$, $\frac{\partial^{r_m}}{\partial\nu^{r_m}}[\Delta(\nu)]^{m+1}\big|_{\nu=\alpha} \neq 0$.

Доведення. Вище зазначалось, що матриця $\sigma(\lambda,\nu,t,x)$ є цілою за λ і ν. Очевидно також, що

$$\frac{\partial^r}{\partial\nu^r}\left\{ \frac{\sigma(\lambda,\nu,t,x)}{\Delta(\nu)} \right\} = \frac{\sigma_r(\lambda,\nu,t,x)}{[\Delta(\nu)]^{|r|+1}},$$

де $\sigma_r(\lambda,\nu,t,x)$ — деяка ціла матриця від λ і ν. Тоді у формулі (11) маємо

$$\rho(\lambda,\nu,t,x) = \sum_{|r|\le m} [\Delta(\nu)]^{m-|r|} \left[\gamma_r\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)\sigma_r(\lambda,\nu,t,x) \right]^{\tau},$$

де $\gamma_r\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)$ — вектор-рядки, компонентами яких є диференціальні поліноми за змінною λ. З останнього виразу видно, що вектор-функція $\rho(\lambda,\nu,t,x)$ є цілою за λ і ν.

Доведемо, що вектор-функція (12) є розв'язком системи (1). Легко бачити, що

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)\sigma(\lambda,\nu,t,x) = \exp[\lambda t + \nu \cdot x]\Delta(\nu)E_n. \tag{13}$$

Зауважимо також, що $(\forall r : |r| < |r_m|) : \frac{\partial^r}{\partial\nu^r}[\Delta(\nu)]^{m+1}\big|_{\nu=\alpha} = 0$. Підставивши вектор-функцію (12) у систему (1) і врахувавши (13) і (11), а також останню рівність і те, що $\alpha \in P$, отримаємо

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)U(t,x) = \frac{\frac{\partial^{r_m}}{\partial\nu^{r_m}}\left\{[\Delta(\nu)]^{m+1}Q(t,x)\exp[\beta t + \nu\cdot x]\right\}\big|_{\nu=\alpha}}{\frac{\partial^{r_m}}{\partial\nu^{r_m}}[\Delta(\nu)]^{m+1}\big|_{\nu=\alpha}} =$$

$$= Q(t,x)\exp[\beta t]\frac{\frac{\partial^{r_m}}{\partial\nu^{r_m}}\left\{[\Delta(\nu)]^{m+1}\exp[\nu\cdot x]\right\}\big|_{\nu=\alpha}}{\frac{\partial^{r_m}}{\partial\nu^{r_m}}[\Delta(\nu)]^{m+1}\big|_{\nu=\alpha}} =$$

$$= Q(t,x)\exp[\beta t]\frac{\sum\limits_{r\le r_m} C_{r_m}^r \frac{\partial^r}{\partial\nu^r}[\Delta(\nu)]^{m+1}\Big|_{\nu=\alpha} x^{r_m-r}\exp[\alpha\cdot x]}{\frac{\partial^{r_m}}{\partial\nu^{r_m}}[\Delta(\nu)]^{m+1}\Big|_{\nu=\alpha}} =$$
$$= \exp[\beta t+\alpha\cdot x]Q(t,x).$$

Отже, вектор-функція (12) є розв'язком неоднорідної системи рівнянь (1). Крім того, вона задовольняє однорідну нелокальну умову (2). Останнє випливає з рівності $\sigma(\lambda,\nu,0,x)+\mu\sigma(\lambda,\nu,h,x)=0$. Теорему доведено. □

ЛІТЕРАТУРА

1. Антыпко И. И., Перельман М. А. *О классах единственности решения нелокальной многоточечной краевой задачи в бесконечном слое* // Теория функций, функц. анализ и их прилож.(Харьков).– 1976. – Вып. 16. – С. 98–109.
2. Дезин А. А. Общие вопросы теории граничных задач. – М.: Наука, 1980. – 208 с.
3. Каленюк П.І., Когут І.В., Нитребич З.М. *Диференціально-символьний метод розв'язування нелокальної крайової задачі для однорідної системи рівнянь із частинними похідними* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – Т.46, №3. – С. 25–31.
4. Каленюк П.І., Когут І.В., Нитребич З.М. *Диференціально-символьний метод розв'язування нелокальної крайової задачі для рівняння з частинними похідними* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – Т.45, №2. – С. 7–15.
5. Каленюк П.І., Когут І.В., Нитребич З.М. *Диференціально-символьний метод розв'язування нелокальної крайової задачі для неоднорідного рівняння із частинними похідними* // Вісн. Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2003. – Вип. 62. – С. 60–66.
6. Каленюк П.І., Нитребич З.М. Узагальнена схема відокремлення змінних. Диференціально-символьний метод. – Львів: Вид-во НУ "Львів. політех.", 2002. – 292 с.
7. Матійчук М.І. *Про нелокальну параболічну крайову задачу* // Укр. мат. журн. – 1996. – Т.48, №3. – С. 362–367.
8. Нахушев А.М. *О нелокальных краевых задачах со смещением и их связи с нагруженными уравнениями* // Диф. уравнения. – 1985. – Т.21, №1.– С. 92–101.
9. Пташник Б.Й., Ільків В.С., Кміть І.Я., Поліщук В.М. Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.
10. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1980. – 232 с.
11. Kalenyuk P., Kohut I., Nytrebych Z. *Differential-symbol method of solving the nonlocal boundary value problem in the class of non-uniqueness of its solution* // Mat. Studii. – 2003. – V.20, №1. – P. 53–60.

НУ "Львівська політехніка", вул. С.Бандери, 12, Львів, Україна
University of Rzeszów, Rejtana str. 17a, Rzeszów, Poland

Надійшло 09.01.2005
Після переробки 03.07.2005