УДК 512.554.314

В. И. Сущанский, Н. В. Нетреба

АЛГЕБРЫ ЛИ, АССОЦИИРОВАННЫЕ С СИЛОВСКИМИ P-ПОДГРУППАМИ КОНЕЧНЫХ СИММЕТРИЧЕСКИХ ГРУПП

V. I. Sushchansky, N. V. Netreba. *Lie algebras associated with Sylow p-subgroups of finite symmetric groups*, Matematychni Studii, **24** (2005) 127–138.

We study Lie algebras associated with Sylow p-subgroups of symmetric group of degree p^n (p is a prime). It is shown that these Lie algebras have “tableau” representation that completely characterize these algebras. We define for such representation the technical notions analogously to Sylow p-subgroups of symmetric groups of degree p^n. Using these notions we characterize the lower and the upper central series and commutant series of these Lie algebras.

В. И. Сущанский, Н. В. Нетреба. *Алгебры Ли, ассоциированные с силовскими p-подгруппами конечных симметрических групп* // Математичні Студії. – 2005. – Т.24, №2. – С.127–138.

Изучаются алгебры Ли, ассоциированные с силовскими p-подгруппами симметрических групп порядка p^n (p — простое число). Показано, что рассматриваемые алгебры Ли имеют некоторое “табличное” представление, которое полностью характеризует эти алгебры. С помощью такого представления на алгебры переносится ряд технических понятий, определенных ранее для силовских p-подгрупп: высоты многочлена, характеристики таблицы и группы. В терминах характеристик описываются нижний и верхний центральные ряды и ряд коммутантов этих алгебр Ли, а также исследуются другие их свойства.

1. Введение. Начиная с работ В. Магнуса (см. например [5]) и, особенно, М. Лазара ([11]) конструкция алгебры Ли, ассоциированной с (нильпотентно аппроксимируемой) группой, нашла широкое применение в различных разделах теории групп и теории проконечных групп ([6], [8]). Алгебры Ли ассоциированные с группами, являются теперь рабочим инструментом при исследовании самых различных проблем теории групп, наиболее известной из которых является ослабленная проблема Бернсайда ([9]). При переходе к рассмотрению алгебр Ли исследуемая в группах проблема как правило упрощается, появляется больше вычислительных возможностей для ее решения. Это связано с тем, что использование ассоциированных с группами алгебр Ли позволяет использовать линейные методы в доказательствах и вычислениях, осуществлять естественную переформулировку теоретико-групповых вопросов в лиевых терминах. Именно поэтому исследованию алгебр Ли, сопоставленных различным группам, в настоящее время уделяется много внимания.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 20D15, 20D20, 20F40, 17B30.

В данной работе исследуются алгебры Ли ассоциированные с силовскими p-подгруппами симметрических групп порядка p^n (p — простое число, $n \in \mathbb{N}$). Мы используем понятия и утверждения из работы [2], где рассматривалось специальное "табличное" представление силовских p-подгрупп симметрических групп порядка p^n, $n \in \mathbb{N}$. Устанавливается, что для рассматриваемых алгебр Ли также существует естественное "табличное" представление, которое полностью их характеризует. Это представление позволяет перенести на алгебры ряд технических понятий, определенных в [2] для силовских p-подгрупп, основными из которых являются понятия высоты редуцированного многочлена, характеристики таблицы и характеристики подалгебры. В терминах характеристик описываются нижний и верхний центральные ряды и ряд коммутантов этих алгебр Ли, устанавливаются другие их свойства.

В п. 1 приводятся необходимые сведения о силовских p-подгруппах симметрических групп. В п. 2 строится алгебра Ли L_m, элементы которой являются таблицами вида $[u_1, u_2(x_1), \ldots, u_m(x_1, \ldots, x_{m-1})]$, где $u_1 \in \mathbb{Z}_p$, $u_i(x_1, \ldots, x_{i-1})$ — многочлен от переменных $x_1, \ldots, x_{i-1}$ над $\mathbb{Z}_p$ редуцированный по модулю идеала порожденного степенями $x_1^p, \ldots, x_{i-1}^p$, а операции $+$ и $(\ ,)$ заданы в координатной форме равенствами

$$\{(u+v)\}_k = \{u\}_k + \{v\}_k, \quad \{(u,v)\}_k = \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{\partial \{v\}_k}{\partial x_i} \cdot \{u\}_i - \frac{\partial \{u\}_k}{\partial x_i} \cdot \{v\}_i \right)$$

где $\{u\}_k$, $\{v\}_k$ — k-тые координаты таблиц u, v. Так построенная алгебра является естественным гомоморфным образом алгебры Ли FL_∞, которая сопоставляется группе автоморфизмов p-адического корневого дерева ([10]), и также характеризуется в терминах (бесконечных) таблиц.

Изучению алгебры Ли $L(P_m)$, ассоциированной с нижним центральным рядом силовской p-подгруппы P_m симметрической группы S_{p^m}, посвящен п. 3. Доказывается, что алгебры $L(P_m)$ и L_m изоморфны. Строение алгебры Ли L_m и некоторые ее свойства охарактеризованы в п. 4. Выделяются так называемые параллелотопические подалгебры, которые задаются целочисленными векторами с неотрицательными координатами, после чего характеризуются члены нижнего и верхнего центрального ряда и ряда коммутантов $L(P_m)$, устанавливаются условия, когда параллелотопическая подалгебра будет идеалом.

1.1. Необходимые сведения о силовских p-подгруппах. Как известно (см. например [1], [3], [4]) силовская p-подгруппа P_m симметрической группы S_{p^m} раскладывается в сплетение m циклических групп порядка p. Это разложение можно использовать для построения так называемого табличного представления группы P_m. Табличное представление предложено Л. А. Калужниным ([3]) и использовалось им в ряде работ для исследования строения группы P_m. Согласно [3] (см. также [4]) группа P_m изоморфна группе треугольных таблиц вида

$$u = [a_1, a_2(x_1), \ldots, a_m(x_1, \ldots, x_{m-1})], \tag{1}$$

где $a_1 \in \mathbb{Z}_p$, $a_{i+1}(x_1, \ldots, x_i) = a_{i+1}(\overline{x}_i)$ — редуцированный по модулю идеала $\langle x_1^p - x_1, \ldots, x_i^p - x_i \rangle$ многочлен над полем $\mathbb{Z}_p$ вычетов по модулю p ($1 \le i \le m-1$). Умножение таблиц определяется равенством

$$[a_1, a_2(x_1), \ldots, a_m(x_1, \ldots, x_{m-1})] \cdot [b_1, b_2(x_1), \ldots, b_m(x_1, \ldots, x_{m-1})] =$$

$$= [a_1 + b_1, a_2(x_1) + b_2(x_1 + a_1), \ldots, a_m(x_1, \ldots, x_{m-1}) + \\ + b_m(x_1 + a_1, \ldots, x_{m-1} + a_{m-1}(x_1, \ldots, x_{m-1}))]. \quad (2)$$

Таблица $[0, \ldots, 0]$ является нейтральным элементом для так определенного умножения, а обратной к таблице (1) будет таблица

$$[-a_1, -a_2(x_1 - a_1), -a_3(x_1 - a_1, x_2 - a_2(x_1 - a_1)), \ldots, -a_m(x_1 - a_1, x_2 - a_2(x_1 - a_1) \ldots)]. \quad (3)$$

Будем отождествлять группу P_m с ее табличным представлением. P_m действует в векторном пространстве $\mathbb{Z}_p^m$ размерности m над полем $\mathbb{Z}_p$ обобщенными сдвигами согласно равенству

$$(t_1, t_2, \ldots, t_m)^{[a_1, a_2(x_1), \ldots, a_m(\overline{x}_{m-1})]} = (t_1 + a_1, t_2 + a_2(t_1), \ldots, t_m + a_m(\overline{t}_{m-1})).$$

Основным понятием, используемым в цитируемых выше работах Л. А. Калужнина, является понятие *параллелотопических подгрупп* в P_m. Оно определяется следующим образом.

Высотой редуцированного одночлена $v = a x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_s^{k_s}$, $0 \leq k_i \leq p - 1$ ($i \in \{1, 2, \ldots, s\}$), называется число $h(v) = 1 + k_1 + k_2 p + \cdots + k_s p^{s-1}$, а *высотой* $h(f)$ *редуцированного многочлена* $f(x_1, \ldots, x_s)$ — наибольшая из высот его одночленов. Будем полагать также, что высота нулевого многочлена равна 0. Из определения следует, что высота редуцированного многочлена $f(x_1, \ldots, x_s)$ удовлетворяет неравенству

$$0 \leq h(f(x_1, \ldots, x_s)) \leq p^s.$$

При этом для любого k, $0 < k \leq p^s$, существует единственный одночлен $x_1^{l_1} x_2^{l_2} \ldots x_s^{l_s}$, высота которого равна k. Символом $\{u\}_i$ обозначим i-ю координату таблицы $u = [a_1, a_2(\overline{x}_1), \ldots, a_m(\overline{x}_{m-1})]$, $\{u\}_i = a_i(\overline{x}_{i-1})$, $(1 \leq i \leq m)$. Целочисленный вектор

$$h(u) = \langle h(\{u\}_1), h(\{u\}_2), \ldots, h(\{u\}_m) \rangle$$

будем называть *характеристикой* таблицы u. На множестве характеристик таблиц из P_m вводится *частичный порядок покоординатного сравнения*, т. е. если $\chi = \langle h_1, h_2, \ldots, h_m \rangle$, $\chi' = \langle h'_1, h'_2, \ldots, h'_m \rangle$ — две характеристики таблиц, то полагаем $\chi \leq \chi'$ в том и только том случае, когда $h_i \leq h'_i$ для всех $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Вектор $\langle 1, p, p^2, \ldots, p^{m-1} \rangle$ является максимальным, а вектор $\langle 0, 0, \ldots, 0 \rangle$ — минимальным относительно так определенного порядка.

Определение 1.1. Подгруппа $U < P_m$ называется *параллелотопической*, если для любых таблиц $u, v \in P_m$ из того, что $u \in U$ и $h(v) \leq h(u)$, следует, что $v \in U$.

Каждая параллелотопическая подгруппа U однозначно определяется вектором

$$h(U) = \big\langle \max_{u \in U} \{h(\{u\}_1)\}, \max_{u \in U} \{h(\{u\}_2)\}, \ldots, \max_{u \in U} \{h(\{u\}_m)\} \big\rangle,$$

который будем называть ее *характеристикой*. Параллелотопическая подгруппа с характеристикой h состоит из всевозможных таблиц, характеристики которых не превышают h в смысле порядка покоординатного сравнения. Из равенств (2), (3) следует, что для любого вектора $h = \langle h_1, h_2, \ldots, h_m \rangle$, $0 \leq h_i \leq p^{i-1}$, множество всевозможных таблиц с характеристикой $\leq h$ образует подгруппу. Если U, V — параллелотопические подгруппы группы P_m с характеристиками $h\ (U) = \langle h_1, h_2, \ldots, h_m \rangle$,

$h(V) = \langle h'_1, h'_2, \ldots, h'_m\rangle$, то $h(U \cap V) = \langle \min\{h_1, h'_1\}, \min\{h_2, h'_2\}, \ldots, \min\{h_m, h'_m\}\rangle$, а $h(\langle U, V\rangle) = \langle \max\{h_1, h'_1\}, \max\{h_2, h'_2\}, \ldots, \max\{h_m, h'_m\}\rangle$. Отсюда легко получается, что все параллелотопические подгруппы группы P_m образуют дистрибутивную подрешетку в решетке всех ее подгрупп.

Будем говорить, что таблица $u \in P_m$ (соотв. параллелотопическая подгруппа $U < P_m$) имеет *глубину* k, $0 \le k \le m$, если $h(u)$ (соотв. $h(U)$) является вектором вида $\langle 0, \ldots, 0, h_{k+1}, \ldots, h_m\rangle$, $h_{k+1} \ne 0$.

Лема 1.1. ([3]) *Параллелотопическая подгруппа $U<P_m$ глубины k, $0 \le k \le m$, будет нормальной в P_m тогда и только тогда, когда ненулевые координаты ее характеристики $h(U) = \langle 0, \ldots, 0, h_{k+1}, \ldots, h_m\rangle$ удовлетворяют неравенствам $h_j \ge p^{j-1} - p^k$ ($j \in \{k+1, \ldots, m\}$).*

Основным результатом о структуре P_m является следующее утверждение ([3]).

Теорема 1.1. *Нормальные параллелотопические подгруппы и только они являются характеристическими подгруппами группы P_m.*

Таким образом, каждая характеристическая подгруппа P_m может быть определена своей характеристикой. В частности характеристикой вполне определяется каждая вербальная подгруппа этой группы. Символом $\gamma_k(P_m)$ (соотв. $\zeta_k(P_m)$), $k \in \{0, 1, \ldots\}$, будем обозначать k-тый член нижнего (соотв. верхнего) центрального ряда группы P_m.

Теорема 1.2. *k-й член нижнего центрального ряда $\gamma_k(P_m)$ является параллелотопической подгруппой с характеристикой $h(\gamma_k(P_m)) = \langle (1-k)^+, (p-k)^+, \ldots, (p^{m-1}-k)^+\rangle$, где $x^+ = \max\{0, x\}$. $(p^{m-1}-s)$-тый член верхнего центрального ряда $\zeta_{(p^{m-1}-s)}(P_m)$ является параллелотопической подгруппой с характеристикой*

$$h(\zeta_{(p^{m-1}-s)}(P_m)) = \langle (1-s)^+, (p-s)^+, \ldots, (p^{m-1}-s)^+\rangle.$$

Доказательство см. в [2], [3].

Из этой теоремы следует, что группа P_m является нильпотентной класса p^{m-1}, а ее нижний и верхний центральные ряды совпадают, т. е. k-тый член нижнего центрального ряда совпадает с $(p^{m-1}-k)$-м членом верхнего центрального ряда ($k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$). Кроме того, как следствия из этой теоремы получаем такие утверждения.

Следствие 1.2.1. *Все факторы нижнего центрального ряда группы P_m являются элементарными абелевыми p-группами. Если подгруппа $\gamma_l(P_m)$, $0 \le l<p^{m-1}$, имеет глубину k, то $|\gamma_l/\gamma_{l+1}(P_m)| = p^{m-k}$.*

При этом подгруппа $\gamma_l(P_m)$ имеет глубину в точности k тогда и только тогда, когда выполнено неравенство $p^{k-1}<l<p^k$ т. е. $k = [\log_p l] + 1$, где $[x]$ — целая часть числа x.

Следствие 1.2.2. *Подгруппа $\gamma_l(P_m)$, $p^{k-1}<l<p^k$, порождается по модулю $\gamma_{l+1}(P_m)$ таблицами*

$$u_i = [\underbrace{0, \ldots, 0}_{i}, a_{i+1}(\overline{x}_i), 0, \ldots, 0],$$

где $a_{i+1}(\overline{x}_i)$ — одночлен высоты $p^i - l$, $i \in \{k+1, \ldots, m\}$.

2. Алгебра Ли L_m. Символом $\mathbb{Z}_p^{(0)}[x_1, x_2, \ldots, x_k]$ будем обозначать кольцо редуцированных многочленов над полем $\mathbb{Z}_p$ по модулю идеала I_k порожденного степенями $x_1^p, x_2^p, \ldots, x_k^p$. Элементами $\mathbb{Z}_p^{(0)}[x_1, x_2, \ldots, x_k]$ являются многочлены над $\mathbb{Z}_p$ степени $\leq p-1$ по каждой переменной, которые складываются обычным образом, а умножение сводится к обычному умножению и последующему редуцированию слагаемых с использованием равенств $x_1^p = 0,\ x_2^p = 0, \ldots,\ x_k^p = 0$. Чтобы отличать такие многочлены от многочленов, используемых при построении P_m, будем их называть $(p,0)$-*редуцированными.* Поскольку частичные дифференцирования $\dfrac{\partial}{\partial x_k}$ могут только уменьшить степень переменной, то для $(p,0)$-редуцированного многочлена $f(x_1, \ldots, x_k)$ определены частные производные $\dfrac{\partial}{\partial x_l} f(x_1, \ldots, x_k)\quad (1 \leq l \leq k)$, которые также являются $(p,0)$-редуцированными многочленами.

Рассмотрим теперь множество L_m треугольных таблиц вида

$$u = [c_1, c_2(x_1), \ldots, c_m(x_1, \ldots, x_{m-1})], \tag{4}$$

где $c_1 \in \mathbb{Z}_p$, $c_i(\overline{x}_{i-1}) \in \mathbb{Z}_p^{(0)}[x_1, \ldots, x_{i-1}]$, $i \in \{2, 3, \ldots, m\}$. Как и в п. 1, k-ю координату таблицы (4) будем обозначать символом $\{u\}_k$. Введем на множестве L_m следующие операции.

Определение 2.1. (i) *Суммой* таблиц $u, v \in L_m$ будем называть таблицу $u+v$ с координатами $\{u+v\}_k = \{u\}_k + \{v\}_k \quad (k \in \{1, 2, \ldots m\})$.

(ii) *Произведением* таблицы $u \in L_m$ на элемент $a \in \mathbb{Z}_p$ будем называть таблицу au с координатами $\{au\}_k = a\{u\}_k \quad (k \in \{1, 2, \ldots, m\})$.

(iii) *Скобкой Ли* таблиц $u, v \in L_m$ будем называть таблицу (u,v) с координатами

$$\{(u,v)\}_k = \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{\partial \{v\}_k}{\partial x_i} \cdot \{u\}_i - \frac{\partial \{u\}_k}{\partial x_i} \cdot \{v\}_i \right)$$

Теорема 2.1. *Множество L_m всех треугольных таблиц $(p,0)$-редуцированных многочленов над полем $\mathbb{Z}_p$, имеющих длину m, относительно определенных выше операций (i)– (iii) является алгеброй Ли над полем $\mathbb{Z}_p$.*

Доказательство. По сложению множество L_m очевидно является элементарной абелевой p-группой порядка $p^{1+p+\cdots+p^{m-1}}$. Легко проверяется также, что скобка Ли, определенная равенством (iii) является линейной по каждому из аргументов и удовлетворяет тождеству $(u,u) = 0$. Поэтому для доказательства теоремы достаточно убедится в справедливости тождества Якоби. Пусть $u, v, w \in L_m$ — произвольные таблицы. Имеем

$$\{(u,(v,w))\}_k = \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{\partial \{(v,w)\}_k}{\partial x_i} \cdot \{u\}_i - \{(v,w)\}_i \cdot \frac{\partial \{u\}_k}{\partial x_i} \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^{k-1} \left(\frac{\partial \{w\}_k}{\partial x_j} \cdot \{v\}_j - \{w\}_j \cdot \frac{\partial \{v\}_k}{\partial x_j} \right) \right) \cdot \{u\}_i - \right.$$

$$\left. - \left(\sum_{j=1}^{i-1} \left(\frac{\partial \{w\}_i}{\partial x_j} \cdot \{v\}_j - \{w\}_j \cdot \frac{\partial \{v\}_i}{\partial x_j} \right) \right) \cdot \frac{\partial \{u\}_k}{\partial x_i} \right) =$$

$$
= \sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=1}^{k-1}\left(\frac{\partial\{w\}_k}{\partial x_i\partial x_j}\cdot\{v\}_j\{u\}_i+\frac{\partial\{w\}_k}{\partial x_j}\frac{\partial\{v\}_j}{\partial x_i}\cdot\{u\}_i-\right.
$$

$$
\left.-\frac{\partial\{v\}_k}{\partial x_i\partial x_j}\cdot\{w\}_j\{u\}_i-\frac{\partial\{v\}_k}{\partial x_j}\frac{\partial\{w\}_j}{\partial x_i}\cdot\{u\}_i\right)-
$$

$$
-\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=1}^{i-1}\left(\frac{\partial\{u\}_k}{\partial x_i}\frac{\partial\{w\}_i}{\partial x_j}\cdot\{v\}_j-\frac{\partial\{u\}_k}{\partial x_i}\frac{\partial\{v\}_i}{\partial x_j}\cdot\{w\}_j\right).
$$

Заметим, что индекс j в последней сумме изменяется в пределах от 1 до $i-1$ поскольку ее слагаемые с индексом $j \geq i$ равны нулю. Аналогичным образом расписываются выражения $\{(u,(v,w))\}_k$, $\{(w,(u,v))\}_k$. Осталось записать в развернутом виде сумму $\{(u,(v,w))\}_k+\{(v,(w,u))\}_k+\{(w,(u,v))\}_k$ и убедиться, что при любом $k \in \{1,2,\ldots,m\}$ она равна нулю. Теорема доказана. $\square$

3. Алгебра Ли, ассоциированная с группой P_m. Напомним общую конструкцию, сопоставляющую нильпотентной группе ассоциированное с ее нижним центральным рядом кольцо Ли (детали см. [6]). Пусть G — нильпотентная группа, $G=\gamma_0(G)>\gamma_1(G)>\ldots>\gamma_l(G)=\{e\}$ — ее нижний центральный ряд. Каждая из фактор групп $\gamma_i(G)/\gamma_{i+1}(G)$ является абелевой и групповую операцию в ней будем записывать аддитивно.

Положим $L(G)=\bigoplus_{i=0}^{l-1}\gamma_i(G)/\gamma_{i+1}(G)$. Введем в абелевой группе $L(G)$ новую операцию $(\cdot\ ,\ \cdot)$ следующим образом:

1) если $\overline{u}\in\gamma_i(G)/\gamma_{i+1}(G)$, $\overline{v}\in\gamma_j(G)/\gamma_{j+1}(G)$ — однородные элементы из $L(G)$, то положим

$$
(\overline{u},\overline{v})=(u+\gamma_{i+1}(G),v+\gamma_{j+1}(G))=[u,v]+\gamma_{i+j+1}(G) \tag{5}
$$

где $[u,v]$ — коммутатор элементов u,v в группе G;

2) на произвольные элементы из $L(G)$ операция $(\cdot\ ,\ \cdot)$ распространяется по дистрибутивности.

Как хорошо известно, $L(G)$ относительно так введенных операций $+$ и $(\cdot\ ,\ \cdot)$ образует кольцо Ли. Если каждая фактор-группа $\gamma_j(G)/\gamma_{j+1}(G)$ является элементарной абелевой p-группой для некоторого простого числа p, то ее, а следовательно и всю группу $L(G)$, можно отождествить с аддитивной группой векторного пространства соответствующей размерности над полем $\mathbb{Z}_p$ из p элементов. В этом случае можно ввести дополнительно операцию умножения элементов $L(G)$ на элементы $\mathbb{Z}_p$, превращающую кольцо Ли $L(G)$ в алгебру Ли над полем $\mathbb{Z}_p$ вычетов по модулю p. Описанную выше конструкцию применим к силовским p-подгруппам P_m симметрической группы S_{p^m}.

Теорема 3.1. *Алгебра Ли $L(P_m)$ изоморфна алгебре L_m.*

Доказательство. Каждый однородный элемент алгебры $L(P_m)$ имеет вид

$$
u+\gamma_i(P_m),\ 1\leq i\leq p^{m-1} \tag{6}
$$

где u — таблица из P_m вида

$$
[0,\ldots,0,a_k(x_1,\ldots,x_{k-1}),\ldots,a_m(x_1,\ldots,x_{m-1})], \tag{7}
$$

причем $a_l(x_1,\ldots,x_{l-1})$ — одночлены высоты p^l-i ($l\in\{k,k+1,\ldots,m\}$), а $k=[\log_p i]+1$.

Каждая таблица вида (7) является суммой “координатных” таблиц $[0,\ldots,0,$ $a_l(x_1,\ldots,x_{l-1}),0,\ldots,0]$, $\quad k\le l\le m$. Следовательно, каждый элемент вида (6) из $L(P_m)$ является суммой элементов вида $w+\gamma_i(P_m)$, где w — “координатная” таблица. Сложение элементов такого вида осуществляется согласно равенству $(u_1+\gamma_i(P_m))+(u_2+\gamma_i(P_m))=(u_1+u_2)+\gamma_i(P_m)$. Коммутатор элементов вида $u_1+\gamma_i(P_m)$ и $u_2+\gamma_i(P_m)$ очевидно равен нулю, а коммутатор элементов $u_1+\gamma_i(P_m)$, $u_2+\gamma_j(P_m)$ при $i>j$ согласно (5), равен $[u_1,u_2]+\gamma_{i+j+1}(P_m)$. Подсчет группового коммутатора $[u_1,u_2]=u_1^{-1}u_2^{-1}u_1u_2$ дает

$$[u_1,u_2]=$$
$$=[\underbrace{0,\ldots,\ 0\ ,\ldots,0}_{j},a_i(x_1,\ldots,x_j+a_j(\overline{x}_{j-1}),x_{j+1},\ldots,x_{i-1})-a_i(x_1,\ldots,x_{i-1}),0,\ldots,0]$$

Если $a_i(x_1,\ldots,x_{i-1})=x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_{i-1}^{k_{i-1}}$, а $a_j(x_1,\ldots,x_{j-1})=x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_{j-1}^{k_{j-1}}$, то i-тая координата таблицы $[u_1,u_2]$ имеет вид $x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_{j-1}^{k_{j-1}}\bigl(x_j-x_1^{l_1}x_2^{l_2}\ldots x_{j-1}^{l_{j-1}}\bigr)^{k_j}x_{j+1}^{k_{j+1}}\ldots x_{i-1}^{i-1}-x_1^{k_1}\ldots x_{i-1}^{k_{i-1}}=x_1^{k_1+l_1}\ldots x_{j-1}^{k_{j-1}+l_{j-1}}x_j^{k_j-1}x_{j+1}^{k_{j+1}}\ldots x_{i-1}^{k_{i-1}}+$ одночлены меньшей высоты, где суммы $k_1+l_1,\ldots,k_{j-1}+l_{j-1}$ приводятся по модулю p. Если ни одна из этих сумм не превышает $p-1$, то имеет место равенство

$$h(\{[u_1,u_2]\}_i)=1+(k_1+l_1)p+\cdots+(k_j+l_j)p^{j-1}+(k_j-1)p^j+\cdots+k_{i-1}p^{i-1}=$$
$$1+k_1p+\cdots+k_{j-1}p^{j-1}+k_jp^j+\cdots+k_{i-1}p^{i-1}+\cdots+1+l_1p+\cdots+l_{j-1}p^{j-1}-(p^j-1)=$$
$$h(a_i)+h(a_j)-(p^j-1).$$

Следовательно, $[u_1,u_2]\in\gamma_{i+j}(P_m)$, $[u_1,u_2]\notin\gamma_{i+j+1}(P_m)$ и в этом случае $[u_1,u_2]+\gamma_{i+j}(P_m)$ — ненулевой элемент. Если хотя бы одна из сумм $k_1+l_1,k_2+l_2,\ldots,k_{j-1}+l_{j-1}$ превышает p, то высота $\{[u_1,u_2]\}_i$ определяется равенством $h(\{[u_1,u_2]\}_i)=h(a_i)+h(a_j)-(p^j-1)-p^{l_1}-\cdots-p^{l_s}$, где $l_1,\ldots,l_s$ — индексы сумм превышающих p. В этом случае имеем $[u_1,u_2]\in\gamma_{i+j+1}(P_m)$ т. е. $[u_1,u_2]+\gamma_{i+j+1}(P_m)$ равняется нулю. Отсюда получаем, что однородные элементы вида

$$[0,\ldots,0,a_i(\overline{x}_{i-1}),0,\ldots,0]+\gamma_{j+1}(P_m),\tag{8}$$

где одночлены $a_i(\overline{x}_{i-1})=ax_1^{k_1}\ldots x_{i-1}^{k_{i-1}}$, при сложении ведут себя как обычные одночлены над $\mathbb{Z}_p$, а при их умножении нужно использовать соотношение $x^p=0$. Следовательно, сумму однородных элементов вида (8) при фиксированном i можно отождествлять с многочленами над $\mathbb{Z}_p$, редуцированными по модулю идеала, порожденного степенями $x_1^p,x_2^p,\ldots x_{i-1}^p$. Из сказанного следует, что каждому элементу прямой суммы $\bigoplus_{i=0}^{p^{m+1}}\gamma_i(P_m)/\gamma_{i+1}(P_m)$ естественным образом соответствует одна и только одна таблица из алгебры L_m. Тем самым определена инъекция $L(P_m)$ в L_m. Поскольку $|L(P_m)|=|P_m|=|L_m|$, то эта инъекция будет биекцией. Осталось убедиться, что так построенная биекция согласована с операциями. Для сложения и умножения на скаляр это следует из ее определения, а для скобки Ли проверяется прямыми вычислениями.

Пусть $\overline{u}=u+\gamma_{k+1}(P_m)$ и $\overline{v}=v+\gamma_{l+1}(P_m)$ — некоторые элементы алгебры $L(P_m)$, где $u=[0,\ldots,0,ax_1^{i_1}x_2^{i_2}\ldots x_k^{i_k},0,\ldots]\in\gamma_k(P_m)$, $v=[0,\ldots,0,bx_1^{j_1}x_2^{j_2}\ldots x_l^{j_l},0,\ldots]\in\gamma_l(P_m)$. Если $k=l$, то получаем $[u,v]=[0,0,\ldots]$. Рассмотрим случай, когда $k\ne l$. Для определенности предположим $k<l$. Тогда $(\overline{u},\overline{v})=[u,v]+\gamma_{k+l+1}(P_m)$ и дальше имеем

(*i*) $\{[u,v]\}_s = 0$ для $s \neq l+1$;

(*ii*) $\{[u,v]\}_{l+1} = u^{-1}v^{-1}uv = bx_1^{j_1}\dots x_l^{j_l} - bx_1^{j_1}\dots x_k^{j_k}(x_{k+1} - ax_1^{i_1}\dots x_k^{i_l})^{j_{k+1}}\cdot x_{k+2}^{j_{k+2}}\dots x_l^{j_l} =$

$$= bx_1^{j_1}\dots x_l^{j_l} - bx_1^{j_1}\dots x_k^{j_k}\left(\sum_{r=0}^{j_{k+1}}(-1)^r C_{j_{k+1}}^r x_{k+1}^{j_{k+1}-r}\bigl(ax_1^{i_1}\dots x_k^{i_k}\bigr)^r\right)\cdot x_{k+2}^{j_{k+2}}\dots x_l^{j_l} =$$

$$= bx_1^{j_1}\dots x_l^{j_l} - bx_1^{j_1}\dots x_k^{j_k}\bigl(x_{k+1}^{j_{k+1}} - j_{k+1}x_{k+1}^{j_{k+1}-1}ax_1^{i_1}\dots x_k^{i_k}\bigr)x_{k+2}^{j_{k+2}}\dots x_l^{j_l} =$$

$$= j_{k+1}bx_1^{j_1}\dots x_k^{j_k}x_{k+1}^{j_{k+1}-1}x_{k+2}^{j_{k+2}}\dots x_l^{j_l}\cdot ax_1^{i_1}x_2^{i_2}\dots x_k^{i_k} = \frac{\partial}{\partial x_{k+1}}\bigl(bx_1^{j_1}\dots x_l^{j_l}\bigr)ax_1^{i_1}\dots x_k^{i_k} =$$

$$= \frac{\partial\{v\}_{l+1}}{\partial x_{k+1}}\cdot\{u\}_{k+1} - \{v\}_{k+1}\cdot\frac{\partial\{u\}_{l+1}}{\partial x_{k+1}}\quad\bigl(\text{так как } \{u\}_{l+1} = 0\bigr).$$

Поскольку все элементы алгебры $L(P_m)$ можно представить как сумму элементов вида $[0,\dots,0,x_1^{i_1}\dots x_k^{i_k},\dots,0] + \gamma_{k+1}(P_m)$ ($k \in \{0,\dots,m-1\}$), и, исходя из линейности скобки Ли, получаем, что построенная биекция согласована со скобкой Ли. $\square$

4. Строение алгебры $L(P_m)$. При исследовании строения алгебры $L(P_m)$ и алгебры L_m можно использовать те же понятия, что использовались при исследовании группы P_m. Высота одночлена и редуцированного по модулю идеала $\langle x_1^p, x_2^p, \dots, x_k^p\rangle$ многочлена $f(x_1,x_2,\dots,x_k)$ определяется с помощью тех же самых формул. Без изменений дается определение характеристики таблицы, а множество характеристик упорядочивается отношением частичного порядка — покоординатным сравнением. Высоту многочленов редуцированных по модулю идеалов порожденных $x_1^p,\dots,x_k^p$ и характеристики таблиц из L_m будем обозначать теми же символами, что и в случае группы P_m.

Лема 4.1. *Для любых таблиц* $u = [u_1, u_2(x_1),\dots,u_m(\overline{x}_{m-1})]$ *и* $v = [v_1, v_2(x_1),\dots, v_m(\overline{x}_{m-1})]$ *справедливы неравенства:*

(*i*) *если* $i < k$, *то* $h\left(\dfrac{\partial v_k}{\partial x_i}\cdot u_i\right) \le h(v_k) - 1$;

(*ii*) $h(\{(u,v)\}_k) \le \max(h(u_k), h(v_k)) - 1$, *причем для любой таблицы* $u \in L_m$ *существует таблица* $v \in L_m$ *такая, что* $h(\{(u,v)\}_k) = h(u_k) - 1$.

Доказательство. (i) По определению высоты координат таблиц из L_m имеем
$h\left(\dfrac{\partial v_k}{\partial x_i}\right) \le h(v_k) - p^{i-1}$, $h(u_i) \le p^{i-1}$. Отсюда получаем

$$h\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\cdot u_i\right) \le h\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right) + h(u_i) - 1 \le h(v_k) - p^{i-1} + h(u_i) - 1 \le h(v_k) - 1.$$

(ii) По доказанному в (*i*), для высоты каждого из слагаемых $\dfrac{\partial v_k}{\partial x_i}\cdot u_i - \dfrac{\partial u_k}{\partial x_i}\cdot v_i$ в сумме $\{(u,v)\}_k = \sum\limits_{i=1}^{k-1}\left(\dfrac{\partial v_k}{\partial x_i}\cdot u_i - \dfrac{\partial u_k}{\partial x_i}\cdot v_i\right)$ справедливо неравенство

$$h\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\cdot u_i - \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\cdot v_i\right) \le \max\{h(u_k), h(v_k)\} - 1.$$

Отсюда сразу же получаем требуемое неравенство для $h(\{(u,v)\}_k)$.

Докажем вторую часть утверждения (ii). Пусть $cx_1^{i_1}x_2^{i_2}\dots x_k^{i_k}$ — одночлен редуцированного многочлена $u_{k+1}(\overline{x}_k)$ наибольшей высоты, j — наименьший индекс такой, что $i_j > 0$ (если такого индекса нет, то полагаем $j = 1$). Тогда $h\left(\dfrac{\partial u_k}{\partial x_j}\right) = h(u_k) - p^{j-1}$. Выберем таблицу $v \in L_m$ так, чтобы $v_i = 0$ для $i \neq j$ и $v_j = x_1^{p-1}x_2^{p-1}\dots x_{j-1}^{p-1}$. Тогда выполняется равенство

$$h\left(v_j \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right) = h(v_j) + h\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right) - 1 = (1 + (p-1) + p(p-1) + \dots + p^{j-2}(p-1)) +$$
$$+ h(u_k) - p^{j-1} - 1 = 1 + p^{j-1} - 1 + h(u_k) - p^{j-1} - 1 = h(u_k) - 1.$$

Поскольку $\dfrac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0$, то отсюда получаем $h\left(\dfrac{\partial u_k}{\partial x_j} \cdot v_j - \dfrac{\partial v_k}{\partial x_j} \cdot u_j\right) = h(u_k) - 1$ для любого $k \in \{1, \dots, m\}$ и, следовательно, $h(\{(u,v)\}_k) = h(u_k) - 1$. $\square$

Как и для группы P_m определяется понятие параллелотопической подалгебры L_m.

Определение 4.1. Подалгебра $A < L_m$ называется *параллелотопической*, если для любых таблиц $u \in A$ и $v \in L_m$ из неравенства $h(v) \leq h(u)$ следует, что $v \in A$.

Каждая параллелотопическая подалгебра A однозначно определяется целочисленным вектором $h(A) = \langle h_1, h_2, \dots, h_m \rangle$, где $h_i = \max\{h(u_i) |\ u \in A\}$, $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Будем называть этот вектор *характеристикой подалгебры* A. Вектор $\langle 0, \dots, 0 \rangle$ определяет нулевую подалгебру, а вектор $\langle 1, p, \dots, p^{m-1} \rangle$ — всю алгебру L_m. Как и в групповом случае все параллелотопические подалгебры образуют дистрибутивную подрешетку в решетке всех подалгебр L_m, причем характеристика суммы и пересечения подалгебр определяется теми же равенствами, что и характеристика объединения и пересечения подгрупп в P_m.

Определим, когда параллелотопическая подалгебра является идеалом.

Утверждение 4.1. *Параллелотопическая подалгебра I с характеристикой $\langle \underbrace{0, \dots, 0}_{l-1}, h_l, h_{l+1}, \dots \rangle$ является идеалом в L_m тогда и только тогда, когда для каждого $i \geq l$ справедливо неравенство $h_i \geq p^{i-1} - p^{l-1}$.*

Доказательство. Пусть $u = [\underbrace{0, \dots, 0}_{l-1}, u_l, u_{l+1}, \dots]$ элемент подалгебры I и $v = [\ v_1, v_2, \dots] \in L_m$ — произвольный элемент. Тогда

$$\{(u,v)\}_i = \sum_{j=1}^{i-1} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \cdot u_j - v_j \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = 0 \quad \text{при } 1 \leq i \leq l-1,$$

$$\{(u,v)\}_i = \sum_{j=1}^{i-1} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \cdot u_j - v_j \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = \sum_{j=l}^{i-1} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \cdot u_j - v_j \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) \text{ при } i \geq l.$$

Одночлен наибольшей высоты, встречающийся в последней сумме — это $x_1^{p-1} \cdots x_{l-1}^{p-1} x_l^{p-2} x_{l+1}^{p-1} \cdots x_{i-1}^{p-1}$, высота которого равна $p^{i-1} - p^{l-1}$, поэтому $\{(u,v)\}_i \leq p^{i-1} - p^{l-1} \leq h_i$. Отсюда $(u,v) \in I$. С другой стороны можно выбрать такие таблицы $u \in I$ и $v \in L_m$, что $h((u,v))_i = h\big(x_1^{p-1} \cdots x_{l-1}^{p-1} x_l^{p-2} x_{l+1}^{p-1} \cdots x_{i-1}^{p-1}\big)$. Тогда $h_i \geq h(\{(u,v)\}_i) = p^{i-1} - p^{l-1}$. $\square$

Утверждение 4.2. *Если H_1 и H_2 — параллелотопические подалгебры алгебры Ли L_m, то их взаимный коммутант (H_1, H_2) также является параллелотопической подалгеброй в L_m.*

Доказательство. Положим $h_k = \max\{h((u,v)_k) | \ u \in H_1, v \in H_2\}$ и докажем, что (H_1, H_2) — параллелотопическая подалгебра с характеристикой $\langle h_1, h_2, \dots, h_m \rangle$. Поскольку (H_1, H_2) является абелевой группой, то достаточно показать, что для любой высоты $h \le h_k$ в (H_1, H_2) существует таблица у которой на k-том месте стоит одночлен высоты h, а на всех остальных местах нули.

По определению h_k существуют $u \in H_1, v \in H_2$ такие, что $h(\{(u,v)\}_k) = h_k$. Без ограничения общности можно считать, что все координаты u и v нулевые, кроме одной. Поэтому в (H_1, H_2) существует таблица (u,v) у которой на k-том месте стоит одночлен высоты h_k, а на всех остальных местах нули. Пусть k-тая координата таблицы u — ненулевая, тогда в таблице v j-тая $(j < k)$ координата ненулевая. Поэтому существует j-координатная таблица v' такая, что $h(v'_j) < h(v_j)$ и

$$h(\{(u,v')\}_k) = h\left(v'_j \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right) = h\left(v_j \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right) - 1 = h(\{(u,v)\}_k) - 1 = h_k - 1.$$

Кроме того, в (u,v') на j-том месте расположен ненулевой одночлен. Поскольку $h(v'_i) = 0, i \ne j$, $h(v'_j) < h(v_j)$ и H_2 параллелотопическая подалгебра, то $v' \in H_2$. Таким образом $(u,v') \in (H_1, H_2)$. Аналогично мы можем понизить высоту $\{(u,v')\}_k$ на единицу и так далее. В результате получим требуемое утверждение. $\square$

Теорема 4.3. *k-тый член $\gamma_k(L_m)$ нижнего центрального ряда алгебры L_m является параллелотопической подалгеброй с характеристикой*

$$|\gamma_k(L_m)| = \langle (1-k)^+, (p-k)^+, (p^2-k)^+, \dots \rangle$$

Доказательство. Подалгебра $\gamma_k(L_m)$, $k \ge 0$ — параллелотопическая по утверждению 4.2. Отсюда получаем, что достаточно вычислить характеристику $\gamma_k(L_m)$. Для этого используем индукцию по k. Случай $k = 0$ тривиален. Пусть утверждение справедливо для некоторого $k > 0$ и $|\gamma_k(L_m)| = \langle 0, \dots, 0, h_l, h_{l+1}, \dots \rangle$, $\ h_l = (p^{l-1} - k)^+ \ne 0$. Положим $h'_l = (p^{l-1} - k - 1)^+$.

Для всех таблиц $u \in \gamma_k(L_m)$, $v \in L_m$ имеем

$$h(\{(u,v)\}_s) = \max_{1 \le i \le s-1} \left\{ h\left(\frac{\partial \{v\}_s}{\partial x_i} \cdot \{u\}_i\right), h\left(\frac{\partial \{u\}_s}{\partial x_i} \cdot \{v\}_i\right) \right\}.$$

Согласно пункту (i) леммы 4.1, $h\left(\frac{\partial \{u\}_s}{\partial x_i} \cdot \{v\}_i\right) \le h(\{u\}_s) - 1 \le h_s - 1 \le h'_s$. Заметим, что $\frac{\partial \{v\}_s}{\partial x_i} \cdot \{u\}_i = 0$ при $i < l$,

$$h\left(\frac{\partial \{v\}_s}{\partial x_i} \cdot \{u\}_i\right) \le h(\frac{\partial \{v\}_s}{\partial x_i}) + h(\{u\}_i) - 1 \le h(\{v\}_s) - p^{i-1} + h(\{u\}_i) - 1 \le$$
$$\le p^{s-1} - p^{i-1} + p^{i-1} - k - 1 \le p^{s-1} - k - 1 = h'_s.$$

Отсюда, $h(\{(u,v)\}_s) \le h'_s$.

Пусть $s \ge l$. Тогда, если $u \in \gamma_k(L_m)$ такое, что $h(\{u\}_s) = h_s$, то, согласно пункту (ii) леммы 4.1, существует таблица $v \in L_m$ такая, что $h(\{(u,v)\}_s) = h_s - 1 = h'_s$. Таким образом, s-тая координата $\gamma_{k+1}(L_m)$ равна h'_s, для каждого $s \ge l$. $\square$

Теорема 4.4. *k-тый член $Z_k(L_m)$ верхнего центрального ряда алгебры L_m является параллелотопической подалгеброй с характеристикой*

$$|Z_k(L_m)| = \langle t_1^{(k)}, t_2^{(k)}, \ldots, t_m^{(k)} \rangle, \quad t_i^{(k)} = (p^{i-1} - p^{m-1} + k)^+ \quad (1 \le i \le m,\ k \ge 0).$$

Доказательство. Для доказательства утверждения теоремы проведем индукцию по индексу k члена верхнего центрального ряда.

В случае $k = 1$, как известно $Z_1(L_m) = Z(L_m)$ — центр алгебры L_m. Так как $Z(L_m) = \{[0, \ldots, 0, a_m] \mid a_m \in \mathbb{Z}_p\}$, то $Z_1(L_m)$ — параллелотопическая подалгебра с характеристикой $|Z_1(L_m)| = \langle 0, \ldots, 0, 1 \rangle$. Предположим, что утверждение теоремы справедливо при некотором $k > 1$, т. е. $Z_k(L_m)$ — параллелотопическая подалгебра с характеристикой $|Z_k(L_m)| = \langle t_1^{(k)}, \ldots, t_m^{(k)} \rangle$, $\quad t_i^{(k)} = (p^{i-1} - p^{m-1} + k)^+$ $(r \le i \le m)$.

Рассмотрим $(k+1)$-й член верхнего центрального ряда

$$Z_{k+1}(L_m) = C(L_m, Z_k(L_m)) = \langle u \in L_m \mid (u, L_m) \subseteq Z_k(L_m) \rangle.$$

Возьмем произвольную таблицу $u \in L_m$ с высотой $h(u) \le \langle t_1^{(k+1)}, \ldots, t_m^{(k+1)} \rangle$. Для всех таблиц $v \in L_m$ имеем

$$h(\{(u,v)\}_l) = \max_{1 \le i \le l-1} \left\{ h\left(\frac{\partial \{v\}_l}{\partial x_i} \cdot \{u\}_i\right), h\left(\frac{\partial \{u\}_l}{\partial x_i} \cdot \{v\}_i\right) \right\}.$$

Тогда, согласно пункту (i) леммы 4.1, для $1 \le l \le m$

$$h\left(\frac{\partial \{u\}_l}{\partial x_i} \cdot \{v\}_i\right) \le h(\{u\}_l) - 1 \le t_l^{k+1} - 1 \le t_l^{(k)},$$

$$h\left(\frac{\partial \{v\}_l}{\partial x_i} \cdot \{u\}_i\right) \le h(\frac{\partial \{v\}_l}{\partial x_i}) + h(\{u\}_i) - 1 \le h(\{v\}_l) - p^{i-1} + t_i^{(k+1)} - 1 \le$$
$$\le p^{l-1} - p^{i-1} + p^{i-1} - p^{m-1} + k + 1 - 1 = p^{l-1} - p^{m-1} + k = t_l^{(k)}.$$

Отсюда, $h(\{(u,v)\}_l) \le t_l^{(k)}$ и за предположением индукции $(u,v) \in Z_k(L_m)$. Следовательно, $u \in Z_{k+1}(L_m)$. Согласно пункту (ii) леммы 4.1, таблицы $u \in L_m$ с высотой большей чем $\langle t_1^{(k+1)}, \ldots, t_m^{(k+1)} \rangle$ не принадлежат $Z_{k+1}(L_m)$.

Таким образом, $Z_{k+1}(L_m)$ состоит в точности из всех таблиц высоты не большей $\langle t_1^{(k+1)}, \ldots, t_m^{(k+1)} \rangle$ и следовательно $Z_{k+1}(L_m)$ — параллелотопическая подалгебра с характеристикой $\langle t_1^{(k+1)}, \ldots, t_m^{(k+1)} \rangle$. □

Следствие 4.4.1. *1) Алгебра Ли L_m является нильпотентной класса p^{m-1}.*

2) Верхний и нижний центральные ряды алгебры Ли L_m совпадают и для произвольного $k \in \{0, 1, 2, \ldots, p^{m-1}\}$ имеет место равенство $\gamma_k(L_m) = Z_{p^{m-1}-k}(L_m)$.

Теорема 4.5. *k-тый член $L^{(k)}(L_m)$ ряда коммутантов алгебры L_m является параллелотопической подалгеброй с характеристикой $|L^{(k)}(L_m)| = \langle \underbrace{0, \ldots, 0}_{k}, h_{k+1}, h_{k+2}, \ldots \rangle$,*

$$h_l = p^{l-1} - p^{k-1} \ \ (l \ge k \ge 1).$$

Доказательство. Подалгебра $L^{(k)}(L_m)$, $k \ge 1$, параллелотопическая по утверждению 4.2, $L^{(0)} = L_m$. Таким образом, достаточно вычислить характеристику $L^{(k)}(L_m)$.

Используем индукцию по k. При $k=1$ алгебра $L^{(1)}(L_m)=\gamma_1(L_m)$ и утверждение выполняется. Пусть утверждение справедливо для некоторого $k>1$ и
$|L^{(k)}(L_m)|=\langle\underbrace{0,\ldots,0}_{k},\ h_{k+1},h_{k+2},\ldots\rangle$, $h_l=p^{l-1}-p^{k-1}$ $(l\geq k)$.

Заметим, что для каждого $l\geq k$ моном $v_l=x_1^{p-1}\ldots x_{k-1}^{p-1}x_k^{p-2}x_{k+1}^{p-1}\ldots x_{l-1}^{p-1}$ имеет высоту $h(\{v\}_l)=h_l$. Тогда максимальная высота, которую может иметь $\{(u,v)\}_l$, $u,v\in L^k(L_m)$, будет достигаться на мономе $x_1^{p-1}\ldots x_k^{p-1}x_{k+1}^{p-2}x_{k+2}^{p-1}\ldots x_{l-1}^{p-1}$, который имеет высоту $p^{l-1}-p^k$. Таким образом, $L^{(k+1)}(L_m)$ — параллелотопическая подалгебра с характеристикой $\langle\underbrace{0,\ldots,0}_{k+1},h_{k+2},h_{k+3},\ldots\rangle$ $\square$

Следствие 4.5.1. *Алгебра Ли L_m — разрешимая класса m.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Холл М. Теория групп.– М.: ИЛ, 1967.
2. Kaloujnine L. *La structure des p-groupes de Sylow des groupes symmetriques finis* // Ann. Sci l'Ecole Normal Superior.– 1948.– V. 65.– P. 239-276.
3. Калужнин Л. А. Избранные главы теории групп.– Киев: Изд-во КГУ, 1979.– 32 с.
4. Сущанський В. І., Сікора В. С. Операції на групах підстановок. Теорія і застосування.– Чернівці, "Рута", 2003.– 255 с.
5. Магнус В., Каррас А., Солитер Д. Комбинаторная теория групп.– М.: Наука, 1974.
6. Huppert B., Blackburn N. Finite groups. V.2.– Berlin etc.: Springer, 1982.
7. Leedham-Green C. R., Mc Kay S. The structure of groups of Prime Power order.– London Math. by Monographs, New Series. – V.27.– Oxford Science Publication, 2002.– 334 p.
8. Vaughan M., *Lie Methods in group Theory* // In: Group St. Andrews 2001 in Oxford, V. II, Cambridge: Camb. Univ. press, 2003.– P. 547-585.
9. Zelmanov E., Nil Rings and Periodic Groups.– The Korean Math. Soc. Lecture Notes in Math..– Seoul, 1992.
10. Gupta C. K., Sushchansky V. I. Lie algebra associated with the group of finitery automorphisms of a p-adic tree // Preprint. Univ. Manitoba, 2000.– 20 p.
11. Lazard M. *Sur le groups nilpotents et les anneaux de Lie* // Annal Sci de l'Ecole Norm. Super. (3).– 1954.– T.71.– P. 101-190.

Institute of Mathematics
Silesian University of Technology
Wital.Suszczanski@polsl.pl

Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко
механико-математический факультет
netr@univ.kiev.ua

Поступило 21.05.2005