УДК 517.574

Ю. С. Процик

СУБГАРМОНІЙНІ ФУНКЦІЇ СКІНЧЕННОГО (λ, ε)-ТИПУ

Yu. S. Protsyk. *Subharmonic functions of finite (λ, ε)-type*, Matematychni Studii, **24** (2005) 39–56.

The method of spherical harmonics (method of Fourier-Laplace series) for subharmonic functions of finite λ-type was introduced and studied by A. A. Kondratyuk. We extend it to the classes $\Lambda_S^m(\mathcal{E})$ of subharmonic in $\mathbb{R}^m$ $(m \geq 2)$ functions of finite (λ, ε)-type in the sense of B. N. Khabibullin. In particular, criteria of the belonging of subharmonic functions to the classes $\Lambda_S^m(\mathcal{E})$ in terms of its spherical harmonics are established. The Riesz measures of such functions are described and it is shown that an arbitrary Borel in $\mathbb{R}^m$ measure is the Riesz measure of some subharmonic function from the certain class $\Lambda_S^m(\mathcal{E})$.

Ю. С. Процык. *Субгармонические функции конечного (λ, ε)-типа* // Математичні Студії. – 2005. – Т.24, №1. – С.39–56.

Метод сферических гармоник (метод рядов Фурье-Лапласа), разработаный А. А. Кондратюком для субгармонических функций конечного λ-типа, распостранен на классы $\Lambda_S^m(\mathcal{E})$ субгармонических в $\mathbb{R}^m$ $(m \geq 2)$ функций конечного (λ, ε)-типа в смысле Б. Н. Хабибуллина. В частности, установлены критерии принадлежности субгармонических функций к классам $\Lambda_S^m(\mathcal{E})$ в терминах их сферических гармоник, описаны меры Рисса таких функций и показано, что произвольная борелевская в $\mathbb{R}^m$ мера является мерой Рисса некоторой субгармонической функции из определенного класса $\Lambda_S^m(\mathcal{E})$.

1. Вступ. Формулювання основних результатів. Метод рядів Фур'є, розроблений Л. Рубелом і Б. Тейлором [1–5] (див. також [6,7]) для цілих і мероморфних функцій, без принципових ускладнень, поширений Ф. Новеразом [8,9] на субгармонійні та δ-субгармонійні в $\mathbb{C}$, а також плюрісубгармонійні в $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$ функції. Для субгармонійних в $\mathbb{R}^m$ $(m \geq 3)$ функцій, близький до методу Рубела-Тейлора, метод сферичних гармонік (метод рядів Фур'є-Лапласа) вперше розробив А. А. Кондратюк [10–12]. Проблему про можливість розробки такого методу для субгармонійних в просторі функцій сформулював Л. Рубел [13].

Метод рядів Фур'є та Фур'є-Лапласа зазвичай застосовують до функцій скінченного λ-типу в сенсі Рубела-Тейлора. А саме, нехай λ — *функція зростання*, тобто λ — невід'ємна, зростаюча до $+\infty$, неперервна на $[0, +\infty)$ функція, $\lambda(0) = 0$. Говорять [9,12,14], що субгармонійна в $\mathbb{R}^m$ $(m \geq 2)$ функція u, гармонійна в деякому околі нуля, $u(0) = 0$, називається *функцією скінченного λ-типу*, якщо нерівність $T(r, u) \leq a\lambda(br)$ виконується для деяких додатних сталих a, b і всіх $r > 0$, де $T(r, u)$ — неванліннова характеристика функції u. Клас таких функцій позначатимемо через Λ_S^m. У [9,12,14] всі

2000 *Mathematics Subject Classification:* 31A05.

основні результати, отримані Л. Рубелом і Б. Тейлором [5] (див. також [6,7]), поширено і узагальнено на субгармонійні функції скінченного λ-типу. Зокрема, в [9,12,14] встановлено критерій належності субгармонійних функцій до класів Λ_S^m в термінах їхніх коефіцієнтів Фур'є (сферичних гармонік у випадку простору відповідно), описано міри Ріса таких функцій та показано, що довільна додатна борелева в $\mathbb{R}^m$ міра є мірою Ріса деякої субгармонійної функції певного класу Λ_S^m.

Недавно в статті [15] Б. Хабібуллін ввів класи функцій скінченного (λ, ϵ)-типу, які слід розглядати як узагальнення відповідних класів скінченного λ-типу в сенсі Рубела-Тейлора, що дозволило істотно доповнити результати зазначених авторів. Точніше, нехай λ — функція зростання і нехай функція $\epsilon(r) > 0$ — незростаюча, диференційовна для всіх достатньо великих $r > 0$, а для її похідної $\epsilon'(r)$ виконується умова $\liminf_{r\to+\infty} r\epsilon'(r) > -\infty$. Дійснозначну функцію M на $[0, +\infty)$ називаємо *функцією скінченного* (λ, ϵ)*-типу*, якщо існують додатні сталі a, α, β такі, що

$$M(r) \leq \frac{a}{(\epsilon(r))^\alpha}\lambda(r + \beta\epsilon(r)r)$$

для всіх достатньо великих r. При $M(r) = T(r, u)$ і $\epsilon(r) \equiv \varepsilon$, де u — субгармонійна в $\mathbb{R}^m$ функція і $\varepsilon > 0$ — стала, отримуємо в точності класи Λ_S^m.

Тому актуальною виглядає задача поширення методу рядів Фур'є на класи субгармонійних в $\mathbb{R}^m$ $(m \geq 2)$ функцій скінченного (λ, ε)-типу.

Отже (див. [16]), нехай w — δ-субгармонійна в $\mathbb{R}^m$ $(m \geq 2)$ функція, гармонійна в деякому околі нуля і $w(0) = 0$. Через μ_w позначатимемо міру Ріса функції w, а через μ_w^+ і μ_w^- відповідно її додатну і від'ємну варіації. Пара субгармонійних в $\mathbb{R}^m$ функцій (u, v) визначає *канонічне зображення* w, якщо $w = u - v$ і $\mu_u = \mu_w^+$, $\mu_v = \mu_w^-$; різниця $u - v$ визначена на множині точок $\mathbb{R}^m$, де u і v не дорівнюють одночасно $-\infty$.

Нехай $w = u - v$ — канонічне зображення w, $u(0) = v(0) = 0$. Характеристикою Неванлінни функції w називається функція ([16])

$$T(r, w) = \frac{1}{|\mathbb{S}^{m-1}|}\int\limits_{\mathbb{S}^{m-1}} \max\{u(rx), v(rx)\}\, dS(x), \qquad 0 \leq r < +\infty,$$

де $dS(x)$ — елемент площі сфери $\mathbb{S}^{m-1} = \{x \in \mathbb{R}^m : |x| = 1\}$, $|\mathbb{S}^{m-1}| = 2\pi^{m/2}/\Gamma(m/2)$ — її площа.

Нехай $\varepsilon(r)$ — незростаюча на $[0, +\infty)$ функція така, що $\varepsilon(0) = 1$ і при деякому $\eta > 1$ виконується нерівність $\varepsilon(r + r\varepsilon(r)) \geq (\varepsilon(r))^\eta$ для всіх достатньо великих r. Клас таких функцій позначатимемо через $\mathcal{E}$. Вслід за Б. Хабібулліним [15], дамо таке означення.

Означення 1. Нехай λ — функція зростання і $\varepsilon \in \mathcal{E}$. δ-субгармонійна в $\mathbb{R}^m$ $(m \geq 2)$ функція w, $0 \notin \operatorname{supp} \mu_w$, $w(0) = 0$, називається *функцією скінченного* (λ, ε)*-типу*, якщо $T(r, w)$ — функція скінченного (λ, ε)-типу.

Клас таких функцій позначатимемо через $\Lambda_\delta^m(\mathcal{E})$, а через $\Lambda_S^m(\mathcal{E})$ позначатимемо відповідно підклас субгармонійних функцій з $\Lambda_\delta^m(\mathcal{E})$.

Нехай (див. [17, Гл.I, § 3.2])

$$K(x) = \begin{cases} \log|x| & , \quad m = 2; \\ -|x|^{2-m} & , \quad m \geq 3; \end{cases}$$

$\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ — скалярний добуток в $\mathbb{R}^m$ і

$$p_k^{(m-2)/2}\left(\left\langle \frac{x}{|x|}, \frac{y}{|y|}\right\rangle_1\right)\frac{|x|^k}{|y|^{k+m-2}} = -\frac{1}{k!}\left\{\frac{\partial^k}{\partial t^k}K(tx-y)\right\}\Bigg|_{t=0}, \quad k\in\mathbb{Z}_+.$$

При цьому, у випадку $m\geq 3$

$$p_k^{(m-2)/2}(t) = \sum_{l+n=k} A_l^{(m-2)/2}A_n^{(m-2)/2}\cos\left((l-n)\arccos t\right), \quad t\in[-1,1], \quad k\in\mathbb{N},$$

— поліноми Гегенбауера. Тут $A_k^s = \dfrac{s(s+1)\cdot\ldots\cdot(s+k-1)}{k!}$.
У випадку ж $m=2$ функції

$$p_k^0(t) = k^{-1}\cos(k\arccos t), \quad t\in[-1,1], \quad k\in\mathbb{N},$$

— це поліноми Чебишова. Зауважимо (див. [17, Гл.I, § 3.3]), що при $k\in\mathbb{N}$

$$\max\left\{\left|p_k^{(m-2)/2}(t)\right| : t\in[-1,1]\right\} = p_k^{(m-2)/2}(1) = \frac{(k+m-3)!}{k!(m-3)!}\leq (m-2)k^{m-3},\ m\geq 3,$$

і

$$\max\left\{\left|p_k^0(t)\right| : t\in[-1,1]\right\} = p_k^0(1) = k^{-1}, \quad m=2.$$

Окрім того, $p_0^{(m-2)/2}(t)=1$ для всіх $t\in[-1,1]$ і $m\geq 3$.

З огляду на статті [12] та [18], дамо такі означення.

Означення 2. Нехай λ — функція зростання і $\varepsilon\in\mathcal{E}$. Борелева міра $\mu\geq 0$ в $\mathbb{R}^m$ $(m\geq 2)$, $0\notin\operatorname{supp}\mu$, має *скінченну* (λ,ε)*-щільність*, якщо функцією скінченного (λ,ε)-типу є функція

$$N(r;\mu) = \begin{cases} (m-2)\displaystyle\int_0^r n(t;\mu)t^{1-m}dt &, \quad m\geq 3,\\ \displaystyle\int_0^r n(t;\mu)t^{-1}dt &, \quad m=2,\end{cases}$$

де $n(t;\mu) = \mu\left(\{y : |y|\leq t\}\right)$.

Означення 3. Нехай λ — функція зростання і $\varepsilon\in\mathcal{E}$. Борелева міра $\mu\geq 0$ в $\mathbb{R}^m$ $(m\geq 2)$, $0\notin\operatorname{supp}\mu$, називається (λ,ε)*-допустимою*, якщо вона має скінченну (λ,ε)-щільність і для деяких сталих $a,\ l,\ \alpha,\ \beta$ виконується

$$\left|\int\limits_{r_1<|y|\leq r_2} p_k^{(m-2)/2}\left(\left\langle x, \frac{y}{|y|}\right\rangle_1\right)\frac{d\mu(y)}{|y|^{k+m-2}}\right| \leq ak^l\left(\frac{\lambda(r_1+\beta r_1\varepsilon(r_1))}{r_1^k(\varepsilon(r_1))^\alpha} + \frac{\lambda(r_2+\beta r_2\varepsilon(r_2))}{r_2^k(\varepsilon(r_2))^\alpha}\right), \tag{1}$$

для довільних $r_1, r_2>0,\ k\in\mathbb{N}$ і $x\in\mathbb{S}^{m-1}$.

Нехай u — субгармонійна в $\mathbb{R}^m$ $(m\geq 2)$ функція, $0\notin\operatorname{supp}\mu_u,\ u(0)=0$. У випадку $m\geq 3$ позначимо $(k\in\mathbb{Z}_+,\ x\in\mathbb{S}^{m-1},\ 0<r<+\infty)$

$$c_k(x,r;u) = \frac{2k+m-2}{(m-2)|\mathbb{S}^{m-1}|}\int\limits_{\mathbb{S}^{m-1}} p_k^{(m-2)/2}\left(\langle x,y\rangle_1\right)u(ry)dS(y) \tag{2}$$

і у випадку $m = 2$ $(x = e^{i\theta})$

$$c_0(x, r; u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\phi}) d\phi, \quad c_k(x, r; u) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos k(\theta - \phi) u(re^{i\phi}) d\phi, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Основними результатами цієї статті є такі три теореми.

Теорема 1. *Нехай u — субгармонійна в $\mathbb{R}^m$ $(m \geq 2)$ функція, $0 \notin \operatorname{supp} \mu_u$, $u(0) = 0$. Функція u належить до класу $\Lambda_S^m(\mathcal{E})$ тоді і лише тоді, коли існують сталі a, l, α, β такі, що для всіх $k \in \mathbb{Z}_+$, $r > 0$ і $x \in \mathbb{S}^{m-1}$*

$$|c_k(x, r; u)| \leq \frac{a(k+1)^l}{(\varepsilon(r))^\alpha} \lambda(r + \beta r \varepsilon(r)). \tag{4}$$

Відзначимо, що насправді в один бік доведено більше, а саме: для кожної субгармонійної в $\mathbb{R}^m$ $(m \geq 2)$ функції u та для всіх $x \in \mathbb{S}^{m-1}$, $r > 0$ справедливі нерівності (див. доведення теореми 1)

$$|c_k(x, r; u)| \leq \begin{cases} T(r, u), & k = 0; \\ 2m(m-1)k^{m-2} T(r; u), & k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Теорема 2. *Борелева міра $\mu \geq 0$ в $\mathbb{R}^m$ $(m \geq 2)$, $0 \notin \operatorname{supp} \mu$, є мірою Ріса деякої субгармонійної функції u з $\Lambda_S^m(\mathcal{E})$ тоді і лише тоді, коли μ є (λ, ε)-допустимою.*

Теорема 3. *Довільна борелева міра $\mu \geq 0$ в $\mathbb{R}^m$ $(m \geq 2)$, $0 \notin \operatorname{supp} \mu$, є (λ, ε)-допустимою при*

$$\lambda(r) = \int_0^r \left(\frac{r}{t}\right)^{q(t)-1} \frac{dn(t; \mu)}{t^{m-2}} + \int_r^{+\infty} \left(\frac{r}{t}\right)^{q(t)} \frac{dn(t; \mu)}{t^{m-2}} \tag{5}$$

для довільної функції $\varepsilon \in \mathcal{E}$, де $q(t)$ — неспадна, невід'ємна, цілочисельна функція така, що другий інтеграл в (5) скінченний для довільного $r > 0$.

Зауважимо, що для довільної міри μ, якщо за $q(t)$ вибрати $[\log(n(t; \mu) + 1)] + 1$ або $[n(t; \mu)] + 1$, то другий інтеграл в (5) скінченний для довільного $r > 0$. Тут $[s]$ — ціла частина s.

Крім того, для класів $\Lambda_\delta^m(\mathcal{E}_0)$, де

$$\mathcal{E} \supset \mathcal{E}_0 := \{\varepsilon_0(r) : \varepsilon_0(r) = \min(1, \varepsilon/r),\ r > 0,\ 0 < \varepsilon = const,\ \varepsilon_0(0) = 1\},$$

доведено наступні аналоги теорем Майлза-Рубела-Тейлора [19,20] (див. також [6,7]).

Теорема 4. $\Lambda_\delta^m(\mathcal{E}_0) = \Lambda_S^m(\mathcal{E}_0) - \Lambda_S^m(\mathcal{E}_0)$.

Теорема 5. *Для того, щоб невід'ємна борелева в $\mathbb{R}^m$ $(m \geq 2)$ міра μ, $0 \notin \operatorname{supp} \mu$, була додатною варіацією міри Ріса μ_w деякої δ-субгармонійної функції $w \in \Lambda_\delta^m(\mathcal{E}_0)$, необхідно і досить, щоб μ мала скінченну (λ, ε_0)-щільність.*

Аналоги таких теорем для мероморфних в $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 1)$ функцій розглядали раніше Г. Скода і Б. Н. Хабібуллін (див., наприклад, огляд [21]), а для класів δ-субгармонійних в $\mathbb{R}^m(m \geq 2)$ функцій скінченного λ-типу — Я. В. Васильків [14] та О. В. Веселовська [22].

Доведення теорем 1–3 є модифікацією доведень теорем 1–3 з [12], а теорем 4 та 5 — відповідно теорем 1 та 2 з [22].

2. Означення та допоміжні результати. Коротко подамо необхідні нам в подальшому відомості стосовно сферичних гармонік, рядів Фур'є-Лапласа та перетворення Пуассона узагальненої функції на сфері. Будемо дотримуватись підходу, запропонованого в [10–12].

Сферичною гармонікою або *сферичною функцією Лапласа степеня* k, $k \in \mathbb{Z}_+$, називається звуження на одиничну сферу $\mathbb{S}^{m-1}$ в $\mathbb{R}^m$ однорідного гармонійного полінома степеня k.

Нехай $D'(\mathbb{S}^{m-1})$ — простір узагальнених функцій на сфері $\mathbb{S}^{m-1}$. Значення елемента $F \in D'(\mathbb{S}^{m-1})$ на елементі ϕ з простору основних функцій $C^\infty(\mathbb{S}^{m-1})$ будемо позначати через $\langle F, \phi \rangle$.

Рядом Фур'є-Лапласа узагальненої функції $F \in D'(\mathbb{S}^{m-1})$ називається ряд

$$\sum_{k=0}^{+\infty} Y^{(k)}(x; F),$$

де

$$Y^{(k)}(x; F) = \frac{2k+m-2}{(m-2)|\mathbb{S}^{m-1}|} \left\langle F, p_k^{(m-2)/2}(\langle x, y \rangle_1) \right\rangle. \tag{6}$$

У випадку $m \geq 3$ для $x \in \mathbb{S}^{m-1}$, $|y| < R$ означимо ядро Пуассона

$$\begin{aligned} P_R(y, x) &= \frac{1}{|\mathbb{S}^{m-1}|} \frac{R^{m-2}(R^2 - |y|^2)}{(R^2 - 2R\langle y, x \rangle_1 + |y|^2)^{m/2}} = \\ &= \frac{1}{|\mathbb{S}^{m-1}|} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2k+m-2}{m-2} \left(\frac{|y|}{R}\right)^k p_k^{(m-2)/2}\left(\left\langle \frac{y}{|y|}, x \right\rangle_1\right). \end{aligned} \tag{7}$$

У випадку $m = 2$, $y = re^{i\theta}$, $x = e^{i\varphi}$, $\{\theta, \varphi\} \subset [0, 2\pi]$, маємо

$$P_R(y, x) = \frac{1}{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi) + r^2} = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^k \cos k(\theta - \varphi). \tag{8}$$

Перетворенням Пуассона узагальненої функції $F \in D'(\mathbb{S}^{m-1})$ називається функція

$$(F * P_R)(y) = \langle F, P_R(y, x) \rangle. \tag{9}$$

Якщо ж $f \in L^1(\mathbb{S}^{m-1})$, то перетворення Пуассона

$$(f * P_R)(y) = \frac{R^{m-2}}{|\mathbb{S}^{m-1}|} \int\limits_{\mathbb{S}^{m-1}} \frac{R^2 - |y|^2}{(R^2 - 2R\langle y, x \rangle_1 + |y|^2)^{m/2}} f(x) dS(x)$$

є інтегралом Пуассона.

Якщо u — субгармонійна в $\mathbb{R}^m$ $(m \geq 2)$ функція, то $\Delta u \geq 0$ в сенсі узагальнених функцій, де Δ — оператор Лапласа. Міра

$$\mu_u = \begin{cases} \dfrac{1}{(m-2)|\mathbb{S}^{m-1}|}\Delta u \quad , & m \geq 3; \\ \\ \dfrac{1}{2\pi}\Delta u \quad , & m = 2; \end{cases}$$

називається *мірою Ріса* функції u. Оскільки сферичні гармоніки є власними функціями оператора Лапласа $\Delta_{\mathbb{S}}$ на сфері $\mathbb{S}^{m-1}$, то існують співвідношення, які пов'язують сферичні гармоніки $Y^{(k)}(x; u_r(x)) := c_k(x, r; u)$, $u_r(x) = u(rx)$, $x \in \mathbb{S}^{m-1}$, $r > 0$, зі сферичними гармоніками, асоційованими з мірою μ_u. Такі співвідношення є узагальненнями формули Йенсена і мають вигляд ([10])

$$c_0(x, r; u) = N(r; \mu_u), \quad c_k(x, r; u) = r^k Y_u^{(k)}(x) + r^k \int\limits_{|\xi| \leq r} p_k^{(m-2)/2}\left(\left\langle x, \frac{\xi}{|\xi|}\right\rangle_1\right) \frac{d\mu_u(\xi)}{|\xi|^{k+m-2}} -$$
$$- \frac{1}{r^{k+m-2}} \int\limits_{|\xi| \leq r} |\xi|^k p_k^{(m-2)/2}\left(\left\langle x, \frac{\xi}{|\xi|}\right\rangle_1\right) d\mu_u(\xi), \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{10}$$

де $Y_u^{(k)}(x)$ визначаються з розвинення $u(rx) = \sum_{k=0}^{+\infty} r^k Y_u^{(k)}(x)$ для достатньо малих r.

Нам потрібна також наступна лема.

Лема 1 ([12]). *Нехай $\{Y^{(k)}(x)\}$ — послідовність сферичних гармонік, $k \in \mathbb{Z}_+$. Якщо існують сталі a, l такі, що нерівність $\left|Y^{(k)}(x)\right| \leq a(k+1)^l$, виконується для всіх $x \in \mathbb{S}^{m-1}$, то існує узагальнена функція $F \in D'(\mathbb{S}^{m-1})$ така, що $Y^{(k)}(x; F) = Y^{(k)}(x)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, і її перетворення Пуассона є гармонійною функцією в крузі $\{y : \ |y| < R\}$.*

3. Доведення теореми 1. Нехай $u \in \Lambda_S^m(\mathcal{E})$. З означень $c_k(x, r; u)$, $p_k^{(m-2)/2}(t)$ і властивостей $p_k^{(m-2)/2}(t)$, для $m \geq 2$, маємо

$$|c_k(x, r; u)| \leq \frac{2k + m - 2}{|\mathbb{S}^{m-1}|} p_k^{(m-2)/2}(1) \int\limits_{\mathbb{S}^{m-1}} |u(ry)| dS(y), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Покладемо $u^+ = \max\{u, 0\}$, $u^- = (-u)^+$. Тоді $u = u^+ - u^-$ і $|u| = u^+ + u^-$. Оскільки u — субгармонійна в $\mathbb{R}^m$ функція, то

$$0 = u(0) \leq \frac{1}{|\mathbb{S}^{m-1}|} \int\limits_{\mathbb{S}^{m-1}} u(ry) dS(y).$$

Отже, враховуючи (2),(3), при $k = 0$ отримуємо $|c_0(x, r; u)| \leq T(r, u)$. Крім того, маємо

$$\frac{1}{|\mathbb{S}^{m-1}|} \int\limits_{\mathbb{S}^{m-1}} u^-(ry) dS(y) \leq T(r, u), \quad \frac{1}{|\mathbb{S}^{m-1}|} \int\limits_{\mathbb{S}^{m-1}} |u(ry)| dS(y) \leq 2T(r, u).$$

З огляду на останню нерівність і те, що $p_k^{(m-2)/2}(1) \le (m-1)k^{m-3},\ k\in\mathbb{N},\ m\ge 2$, маємо

$$|c_k(x,r;u)| \le k\left(2+\frac{m-2}{k}\right)(m-1)k^{m-3}2T(r,u) \le$$

$$\le 2m(m-1)k^{m-2}T(r,u),\quad x\in\mathbb{S}^{m-1},\quad m\ge 2,\quad k\in\mathbb{N}.$$

Тепер, оскільки $u\in\Lambda_S^m(\mathcal{E})$, отримуємо нерівність (4).

Навпаки, оскільки інтеграл Пуассона є найкращою гармонійною мажорантою функції u у відповідній кулі [23, с. 66], то для $r<R$ маємо

$$u(rx) \le \frac{R^{m-2}}{|S^{m-1}|}\int\limits_{|S^{m-1}|}\frac{R^2-r^2}{\left(R^2-2Rr\langle x,\xi\rangle_1+r^2\right)^{m/2}}u(R\xi)dS(\xi) = (u_R * P_R)(rx).$$

Враховуючи (2), (3) та (7), (8), для $R=r(1+\varepsilon(r))$ отримуємо

$$u^+(rx) \le \left|\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^k c_k(x,R;u)\right| \le \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{|c_k(x,r(1+\varepsilon(r));u)|}{(1+\varepsilon(r))^k}.$$

З (4) і останньої нерівності випливає, що для всіх $r>0$

$$T(r,u) \le \frac{a\lambda\big(r+r\varepsilon(r)+\beta r(1+\varepsilon(r))\varepsilon(r+r\varepsilon(r))\big)}{\big(\varepsilon(r+r\varepsilon(r))\big)^{\alpha}}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(k+1)^l}{(1+\varepsilon(r))^k} \le$$

$$\le \frac{a_1\lambda(r+\beta_1 r\varepsilon(r))}{(\varepsilon(r))^{\alpha_1}}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(k+1)^l}{(1+\varepsilon(r))^k}. \tag{11}$$

З (11) елементарними обчисленнями отримуємо, що

$$T(r,u) \le \frac{a_2\lambda\left(r+\beta_1 r\varepsilon(r)\right)}{(\varepsilon(r))^{\alpha_2}},$$

для деяких $a_2,\ \alpha_2,\ \beta_1$, що і треба було показати.

4. Доведення теореми 2. Для доведення цієї теореми нам будуть потрібні леми 2 і 3.

Лема 2. *Борелева міра $\mu\ge 0$ в $\mathbb{R}^m,\ 0\notin\operatorname{supp}\mu$, є (λ,ε)-допустимою тоді і лише тоді, коли вона має скінченну (λ,ε)-щільність і існує послідовність сферичних гармонік $Y=\{Y^{(k)}(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$, та сталі $a,\ l,\ \alpha,\ \beta$ такі, що*

$$\left|Y^{(k)}(x)+\int\limits_{|y|\le r}p_k^{(m-2)/2}\left(\left\langle x,\frac{y}{|y|}\right\rangle_1\right)\frac{d\mu(y)}{|y|^{k+m-2}}\right| \le ak^l\frac{\lambda(r+\beta r\varepsilon(r))}{r^k(\varepsilon(r))^{\alpha}}, \tag{12}$$

для всіх $r>0,\ k\in\mathbb{N}$ і $x\in\mathbb{S}^{m-1}$.

Доведення. Повторюємо міркування з [12, лема 3]. Приймемо

$$\int\limits_{|y|\le r}p_k^{(m-2)/2}\left(\left\langle x,\frac{y}{|y|}\right\rangle_1\right)\frac{d\mu(y)}{|y|^{k+m-2}} := J_k(x,r).$$

Достатність. Маємо

$$|J_k(x,r_2) - J_k(x,r_1)| \leq \left|Y^{(k)}(x) + J_k(x,r_2)\right| + \left|Y^{(k)}(x) + J_k(x,r_1)\right|.$$

З останньої нерівності і (12) негайно випливає (1).
Необхідність. Нехай виконується (1). Для $k \in \mathbb{N}$, покладемо $p[\lambda] = +\infty$, якщо для всіх $p \in \mathbb{N}$ виконується

$$\liminf_{r\to+\infty} \frac{\lambda(r+\beta r\varepsilon(r))}{r^p(\varepsilon(r))^\alpha} > 0,$$

і

$$p[\lambda] = \min\left\{p:\ p\in\mathbb{N},\ \liminf_{r\to+\infty} \frac{\lambda(r+\beta r\varepsilon(r))}{r^p(\varepsilon(r))^\alpha} = 0\right\},$$

в протилежному випадку. Тут сталі α і β — з умови (1). Не зменшуючи загальності, вважатимемо функцію $\lambda(r)$ лінійною в деякому околі нуля. Тоді, для $k \in \mathbb{N}$ такого, що $1 \leq k < p[\lambda]$ маємо

$$\inf\left\{\frac{\lambda(r+\beta r\varepsilon(r))}{r^k(\varepsilon(r))^\alpha}:\ r>0\right\} > 0.$$

Звідси для кожного $k,\ 1 \leq k < p[\lambda] \leq +\infty$, існує $r_k > 0$ таке, що

$$\frac{\lambda(r_k+\beta r_k\varepsilon(r_k))}{r_k^k(\varepsilon(r_k))^\alpha} \leq 2\frac{\lambda(r+\beta r\varepsilon(r))}{r^k(\varepsilon(r))^\alpha}, \tag{13}$$

для всіх $r > 0$. Для таких k визначимо

$$Y^{(k)}(x) = -J_k(x,r_k). \tag{14}$$

Для $k \geq p[\lambda],\ p[\lambda] < +\infty$ існує послідовність $\{\rho_j\},\ \rho_j \nearrow +\infty\ (j\to+\infty)$, така, що

$$\lim_{j\to+\infty} \frac{\lambda(\rho_j+\beta\rho_j\varepsilon(\rho_j))}{\rho_j^k(\varepsilon(\rho_j))^\alpha} = 0. \tag{15}$$

За припущенням маємо

$$|J_k(x,\rho_i) - J_k(x,\rho_j)| \leq ak^l\left(\frac{\lambda(\rho_i+\beta\rho_i\varepsilon(\rho_i))}{\rho_i^k(\varepsilon(\rho_i))^\alpha} + \frac{\lambda(\rho_j+\beta\rho_j\varepsilon(\rho_j))}{\rho_j^k(\varepsilon(\rho_j))^\alpha}\right).$$

З (15) випливає фундаментальність послідовності $\{J_k(x,\rho_j)\}$ для довільних фіксованих x і $k \geq p[\lambda]$. Для $k \geq p[\lambda]$ покладемо

$$Y^{(k)}(x) = -\lim_{j\to+\infty} J_k(x,\rho_j). \tag{16}$$

Отже, з (1), (13) і (14), для $1 \leq k < p[\lambda]$ маємо

$$\left|Y^{(k)}(x) + J_k(x,r)\right| = |J_k(x,r) - J_k(x,r_k)| \leq$$

$$\leq ak^l\left(\frac{\lambda(r_k+\beta r_k\varepsilon(r_k))}{r_k^k(\varepsilon(r_k))^\alpha} + \frac{\lambda(r+\beta r\varepsilon(r))}{r^k(\varepsilon(r))^\alpha}\right) \leq ak^l\frac{3\lambda(r+\beta r\varepsilon(r))}{r^k(\varepsilon(r))^\alpha}.$$

У випадку $k \geq p[\lambda]$, враховуючи (1), (15) і (16), отримуємо

$$\left|Y^{(k)}(x) + J_k(x,r)\right| = \lim_{j\to+\infty} |J_k(x,r) - J_k(x,\rho_j)| \leq$$

$$\leq ak^l \left(\frac{\lambda(r+\beta r\varepsilon(r))}{r^k(\varepsilon(r))^\alpha} + \lim_{j\to+\infty} \frac{\lambda(\rho_j + \beta\rho_j\varepsilon(\rho_j))}{\rho_j^k(\varepsilon(\rho_j))^\alpha} \right) = ak^l \frac{\lambda(r+\beta r\varepsilon(r))}{r^k(\varepsilon(r))^\alpha}.$$

Лему доведено повністю. □

Нехай $\mu \geq 0$ — борелева міра в $\mathbb{R}^m$ $(m \geq 2)$, $0 \notin \operatorname{supp}\mu$, і $Y = \{Y^{(k)}(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ — деяка послідовність сферичних гармонік.

Означення 4. *Сферичними гармоніками* пари (Y,μ) називається послідовність

$$c_k(x,r;Y,\mu) = r^k Y^{(k)}(x) + r^k \int\limits_{|\xi|\leq r} p_k^{(m-2)/2}\left(\left\langle x, \frac{\xi}{|\xi|}\right\rangle_1\right) \frac{d\mu(\xi)}{|\xi|^{k+m-2}} -$$

$$-\frac{1}{r^{k+m-2}} \int\limits_{|\xi|\leq r} |\xi|^k p_k^{(m-2)/2}\left(\left\langle x, \frac{\xi}{|\xi|}\right\rangle_1\right) d\mu(\xi), \qquad k\in\mathbb{N},$$

$$c_0(x,r;Y,\mu) = N(r;\mu).$$

Лема 3. *Якщо для пари (Y,μ) виконується (12), і міра μ має скінченну (λ,ε)-щільність, то існує єдина субгармонійна в $\mathbb{R}^m$, гармонійна в деякому околі точки $y=0$ функція u, $u(0)=0$, така, що $c_k(x,r;u) = c_k(x,r;Y,\mu)$ для всіх $r>0$, $k\in\mathbb{Z}_+$, $x\in\mathbb{S}^{m-1}$. При цьому μ є мірою Ріса функції u.*

Доведення. Повторюємо міркування з [12, лема 4]. Функцію з потрібними властивостями шукатимемо з огляду на формулу Пуассона-Йенсена [23, с. 139]. Нехай $G_R(y,\xi)$ — функція Гріна кулі $\{y: \ |y|<R\}$. Позначимо $g_R(y) = \int_{|\xi|\leq R} G_R(y,\xi)d\mu(\xi)$. Для $N(r;\mu)$, при $m\geq 3$, маємо

$$N(r+r\varepsilon(r);\mu) \geq (m-2)n(r;\mu) \int\limits_r^{r+r\varepsilon(r)} \frac{dt}{t^{m-1}} \geq \frac{\varepsilon(r)n(r;\mu)}{(\varepsilon(r)+1)r^{m-2}}$$

Позаяк $\log(1+x) \geq \frac{x}{1+x}$ $(x\geq 0)$, то таку ж оцінку отримуємо і у випадку $m=2$. Звідси, для деякого $b>0$

$$\frac{n(r;\mu)}{r^{m-2}} \leq \frac{b}{\varepsilon(r)} N(r+r\varepsilon(r);\mu) \quad (r>0),\ m\geq 2. \tag{17}$$

Оскільки

$$\frac{1}{r^{m-2}}\left| \int\limits_{|\xi|\leq r} \left|\frac{\xi}{r}\right|^k p_k^{(m-2)/2}\left(\left\langle x, \frac{\xi}{|\xi|}\right\rangle_1\right) d\mu(\xi)\right| \leq \frac{p_k^{(m-2)/2}(1)}{r^{m-2}} \int\limits_{|y|\leq r} d\mu(y) =$$

$$= p_k^{(m-2)/2}(1)\frac{n(r;\mu)}{r^{m-2}} \leq \frac{bp_k^{(m-2)/2}(1)}{\varepsilon(r)} N(r+r\varepsilon(r);\mu) \tag{18}$$

то з (12) і скінченності (λ, ε)-щільності міри μ випливає, що

$$|c_k(x, R; Y, \mu)| \leq \frac{a_1(k+1)^{l_1}}{(\varepsilon(R))^{\alpha_1}} \lambda(R + \beta_1 R\varepsilon(R)),$$

для всіх $k \in \mathbb{Z}_+,\ x \in \mathbb{S}^{m-1}$ і деяких $a_1,\ l_1,\ \alpha_1,\ \beta_1$. За лемою 1 існує узагальнена функція $U_R \in D'(\mathbb{S}^{m-1})$ така, що $Y^{(k)}(x; U_R) = c_k(x, R; Y, \mu)$. Позначимо $p_R(y) = (U_R * P_R)(y)$ і розглянемо функцію $u_R(y) = p_R(y) - g_R(y)$. Функція $u_R(y)$ субгармонійна в кулі $\{y : |y| < R\}$, гармонійна в деякому околі точки $y = 0$. Справді, згідно з лемою 1 функція $p_R(y)$ гармонійна в цій кулі, а функція $-g_R(y)$ субгармонійна в ній [23, с. 138] і гармонійна в деякому околі початку координат. Крім того, $u_R(0) = 0$. Справді, функція Гріна $G_R(y, \xi)$ кулі $\{y : |y| < R\}$ має вигляд [23, с. 43]

$$G_R(y,\xi) = \begin{cases} |y-\xi|^{2-m} - \left(\dfrac{|\xi|}{R}\left|y - \dfrac{\xi R^2}{|\xi|^2}\right|\right)^{2-m} &, \quad \xi \neq 0, \qquad m \geq 3; \\[2ex] -\log|y-\xi| + \log\left(\dfrac{|\xi|}{R}\left|y - \dfrac{\xi R^2}{|\xi|^2}\right|\right) &, \quad \xi \neq 0, \qquad m = 2. \end{cases} \tag{19}$$

Тоді

$$g_R(0) = \int\limits_{|\xi| \leq R} G_R(0,\xi)\, d\mu(\xi) = \left\{ \begin{array}{ll} \displaystyle\int\limits_{|\xi|\leq R} |\xi|^{2-m} d\mu(\xi) - R^{2-m} n(R;\mu) & , m \geq 3 \\[3ex] \displaystyle n(R;\mu)\log R - \int\limits_{|\xi|\leq R} \log|\xi|\, d\mu(\xi) & , m = 2 \end{array} \right\} = N(R;\mu).$$

З (6)–(9) випливає, що $p_R(0) = c_0(x, R; Y, \mu) = N(R; \mu)$, тому $u_R(0) = p_R(0) - g_R(0) = 0$.

Доведемо тепер, що при $r < R$ виконується

$$c_k(x, r; u_R) = c_k(x, r; Y, \mu), \qquad k \in \mathbb{Z}_+, \qquad x \in \mathbb{S}^{m-1}. \tag{20}$$

Обчислимо сферичні гармоніки $c_k(x, r; g_R)$. Позначимо для $|\xi| < R$, $|\xi| \neq r$

$$I_k(\xi) = c_k(x, r; G_R(y, \xi)), \quad y = rx.$$

Тоді для тих r, що $\mu(\{y :\ |y| = r\}) = 0$, при $m \geq 2$, отримуємо

$$c_k(x, r; g_R) = \int\limits_{|\xi|<r} I_k(\xi)\, d\mu(\xi) + \int\limits_{r<|\xi|\leq R} I_k(\xi)\, d\mu(\xi). \tag{21}$$

Поклавши $y = rx$, при $r < |\xi|$, знаходимо [17, Гл.I, § 3.2]

$$\log|y-\xi| = \log|\xi| - \sum_{k=1}^{+\infty} p_k^0\left(\left\langle x, \frac{\xi}{|\xi|}\right\rangle_1\right)\left|\frac{r}{\xi}\right|^k, \qquad m = 2,$$

і

$$|y-\xi|^{2-m} = \frac{1}{|\xi|^{m-2}} \sum_{k=0}^{+\infty} p_k^{(m-2)/2}\left(\left\langle x, \frac{\xi}{|\xi|}\right\rangle_1\right)\left|\frac{r}{\xi}\right|^k, \qquad m \geq 3,$$

а при $|\xi| < r$ подібно

$$\log|y-\xi| = \log r - \sum_{k=1}^{+\infty} p_k^0\left(\left\langle x, \frac{\xi}{|\xi|}\right\rangle_1\right)\left|\frac{\xi}{r}\right|^k, \qquad m=2,$$

і

$$|y-\xi|^{2-m} = \frac{1}{r^{m-2}}\sum_{k=0}^{+\infty} p_k^{(m-2)/2}\left(\left\langle x, \frac{\xi}{|\xi|}\right\rangle_1\right)\left|\frac{\xi}{r}\right|^k, \qquad m\geq 3.$$

Далі,

$$\log\left\{\frac{|\xi|\left|y-\frac{\xi R^2}{|\xi|^2}\right|}{R}\right\} = \log R - \sum_{k=1}^{+\infty} p_k^0\left(\left\langle x, \frac{\xi}{|\xi|}\right\rangle_1\right)\left(\frac{r|\xi|}{R^2}\right)^k, \qquad m=2,$$

і

$$\left(\frac{|\xi|}{R}\left|y-\frac{\xi R^2}{|\xi|^2}\right|\right)^{2-m} = \frac{1}{R^{m-2}}\sum_{k=0}^{+\infty} p_k^{(m-2)/2}\left(\left\langle x, \frac{\xi}{|\xi|}\right\rangle_1\right)\left(\frac{r|\xi|}{R^2}\right)^k, \qquad m\geq 3.$$

За допомогою цих співвідношень, враховуючи ортогональність поліномів Гегенбауера [24, Гл.IX, § 3, п. 4], для $|\xi| < r$ отримуємо

$$I_0(\xi) = \begin{cases} r^{2-m} - R^{2-m} & , \quad m\geq 3; \\ \log\, R/r & , \quad m=2; \end{cases}$$

$$I_k(\xi) = \frac{1}{r^{m-2}}p_k^{(m-2)/2}\left(\left\langle x, \frac{\xi}{|\xi|}\right\rangle_1\right)\left|\frac{\xi}{r}\right|^k - \frac{1}{R^{m-2}}p_k^{(m-2)/2}\left(\left\langle x, \frac{\xi}{|\xi|}\right\rangle_1\right)\left(\frac{r|\xi|}{R^2}\right)^k,$$

при $k\in\mathbb{N}$, $m\geq 2$, а для $r < |\xi| < R$

$$I_0(\xi) = \begin{cases} |\xi|^{2-m} - R^{2-m} & , \quad m\geq 3; \\ \log\, R/|\xi| & , \quad m=2; \end{cases}$$

$$I_k(\xi) = \frac{1}{|\xi|^{m-2}}p_k^{(m-2)/2}\left(\left\langle x, \frac{\xi}{|\xi|}\right\rangle_1\right)\left|\frac{r}{\xi}\right|^k - \frac{1}{R^{m-2}}p_k^{(m-2)/2}\left(\left\langle x, \frac{\xi}{|\xi|}\right\rangle_1\right)\left(\frac{r|\xi|}{R^2}\right)^k,$$

при $k\in\mathbb{N}$, $m\geq 2$.

Звідси, враховуючи (21), одержуємо, що для тих r, для яких $\mu(\{y : |y| = r\}) = 0$, при $m\geq 2$, виконується

$$\begin{aligned} c_k(x,r;g_R) = \frac{1}{r^{k+m-2}}\int\limits_{|\xi|<r} |\xi|^k p_k^{(m-2)/2}\left(\left\langle x, \frac{\xi}{|\xi|}\right\rangle_1\right)d\mu(\xi) - \\ -\left(\frac{r}{R}\right)^k\frac{1}{R^{k+m-2}}\int\limits_{|\xi|\leq R} |\xi|^k p_k^{(m-2)/2}\left(\left\langle x, \frac{\xi}{|\xi|}\right\rangle_1\right)d\mu(\xi) + \\ +r^k\int\limits_{r<|\xi|\leq R} \frac{1}{|\xi|^{k+m-2}}p_k^{(m-2)/2}\left(\left\langle x, \frac{\xi}{|\xi|}\right\rangle_1\right)d\mu(\xi), \qquad k\in\mathbb{N}, \quad x\in\mathbb{S}^m; \\ c_0(x,r;g_R) = N(R;\mu) - N(r;\mu), \qquad x\in\mathbb{S}^m. \end{aligned} \tag{22}$$

З іншого боку, враховуючи (6)–(9), отримуємо

$$c_k(x,r;p_R) = \left(\frac{r}{R}\right)^k c_k(x,R;Y,\mu). \tag{23}$$

Але $c_k(x,r;u_R) = c_k(x,r;p_R) - c_k(x,r;g_R)$. Порівнюючи співвідношення (22) і (23), та, використовуючи означення 4 сферичних гармонік пари (Y,μ), а також неперервність сферичних гармонік $c_k(x,r;u_R)$ ([10]), приходимо до (20).

Визначимо тепер функцію $u(y),\ y \in \mathbb{R}^m$ $(m \geq 2)$. Для цього приймемо $u(y) = u_R(y)$ при $|y| < R$. За рівністю (20) $c_k(x,r;u_R) - c_k(x,r;u_{R'}) = 0$ для всіх $r < R < R'$, тому $u_R(y) = u_{R'}(y)$ майже скрізь в крузі $\{y : |y| < R\}$ внаслідок повноти ортонормованої системи сферичних гармонік в $L^1(\mathbb{S}^{m-1})$. Оскільки u_R і $u_{R'}$ субгармонійні, то рівність $u_R(y) = u_{R'}(y)$ виконується скрізь у вказаному крузі.

Єдиність функції u доводиться подібно.

За побудовою функція u задовольняє всі умови леми 3. Залишилося переконатись, що $\mu_u = \mu$. Другі доданки, що входить у формулу (19) для функції Гріна, є гармонійними функціями за y при $|y| < R$. Тому $-g_R(y)$ є з точністю до гармонійного доданку ньютонів (логарифмічний при $m = 2$) потенціал міри μ. Функція $p_R(y)$ також гармонійна при $|y| < R$, тому $u(y) = p_R(y) - g_R(y),\ |y| < R$, є зображенням Ріса [23, с. 123] функції u, тобто $\mu = \mu_u$. $\square$

Якщо $u \in \Lambda^m_S(\mathcal{E})$, то за теоремою 1 виконується (4). Із співвідношень (4) і (10), враховуючи (18) при $\mu = \mu_u$, отримуємо нерівність (12) при $\mu = \mu_u$, $Y^{(k)}(x) = Y_u^{(k)}(x)$. За лемою 2 міра μ_u — (λ,ε)-допустимою.

Навпаки, нехай міра μ — (λ,ε)-допустима. За лемою 2 існує послідовність Y, для якої виконується (12). З леми 3 випливає існування субгармонійної в $\mathbb{R}^m$, гармонійної в околі нуля функції u, $u(0) = 0$, такої, що $\mu_u = \mu$ і сферичні гармоніки, асоційовані з нею, збігаються зі сферичними гармоніками пари (Y,μ). Звідси та з нерівності (12), за допомогою (18) отримуємо (4). За теоремою 1 $u \in \Lambda^m_S(\mathcal{E})$. $\square$

5. Доведення теореми 3. Нехай $q(t)$ — довільна функція, яка задовольняє умови теореми 3. Для $k \in \mathbb{N}$, вважаючи, що $\sup\varnothing = 0$, приймемо $q^{-1}(k) = \sup\{t : q(t) \leq k\}$. Побудуємо послідовність $Y = \{Y^{(k)}(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ за формулою

$$Y^{(k)}(x) = -\int\limits_{|y|\leq q^{-1}(k)} p_k^{(m-2)/2}\left(\left\langle x, \frac{y}{|y|}\right\rangle_1\right) \frac{d\mu(y)}{|y|^{k+m-2}}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Згідно з лемою 2 достатньо перевірити, що для вибраної послідовності Y, функції λ, яка задається співвідношенням (5), і для довільної функції $\varepsilon \in \mathcal{E}$, виконуються умови скінченності (λ,ε)-щільності і нерівність (12). Для $k \in \mathbb{N}$ маємо

$$r^k Y^{(k)}(x) + r^k \int\limits_{|y|\leq r} p_k^{(m-2)/2}\left(\left\langle x, \frac{y}{|y|}\right\rangle_1\right) \frac{d\mu(y)}{|y|^{k+m-2}} =$$

$$= \begin{cases} r^k \displaystyle\int\limits_{q^{-1}(k)<|y|\leq r} p_k^{(m-2)/2}\left(\left\langle x, \frac{y}{|y|}\right\rangle_1\right) \frac{d\mu(y)}{|y|^{k+m-2}} \quad , & r \geq q^{-1}(k), \\[2ex] -r^k \displaystyle\int\limits_{r<|y|\leq q^{-1}(k)} p_k^{(m-2)/2}\left(\left\langle x, \frac{y}{|y|}\right\rangle_1\right) \frac{d\mu(y)}{|y|^{k+m-2}} \quad , & r < q^{-1}(k). \end{cases}$$

Два останні інтеграли оцінюються за модулем виразами

$$p_k^{(m-2)/2}(1) \int\limits_{q^{-1}(k)}^{r} \left(\frac{r}{t}\right)^k \frac{dn(t;\mu)}{t^{m-2}}, \qquad p_k^{(m-2)/2}(1) \int\limits_{r}^{q^{-1}(k)} \left(\frac{r}{t}\right)^k \frac{dn(t;\mu)}{t^{m-2}},$$

відповідно.

У першому інтегралі $q^{-1}(k) < t$. Звідси, за означенням $q^{-1}(k)$, $k < q(t)$. З цілочисельності функції $q(t)$ випливає, що $k \leq q(t) - 1$, тому інтеграл можна оцінити згори виразом

$$p_k^{(m-2)/2}(1) \int\limits_{0}^{r} \left(\frac{r}{t}\right)^{q(t)-1} \frac{dn(t;\mu)}{t^{m-2}}.$$

У другому інтегралі $t \leq q^{-1}(k)$, тому $q(t) \leq k$. Отже, він оцінюється згори величиною

$$p_k^{(m-2)/2}(1) \int\limits_{r}^{+\infty} \left(\frac{r}{t}\right)^{q(t)} \frac{dn(t;\mu)}{t^{m-2}}.$$

Отже, для $k \in \mathbb{N}$, маємо

$$r^k \left| Y^{(k)}(x) + \int\limits_{|y| \leq r} p_k^{(m-2)/2}\left(\left\langle x, \frac{y}{|y|}\right\rangle_1\right) \frac{d\mu(y)}{|y|^{k+m-2}} \right| \leq$$

$$\leq p_k^{(m-2)/2}(1) \left\{ \int\limits_{0}^{r} \left(\frac{r}{t}\right)^{q(t)-1} \frac{dn(t;\mu)}{t^{m-2}} + \int\limits_{r}^{+\infty} \left(\frac{r}{t}\right)^{q(t)} \frac{dn(t;\mu)}{t^{m-2}} \right\} = p_k^{(m-2)/2}(1)\lambda(r),$$

звідки випливає нерівність (12).

Крім того, нехай $r_0 = \sup\{r : q(r) = 0\}$. Тоді, для будь-якого $r > r_0$ і деякого $a > 0$ маємо

$$N(r;\mu) = \int\limits_{0}^{r} \frac{dn(t;\mu)}{t^{m-2}} \leq \int\limits_{0}^{r_0} \frac{dn(t;\mu)}{t^{m-2}} + \int\limits_{r_0}^{r} \left(\frac{r}{t}\right)^{q(t)-1} \frac{dn(t;\mu)}{t^{m-2}} \leq a\lambda(r).$$

З того, що $0 \notin \operatorname{supp}\mu$ і останньої нерівності негайно випливає скінченність (λ, ε)-щільності міри μ, що завершує доведення теореми в цілому.

6. Доведення теорем 4 та 5. Нехай $\lambda(r)$ — функція зростання і $\varepsilon_0 \in \mathcal{E}_0$. Справедлива така лема.

Лема 4. *Нехай борелева міра* $\mu \geq 0$ *в* $\mathbb{R}^m$ $(m \geq 2)$, $0 \notin \operatorname{supp}\mu$, *має скінченну* (λ, ε_0)-*щільність. Тоді існує борелева міра* $\mu' \geq 0$ *в* $\mathbb{R}^m$ $(m \geq 2)$, *зосереджена на системі сфер* $\{\xi \in \mathbb{R}^m : |\xi| = a + \beta n\}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $a \geq 1$, $\beta > 0$, *така, що міра* $\mu + \mu'$ — (λ, ε_0)-*допустима.*

Доведення. Нехай $n \in \mathbb{N}$, $a \geq 1$, $\beta > 0$ і

$$\sigma_n = \{y \in \mathbb{R}^m : a + \beta n < |y| \leq a + \beta(n+1)\}.$$

Розглянемо функцію

$$f_n(\xi)=\frac{3(1+\beta)}{\beta^{m-1}}(a+\beta(n-1))^{m-1}\mu(\sigma_n)-$$
$$-(a+\beta(n-1))^{m-2}\int\limits_{\sigma_n}\left(\frac{|y|^2-(a+\beta(n-1))^2}{|y-(a+\beta(n-1))\xi|^m}-\frac{1}{|y|^{m-2}}\right)d\mu(y),\qquad \xi\in\mathbb{S}^{m-1}. \tag{24}$$

Доведемо, що для функції $f_n(\xi)$ виконується:

$$0\le f_n(\xi)\le\frac{6(1+\beta)}{\beta^{m-1}}(a+\beta(n-1))^{m-1}\mu(\sigma_n), \tag{25}$$

$$\int\limits_{\sigma_n}p_k^{(m-2)/2}\left(\left\langle x,\frac{y}{|y|}\right\rangle_1\right)\frac{d\mu(y)}{|y|^{k+m-2}}+$$
$$+\frac{(a+\beta(n-1))^{-k-m+2}}{|\mathbb{S}^{m-1}|}\int\limits_{\mathbb{S}^{m-1}}p_k^{(m-2)/2}\left(\langle x,\xi\rangle_1\right)f_n(\xi)dS(\xi)=0, \tag{26}$$

для довільних $\xi\in\mathbb{S}^{m-1}$ і $k\in\mathbb{N}$.

Оскільки

$$\left|\frac{|y|^2-(a+\beta(n-1))^2}{|y-(a+\beta(n-1))\xi|^m}-\frac{1}{|y|^{m-2}}\right|\le\frac{|y|+a+\beta(n-1)}{(|y|-(a+\beta(n-1)))^{m-1}}+\frac{1}{|y|^{m-2}}\le$$
$$\le\frac{2(a+\beta n)}{\beta^{m-1}}+\frac{1}{(a+\beta n)^{m-2}}\le\frac{3(a+\beta n)}{\beta^{m-1}}\le(a+\beta(n-1))\frac{3(1+\beta)}{\beta^{m-1}},\quad y\in\sigma_n,$$

то звідси, враховуючи (24), негайно отримуємо співвідношення (25).

Для доведення рівності (26) зауважимо, що

$$\frac{|y|^2-(a+\beta(n-1))^2}{|y-(a+\beta(n-1))\xi|^m}-\frac{1}{|y|^{m-2}}=$$
$$=\frac{1}{|y|^{m-2}}\left(\frac{|y|^{m-2}\left(|y|^2-(a+\beta(n-1))^2\right)}{\left(|y|^2-2|y|(a+\beta(n-1))\left\langle\xi,\frac{y}{|y|}\right\rangle_1+(a+\beta(n-1))^2\right)^{m/2}}-1\right).$$

З огляду на (7) і (8) отримуємо, що

$$\frac{|y|^2-(a+\beta(n-1))^2}{|y-(a+\beta(n-1))\xi|^m}-\frac{1}{|y|^{m-2}}=$$
$$=\begin{cases}\dfrac{1}{|y|^{m-2}}\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2k+m-2}{m-2}p_k^{(m-2)/2}\left(\left\langle\xi,\frac{y}{|y|}\right\rangle_1\right)\left(\frac{a+\beta(n-1)}{|y|}\right)^k, & m\ge3;\\[2ex] \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}2kp_k^0\left(\left\langle\xi,\frac{y}{|y|}\right\rangle_1\right)\left(\frac{a+\beta(n-1)}{|y|}\right)^k, & m=2.\end{cases}$$

Враховуючи, крім того, (6) та (24), отримуємо (26).

Побудуємо міру μ'. Нехай $D \subset \mathbb{R}^m$ — довільна борелева множина і $S_n = \{y \in \mathbb{R}^m : |y| = a + \beta(n-1)\}$, $n \in \mathbb{N}$. Покладемо

$$\mu'(D) = \sum_n \frac{1}{|\mathbb{S}^{m-1}|} \int\limits_{E_n^*} f_n(\xi) dS(\xi), \quad E_n^* = \{\xi \in \mathbb{S}^{m-1} : e = |e|\xi,\ e \in D \cap S_n\}.$$

Очевидно, що

$$\mu'(S_n) = \frac{1}{|\mathbb{S}^{m-1}|} \int\limits_{\mathbb{S}^{m-1}} f_n(\xi) dS(\xi) \le \frac{6(1+\beta)}{\beta^{m-1}} (a + \beta(n-1))^{m-1} \mu(\sigma_n). \tag{27}$$

Розглянемо міру $\widetilde{\mu} = \mu + \mu'$ і покажемо, що вона задовольняє умови леми. Для цього спочатку встановимо скінченність (λ, ε_0)-щільності даної міри. Для $r \in (a+\beta(n-1), a+\beta n]$, враховуючи (27), отримуємо

$$n(r; \mu') = \int\limits_{|y| \le r} d\mu'(y) \le \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{|\mathbb{S}^{m-1}|} \int\limits_{\mathbb{S}^{m-1}} f_i(\xi) dS(\xi) \le$$

$$\le \frac{6(1+\beta)}{\beta^{m-1}} \sum_{i=1}^{n+1} (a + \beta(i-1))^{m-1} \mu(\sigma_i) \le \frac{6(1+\beta)}{\beta^{m-1}} (a + \beta n)^{m-1} n(a + \beta(n+2); \mu) \le$$

$$\le \frac{6(1+\beta)}{\beta^{m-1}} (r+\beta)^{m-1} n(r + 3\beta; \mu) \le \frac{6(1+\beta)^m}{\beta^{m-1}}\, r^{m-1} n(r + 3\beta; \mu).$$

Звідси, для тих самих r, отримуємо

$$N(r; \mu') \le \frac{6(1+\beta)^m}{\beta^{m-1}} (m-1) \int\limits_0^r (t+3\beta)^{m-1} \frac{n(t+3\beta; \mu)}{(t+3\beta)^{m-1}}\, d(t+3\beta) \le$$

$$\le \frac{6(m-1)(1+3\beta)^{2m-1}}{\beta^{m-1}}\, r^{m-1} N(r + 3\beta; \mu).$$

Оскільки $0 \notin \operatorname{supp} \mu'$, за побудовою, і міра μ має скінченну (λ, ε_0)-щільність, то і міра $\widetilde{\mu}$ має скінченну (λ, ε_0)-щільність.

Перевіримо тепер, чи виконується умова (1) для міри $\widetilde{\mu}$. Використовуючи нерівність $\dfrac{n(r; \mu^*)}{r^{m-2}} \le \dfrac{r+\beta}{\beta} N(r+\beta; \mu^*)$ (див. початок доведення леми 3), для довільної борелевої в $\mathbb{R}^m$ $(m \ge 2)$ міри $\mu^* \ge 0$, $0 \notin \operatorname{supp} \mu^*$ отримуємо

$$\int\limits_{|y| \le r} \frac{d\mu^*(y)}{|y|^{m-2}} = \frac{n(r; \mu^*)}{r^{m-2}} + N(r; \mu^*) \le \frac{r + 2\beta}{\beta} N(r + \beta; \mu^*). \tag{28}$$

Нехай $k \in \mathbb{N}$. Розглянемо випадок $a + \beta(n-1) < r_1 < r_2 \le a + \beta(n+1)$. З нерівності

(28) отримуємо

$$\left| \int\limits_{r_1<|y|\le r_2} p_k^{(m-2)/2}\left(\left\langle x, \frac{y}{|y|}\right\rangle_1\right) \frac{d\widetilde{\mu}(y)}{|y|^{k+m-2}} \right| \le$$

$$\le p_k^{(m-2)/2}(1)\left(\frac{1}{r_1^k} \int\limits_{r_1<|y|\le a+\beta(n+1)} \frac{d\widetilde{\mu}(y)}{|y|^{m-2}} + \frac{1}{r_2^k} \int\limits_{r_2<|y|\le a+\beta(n+1)} \frac{d\widetilde{\mu}(y)}{|y|^{m-2}} \right) \le$$

$$\le p_k^{(m-2)/2}(1)\left(\frac{(a+\beta(n+3))N(a+\beta(n+2);\widetilde{\mu})}{\beta r_1^k} + \frac{(a+\beta(n+3))N(a+\beta(n+2);\widetilde{\mu})}{\beta r_2^k} \right) \le$$

$$\le \frac{(1+4\beta)p_k^{(m-2)/2}(1)}{\beta}\left(\frac{N(r_1+3\beta;\widetilde{\mu})}{r_1^{k-1}} + \frac{N(r_2+3\beta;\widetilde{\mu})}{r_2^{k-1}} \right).$$

Оскільки міра $\widetilde{\mu}$ має скінченну (λ,ε_0)-щільність, то, враховуючи оцінку $p_k^{(m-2)/2}(1)$, приходимо до потрібної оцінки.

Нехай тепер $a+\beta q < r_1 \le a+\beta(q+1)$, $a+\beta n < r_2 \le a+\beta(n+1)$, $q<n-1$, $q\in\mathbb{N}$. Тоді

$$\left| \int\limits_{r_1<|y|\le r_2} p_k^{\frac{m-2}{2}}\left(\left\langle x, \frac{y}{|y|}\right\rangle_1\right) \frac{d\widetilde{\mu}(y)}{|y|^{k+m-2}} \right| = \left| \int\limits_{r_1<|y|\le a+\beta(q+2)} p_k^{\frac{m-2}{2}}\left(\left\langle x, \frac{y}{|y|}\right\rangle_1\right) \frac{d\widetilde{\mu}(y)}{|y|^{k+m-2}} + \right.$$

$$+ \int\limits_{a+\beta(q+2)<|y|\le a+\beta(n+2)} p_k^{(m-2)/2}\left(\left\langle x, \frac{y}{|y|}\right\rangle_1\right) \frac{d\widetilde{\mu}(y)}{|y|^{k+m-2}} -$$

$$\left. - \int\limits_{r_2<|y|\le a+\beta(n+2)} p_k^{(m-2)/2}\left(\left\langle x, \frac{y}{|y|}\right\rangle_1\right) \frac{d\widetilde{\mu}(y)}{|y|^{k+m-2}} \right| \le$$

$$\le p_k^{(m-2)/2}(1)\left(\int\limits_{r_1<|y|\le a+\beta(q+2)} \frac{d\mu(y)}{|y|^{k+m-2}} + \int\limits_{r_2<|y|\le a+\beta(n+2)} \frac{d\mu(y)}{|y|^{k+m-2}} \right) +$$

$$+ \left| \sum_{p=q+2}^{n+1} \int\limits_{\sigma_p} p_k^{(m-2)/2}\left(\left\langle x, \frac{y}{|y|}\right\rangle_1\right) \frac{d\mu(y)}{|y|^{k+m-2}} + \int\limits_{S_p} p_k^{(m-2)/2}\left(\left\langle x, \frac{y}{|y|}\right\rangle_1\right) \frac{d\mu'(y)}{|y|^{k+m-2}} \right|.$$

З (26) випливає, що останній доданок дорівнює нулю. Тому, як і в попередньому випадку, одержуємо потрібну оцінку. □

Зауваження. Неважко переконатися, що параметр a в лемі 4 завжди можна вибрати так, щоб $\mu\left(\bigcup_n S_n\right)=0$.

Доведення теореми 4. Включення $\Lambda_S^m(\mathcal{E}_0) - \Lambda_S^m(\mathcal{E}_0) \subset \Lambda_\delta^m(\mathcal{E}_0)$ випливає з властивостей характеристики Неванлінни [16]. Залишається довести, що $\Lambda_\delta^m(\mathcal{E}_0) \subset \Lambda_S^m(\mathcal{E}_0) - \Lambda_S^m(\mathcal{E}_0)$. Нехай $w \in \Lambda_\delta^m(\mathcal{E}_0)$, $\mu_w = \mu_w^+ - \mu_w^-$. Оскільки μ_w^- має скінченну (λ, ε_0)-щільність, то застосовуючи до неї лему 4, приходимо до існування міри μ' такої, що $\mu = \mu_w^- + \mu'$ є (λ, ε_0)-допустимою мірою. За теоремою 2, μ — міра Ріса деякої субгармонійної функції $u_2 \in \Lambda_S^m(\mathcal{E}_0)$. Далі, оскільки функція $u_1 = w + u_2$ субгармонійна і $T(r, u_1) \leq T(r, w) + T(r, u_2)$, то $u_1 \in \Lambda_S^m(\mathcal{E}_0)$, що завершує доведення теореми. □

Скажемо, що міра μ в $\mathbb{R}^m$ $(m \geq 2)$ *зосереджена на множині* X, якщо $\mu(cX) = 0$, а міри μ_1 і μ_2 в $\mathbb{R}^m$ $(m \geq 2)$ *диз'юнктні*, якщо існують дві множини в $\mathbb{R}^m$ $(m \geq 2)$, що не перетинаються, на яких зосереджені відповідно міри μ_1 і μ_2 [25, с. 589], де $cX = \mathbb{R}^m \setminus X$.

Доведення теореми 5. Нехай μ — додатна варіація деякої міри μ_w, $w \in \Lambda_\delta^m(\mathcal{E}_0)$. Тоді з означення характеристики Неванлінни випливає, що вона має скінченну (λ, ε_0)-щільність.

Для доведення достатності застосуємо лему 4 до міри μ. Отримаємо (λ, ε_0)-допустиму міру $\mu + \mu'$. Застосувавши знову цю лему до міри μ', одержимо міру $\mu' + \mu''$, яка також (λ, ε_0)-допустима. Враховуючи зауваження до леми 4, виберемо число a в лемі так, щоб міри μ і μ'' були диз'юнктними. На основі теореми 2 знайдуться функції $u, v \in \Lambda_S^m(\mathcal{E}_0)$ такі, що $\mu_u = \mu + \mu'$ і $\mu_v = \mu' + \mu''$. За теоремою 4 функція $w = u - v \in \Lambda_\delta^m(\mathcal{E}_0)$, крім того $\mu_w = \mu - \mu''$. Враховуючи диз'юнктність мір μ і μ'', отримуємо $\mu = \mu_w^+$, що й потрібно було довести. □

7. Завершальні зауваження. Теореми 1–3 (див. [12]) є узагальненням класичних теорем Ліндельофа, Бореля та Вейєрштрасса. З результатів Б. Н. Хабібулліна [15] випливає, що у випадку $m = 2$ для δ-субгармонійних в $\mathbb{C}$ функцій скінченного (λ, ϵ)-типу справедливий аналог теореми Майлза-Рубела-Тейлора в загальній формі. Слід зауважити, що відповідні доведення в [15] є неконструктивними. Наше ж доведення теореми 4 конструктивне і є модифікацією конструкції Д. Майлза [19]. На жаль, ми не змогли цю конструкція модифікувати для загального випадку. Отже, проблема Майлза-Рубела-Тейлора залишається відкритою для класів $\Lambda_\delta^m(\mathcal{E})$ $(m \geq 3)$.

Автор висловлює щиру вдячність своєму науковому керівникові Я.В.Васильківу за постановку задачі, корисне обговорення результатів та постійну увагу до його роботи.

ЛІТЕРАТУРА

1. Rubel L. A. *A Fourier series method for entire functions* // Duke. Math. J.– 1963.– V. 30.– P. 437–442.
2. Rubel L. A. *Une méthode de séries de Fourier pour les fonctions méromorphes* // Séminaire P. Lelong, 6ème année.– 1965/66.– Exposé n.1.
3. Rubel L. A. *Croissance et zéros des Fonctions Méromorphes. Espace Duals de Fonctions Entières* // Publ. Sém. Math. d'Orsay.– 1965/66.– P. 77.
4. Rubel L. A., Taylor B. A. *A Fourier series method for meromorphic and entire functions* // Bull. Amer. Math. Soc.– 1966.– V. 73, №5.– P. 857–860.
5. Rubel L. A., Taylor B. A. *A Fourier series method for meromorphic and entire functions* // Bull. Soc. Math. France.– 1968.– V. 96.– P. 53–96.

6. Rubel L. A. Entire and Meromorphic Functions.– Springer-Verlag: New York-Berlin-Heidelberg, 1996.– 187 p.

7. Кондратюк А. А. Ряды Фурье и мероморфные функции.– Львов: Выща школа, 1988.– 195 с.

8. Noverraz P. *Extension d'une méthode de séries de Fourier aux fonctions sousharmoniques et plurisousharmoniques* // Séminaire P. Lelong, 6ème année.– 1965/66.– Exposé n.3 (Mars 1965) et C. R. Acad. Scien. Paris.– 1967.– V. 264.– P. 675–678.

9. Noverraz P. *Fonctions plurisousharmoniques et analytiques dans les espaces vectoriels topologiques complexes* // Ann. Inst. Fourier.– 1969.– V. 19, №2.– P. 419–493.

10. Кондратюк А. А. *О методе сферических гармоник для субгармонических функций* // Матем. сб.– 1981.– Т. 116, №2.– С. 147–165.

11. Кондратюк А. А. *Сферические гармоники и субгармонические функции* // Докл. АН СССР.– 1983.– Т. 268, №3.– С. 541–544.

12. Кондратюк А. А. *Сферические гармоники и субгармонические функции* // Матем. сб.– 1984.– Т. 125, №2.– С. 147–166.

13. Rubel L. A. *A survey of a Fourier series method for meromorphic functions* // Lect. Not. in Math.– 1973.– V. 336.– P. 51–62.

14. Василькив Я. В. Исследование асиптотических свойств целых и субгармонических функций методом рядов Фурье. – Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Донецк, 1986.– 17 с.

15. Хабибуллин Б. Н. *Рост целых функций с заданными нулями и представления мероморфных функций* // Матем. Заметки.– 2003.– Т. 73, №1.– С. 120–134.

16. Arsove M. G. *Function representable as differences of subharmonic functions* // Trans. Amer. Math. Soc.– 1953.– V. 75.– P. 327–365.

17. Ронкин Л. И. Введение в теорию функций многих переменных.– М.: Наука, 1971.– 430 с.

18. Процик Ю. С. *Мажоранти зростання і канонічне зображення δ-субгармонійних функцій* // Математичні Студії.– 2003.– Т. 20, №1.– С. 40–52.

19. Miles J. B. *Quotient representations of meromorphic functions* // J. d'Analyse Math.– 1972.– V. 336.– P. 371–388.

20. Taylor B. A. *The filds of quotient of some rings of entire functions* // Proc. Symp. Pure. Math. Amer. Math. Soc. Providence, R. I.– 1968.– V. 11.– P. 468–474.

21. Khabibullin B. N. *The representation of meromorphic function as the quotient of entire functions and Paley problem in $\mathbb{C}^n$: survey of some results* // MAG.– 2002.– V. 9, №2.– P. 146–167.

22. Веселовська О. В. *Аналог теоремы Майлза для δ-субгармонических в $\mathbb{R}^n$ функций* // Укр. мат. ж.– 1984.– Т. 36, №6.– С. 694–698.

23. Хейман У., Кеннеди П. Субгармонические функции. – М.: Мир, 1980.– 304 с.

24. Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп. – М.: Наука, 1965.– 588 с.

25. Шварц Л. Анализ. Т. 1.– М.: Мир, 1972. – 824 с.

Львівський національний університет імені Івана Франка,
механіко-математичний факультет
yu_protsyk@ukr.net

Надійшло 09.06.2004
Після переробки 29.06.2005