УДК 515.12

Н. Мазуренко

ПОГЛИНАЮЧІ СИСТЕМИ У ФУНКЦІОНАЛЬНОМУ ПРОСТОРІ, ПОВ'ЯЗАНІ З ВИМІРОМ ГАУСДОРФА

N. Mazurenko. *Absorbing sets in a functional space related to Hausdorff dimension*, Matematychni Studii, **23** (2005) 207–216.

It is proved that, for any sequence (γ_i), $n < \gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < n+1$, the sequence of the sets of functions in $C(\mathbb{I}^n)$ whose graphs are of Hausdorff dimension $> \gamma_i$ forms an $\mathcal{F}_\sigma$-absorbing sequence in $C(\mathbb{I}^n)$.

Н. Мазуренко. *Поглощающие системы в функциональном пространстве, связанные с размерностью Гаусдорфа* // Математичні Студії. – 2005. – Т.23, №2. – С.207–216.

Доказано, что для любой последовательности (γ_i), $n < \gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < n+1$, последовательность множеств функций в $C(\mathbb{I}^n)$, графики которых имеют размерность Гаусдорфа $> \gamma_i$, образует $\mathcal{F}_\sigma$-поглощающую последовательность в $C(\mathbb{I}^n)$.

1. Вступ. Гіперпростори компактів заданого виміру розглядалися багатьма авторами (див., наприклад, [1], [2], [3]). Одним з ефективних випадків застосування теорії поглинаючих систем у гільбертовому кубі виявився опис топології сімей гіперпросторів компактів, вимір яких пробігає множину невід'ємних цілих чисел ([1], [2], [3]). Автор в [13] поширила ці результати на випадок злічених сімей гіперпросторів компактів заданого виміру Гаусдорфа.

Теорія поглинаючих систем, крім гільбертового куба, може бути також розвинена в сепарабельному гільбертовому просторі l^2 (більш загально, в l^2-многовидах). Відомо, що множини неперервних функцій зі значеннями в абсолютних околових екстензорах, наділені топологією рівномірної збіжності, є l^2-многовидами (див. [6]). Метою даної статті є дослідження систем неперервних функцій на n-вимірному кубі, для яких вимір Гаусдорфа їх графіків набуває фіксованих значень з заданої впорядкованої множини (з очевидних міркувань випливає, що такий вимір може набувати значення з інтервалу $[n, n+1)$). Основний результат полягає в тому, що такі системи є поглинаючими (в сенсі [4]) системами для класу $\mathcal{F}_\sigma$-просторів. Застосування потужного апарату теорії поглинаючих систем дає змогу цілком описати топологію таких систем.

2. Позначення і попередні відомості. Типову метрику позначаємо d. Діаметр підмножини A в метричному просторі позначаємо $\mathrm{diam}(A)$. Для довільної триангуляції S n-вимірного куба $\mathbb{I}^n$ означимо $\mathrm{mesh}(S)$ як $\sup\{\mathrm{diam}(\sigma) \mid \sigma \in S\}$. Для $x \in X$ і $\varepsilon > 0$ множина $O_\varepsilon(x) = \{y \in X | d(x,y) < \varepsilon\}$ є *відкритою ε-кулею* з центром в x.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 57N20.

Для сепарабельного метричного компактного простору X, через $C(X)$ позначаємо простір всіх неперервних функцій визначених на X з метрикою, породженою sup-нормою, $\hat{d}(f,g) = \sup\{d(f(x),g(x)) \mid x \in X\}$ для довільних $f, g \in C(X)$.

Клас абсолютних околових ретрактів позначаємо через ANR. Замкнену підмножину A в $X \in ANR$ називаємо (*сильною*) *Z-множиною* в X якщо для довільного неперервного відображення $\varepsilon \colon X \to (0, \infty)$ існує неперервне відображення $f \colon X \to X$, ε-близьке до тотожнього в сенсі, що $d(x, f(x)) < \varepsilon(x)$, для кожного $x \in X$, таке, що $f(X) \subset X \setminus A$ (відповідно $\overline{f(X)} \subset X \setminus A$)(див. [4]). Вкладення $g \colon Y \to X$ називаємо *Z-вкладенням*, якщо його образ $g(Y)$ є Z-множиною в X. Відображення $f \colon Y \to X$ називаємо *замкненим* над підмножиною $A \subset X$, якщо для довільного $a \in A$ і довільного околу U множини $f^{-1}(a)$, існує окіл V точки a такий, що $f^{-1}(V) \subset U$. Множину A в X називаємо *σZ-множиною*, якщо $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, де всі A_i — Z-множини в X.

Гільбертів куб Q — це зліченний нескінченний добуток $Q = [-1,1]^{\omega}$. Ми розглядатимемо також наступні підпростори в Q:

псевдо-внутрішність $s = (-1,1)^{\omega}$,

радіальна внутрішність $\Sigma = \{(t_i) \in Q \mid \sup_i |t_i| < 1\}$.

Стандартний сепарабельний гільбертів простір позначаємо через l^2.

Простір X називається *s-многовидом*, якщо кожна точка $x \in M$ має окіл, гомеоморфний відкритій підмножині в s.

2.1. Гіперпростори. Нехай X — метричний простір. *Гіперпростором* X називаємо простір $\exp X$ непорожніх компактних підмножин в X з топологією Вієторіса. Базу цієї топології складають множини вигляду

$$\langle V_1, ..., V_n \rangle = \left\{ A \in \exp X \mid A \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_i \quad \text{і} \quad A \cap V_i \neq \varnothing \text{ для кожного } i \in \{1,2,...,n\} \right\},$$

де $V_1, ..., V_n$ пробігають сім'ю відкритих в X множин. Топологія Вієторіса породжується *метрикою Гаусдорфа* d_H,

$$d_H(A,B) = \inf\{\varepsilon > 0 | A \subset O_{\varepsilon}(B), B \subset O_{\varepsilon}(A)\}.$$

2.2. Вимір Гаусдорфа. Нехай F — підмножина в $\mathbb{R}^n$ для деякого n і s — невід'ємне число. Для $\varepsilon > 0$ позначимо

$$\mathcal{H}^s_{\varepsilon}(F) = \inf_{\mathcal{B}} \sum_{B \in \mathcal{B}} (\mathrm{diam} B)^s,$$

де інфімум береться по всіх покриттях $\mathcal{B}$ множини F, для яких $\mathrm{mesh}(\mathcal{B}) < \varepsilon$.

Нехай $\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{H}^s_{\varepsilon}(F)$. Існує єдине число s_0, *вимір Гаусдорфа* множини F, таке що $\mathcal{H}^s(F) = \infty$, якщо $0 \leq s < s_0$, і $\mathcal{H}^s(F) = 0$, якщо $s_0 < s < \infty$ (див. [8]). Позначаємо $\dim_H(F) = s_0$. Множину F в $\mathbb{R}^n$ називаємо *s-множиною* $(0 \leq s \leq n)$, якщо $\dim_H(F) = s$.

Теорема 1. [8, с.115] *Нехай Γ — графік функції*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{s-2} g(\lambda_i x), \quad x \in [0,1],$$

де $1 < s < 2$ і $g(4k+x) = \begin{cases} x & (0 \leq x < 1), \\ 2-x & (1 \leq x < 3), \\ x-4 & (3 \leq x < 4) \end{cases}$ *для $0 \leq x < 4$ і цілого k. Нехай $\{\lambda_i\}$ — послідовність додатних чисел така, що $\frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}$ зростає до $+\infty$ і $\frac{\log \lambda_{i+1}}{\log \lambda_i} \to 1$. Тоді $\dim_H \Gamma = s$.*

Нехай X — сепарабельний метризовний топологічний простір. Справедливою є наступна теорема.

Теорема 2. [13] *Для кожного $\alpha \geq 0$ множина $HD_{\leq\alpha}(X) = \{A \in \exp(X) \mid \dim_H(A) \leq \alpha\}$ є G_δ-підмножиною простору $\exp(X)$.*

Для $n \in \mathbb{N}$ і $\gamma \in (n, n+1)$ позначаємо $C_{>\gamma}(\mathbb{I}^n) = \{f \in C(\mathbb{I}^n) \mid \dim_H(\operatorname{graph} f) > \gamma\}$.

2.3. Поглинаючі системи. Нагадаємо коротко деякі означення з теорії поглинаючих систем в l^2-многовидах (детальніше див. [4]).

$\mathcal{F}_\sigma$-послідовністю у просторі X називається набір $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ підмножин в X, для якого $X_n \in \mathcal{F}_\sigma$ і $X_n \supset X_{n+1}$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Нехай $\mathfrak{X} = (X_n)_{n=1}^\infty$ — $\mathcal{F}_\sigma$-послідовність у просторі X. Якщо X — повний метричний простір, то послідовність $(X, \mathfrak{X})$ ми називаємо *$\mathcal{F}_\sigma^\infty$-послідовністю.*

Якщо простір X є ANR і $\mathfrak{X} = (X_n)_{n=1}^\infty$ — $\mathcal{F}_\sigma$-послідовність в X, то $\mathcal{F}_\sigma^\infty$- послідовність $(X, \mathfrak{X})$ називається *сильно $\mathcal{F}_\sigma^\infty$-універсальною,* якщо для кожної $\mathcal{F}_\sigma^\infty$-послідовності $(A, \mathfrak{A})$, де $\mathfrak{A} = (A)_{i=1}^\infty$, кожне неперервне відображення $f\colon A \to X$, що є Z-вкладенням на деякій замкненій підмножині K в A, можна наблизити Z-вкладенням $g\colon A \to X$ так, що $g \mid K = f \mid K$ і для кожного $i \in \mathbb{N}$ маємо $g^{-1}(X_i)\backslash K = A_i\backslash K$. Підмножина A ANR-простору X називається *гомотопійно нехтуваною,* якщо існує гомотопія $\xi\colon X \times \mathbb{I} \to X$ така, що $\xi(x, 0) = x$ для довільного x і $\xi(X \times (0, 1]) \subset X\backslash A$.

Нехай X — l^2-многовид. $\mathcal{F}_\sigma$-послідовність $\mathfrak{X}$ називається *$\mathcal{F}_\sigma$-поглинаючою* послідовністю у многовиді X якщо множина X_1 є зліченним об'єднанням сильних Z-множин в X, послідовність $(X, \mathfrak{X})$ є сильно $\mathcal{F}_\sigma^\infty$-універсальною і множина $X\backslash X_1$ є гомотопійно нехтуваною в X.

Правильною є наступна теорема єдиності для поглинаючих послідовностей у l^2-многовидах.

Теорема 3. [4] *Нехай M — l^2-многовид і $\mathfrak{X}^i$, $i \in \{1, 2\}$, — дві $\mathcal{F}_\sigma$-послідовності в M, для яких виконуються наступні умови:*

(1) X_1^i — гомотопійно нехтувана множина,

(2) $(M, \mathfrak{X}^i)$ є сильно $\mathcal{F}_\sigma^\infty$-універсальною.

Тоді, $(M, \mathfrak{X}^1) \cong (M, \mathfrak{X}^2)$.

3. Основний результат. Метою даного розділу є опис топології послідовності $(C(\mathbb{I}^n), C_{>\gamma_k}(\mathbb{I}^n)_{k=1}^\infty)$, де $n \leq \gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_k < \ldots < n + 1$.

Теорема 4. *Якщо $n \geq 1$ і $\Gamma = \{\gamma_k\}_{k=1}^\infty$ — зліченна впорядкована множина, де $n \leq \gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_k < \ldots < n + 1$, то послідовність $(C(\mathbb{I}^n), (C_{>\gamma_k}(\mathbb{I}^n))_{k=1}^\infty)$ є сильно $\mathcal{F}_\sigma^\infty$-універсальною.*

Доведення. Зафіксуємо довільну $\mathcal{F}_\sigma^\infty$-послідовність $(X, \{\mathcal{A}_m\}_{m=1}^\infty)$, і неперервне відображення $f\colon X \to C(\mathbb{I}^n)$, що є Z-вкладенням на деякій замкненій підмножині K в X. Оскільки довільна Z-множина в $C(\mathbb{I}^n)$ є сильною Z-множиною (див. [4]), ми можемо припустити, що $f[X\backslash K] \cap f[K] = \varnothing$ і відображення f замкнене над $f[K]$. Нехай $\varepsilon\colon C(\mathbb{I}^n) \to (0, 1]$ — деяка неперервна функція.

Означимо відображення $\mu\colon X \to [0, 1]$ як $\mu(x) = \frac{1}{3} \min\{\varepsilon(f(x)), \hat{d}(f(x), f[K])\}$. Нехай $PL(\mathbb{I}^n)$ — підмножина в $C(\mathbb{I}^n)$, що складається з усіх кусково-лінійних функцій. Відомо (див. [5]), що множина $PL(\mathbb{I}^n)$ є локально гомотопійно щільною в $C(\mathbb{I}^n)$. У такому разі, множина $C(\mathbb{I}^n)\backslash PL(\mathbb{I}^n)$ є локально гомотопійно нехтуваною в $C(\mathbb{I}^n)$ та існує гомотопія $H\colon C(\mathbb{I}^n)\times\mathbb{I}\to C(\mathbb{I}^n)$ така, що:

(1) $H_0 = 1_{C(\mathbb{I}^n)}$;

(2) для кожного $t\in(0,1]$, $H_t(C(\mathbb{I}^n))\subseteq PL(\mathbb{I}^n)$.

Очевидно, додатково можемо припустити, що:

(3) для кожного $t\in[0,1], \hat{d}(H_t, 1_{C(\mathbb{I}^n)})\le 2t$.

Для кожного $x\in X$, приймемо $\tilde{F}(x) = H(f(x),\mu(x))$. Тоді, якщо $\mu(x)>0$, функція $\tilde{F}(x)$ є кусково-лінійним наближенням функції $f(x)$. Використовуючи неперервність функції $\tilde{F}(x)$, можемо вибрати $\delta'(x)>0$ для якого виконується умова:

(3.1) $\sup\{\mathrm{diam}(A\times\tilde{F}(x)(A)) \mid \mathrm{diam}A\le\delta'(x)\} < \frac{\mu(x)}{8}$.

Позначимо:

(3.2) $\Delta(x) = \sup\{\delta'(x)\}$.

Іншими словами, $\Delta(x)$ — це максимальне дійсне число, для якого виконується наступна умова: для довільної підмножини A в $\mathbb{I}^n$, діаметр якої не перевищує $\Delta(x)$, діаметр множини $A\times\tilde{F}(x)(A)$ менший за $\frac{\mu(x)}{8}$. Маємо, $\Delta(x)>0$ для $x\in X\backslash K$. Для $x\in K$ приймемо $\Delta(x)=0$.

Отже, ми означили функцію $\Delta\colon X\to\mathbb{I}$.

Лема 1. *Функція $\Delta\colon X\to\mathbb{I}$ напівнеперервна знизу.*

Доведення. Щоб довести це, досить довести, що для довільного $t\in(0,1)$, множина $\Delta^{-1}[(t,1]]$ є відкритою в $X\backslash K$. Для деякого $t\in(0,1)$ зафіксуємо довільно $x\in\Delta^{-1}[(t,1]]$. Виберемо $\delta>0$ таке, щоб виконувалась нерівність $t<\delta<\Delta(x)$. Позначимо $\eta = \sup\{\mathrm{diam}(A\times\tilde{F}(x)(A)) \mid \mathrm{diam}A\le\delta\}$. Тоді, оскільки $\delta<\Delta(x)$, виконується нерівність $\eta<\frac{\mu(x)}{8}$. З цієї нерівності випливає, що існує додатне дійсне число η_1, для якого виконується нерівність $\eta<\frac{\mu(x)}{8}-\eta_1$. Нехай V — такий окіл точки x в $X\backslash K$, для якого виконується умова: для кожного $y\in V$, $\hat{d}(\tilde{F}(x),\tilde{F}(y))<\frac{1}{2}\left(\frac{\mu(x)}{8}-(\eta_1+\eta)\right)$ і $d(\mu(x),\mu(y))<\eta_1$ (можемо вибрати такий окіл, враховуючи неперервність відображень $\tilde{F}$ та μ). Тоді

$$\sup\left\{\mathrm{diam}(A\times\tilde{F}(y)(A)) \mid \mathrm{diam}A\le\delta\right\}\le\eta+2\hat{d}(\tilde{F}(x),\tilde{F}(y))<\frac{\mu(x)}{8}-\eta_1<\frac{\mu(y)}{8}.$$

Тому $V\subset\Delta^{-1}[(t,1]]$, що доводить лему. □

Використовуючи лему 1, можемо стверджувати (див. [1, с. 489]), що існує неперервна функція $\Delta'(x)\colon X\to\mathbb{I}$, для якої виконується умова $0\le\Delta'\le\Delta$. Крім того, якщо для деякого $x\in X\backslash K$ маємо $\Delta(x)>0$, то $0<\Delta'(x)<\Delta(x)$. Позначимо $\delta(x)=\min\left\{\frac{\Delta'(x)}{2},\frac{\mu(x)}{8}\right\}$. Очевидно, що функція $\delta\colon X\to\mathbb{I}$ є неперервною і для неї виконується умова:

(3.5) $0<\delta(x)<1$ для кожного $x\in X\backslash K$ і $\delta(x)=0$ для кожного $x\in K$.

Означимо тепер функцію $F(x)\in C(\mathbb{I}^n)$ наступною формулою

$$F(x)(y)=\tilde{F}(x)\left(\min\left(1,\frac{y_1}{1-\delta(x)}\right),\ldots,\min\left(1,\frac{y_n}{1-\delta(x)}\right)\right).$$

Іншими словами, графік функції $F(x)$ — це графік функції $\tilde{F}(x)$, стиснений з коефіцієнтом стиску $1-\delta(x)$ по кожній координатній осі, і кусково-лінійно продовжений на весь куб $\mathbb{I}^n$. Легко бачити, що для $x \in X \setminus K$, $F(x) \in PL(\mathbb{I}^n)$. З умови $\sup\{\operatorname{diam}(A \times \tilde{F}(x)(A)) \mid \operatorname{diam} A \leq \Delta'(x)\} < \frac{\mu(x)}{8}$ та означення функції $F(x)$ легко випливає, що $\hat{d}(F(x), \tilde{F}(x)) < \frac{\mu(x)}{8}$.

Нехай для деякого дійсного числа $\gamma \in (1,2)$, g_γ функція з теореми 1, для якої $\dim_H(\operatorname{graph}(g_\gamma)) = \gamma$. Розглянемо функцію $\hat{g}_\gamma \in C(\mathbb{I})$, означену як

$$\hat{g}_\gamma(y) = \begin{cases} g_\gamma(0)/\|g_\gamma\|, & y \in [0, \frac{1}{4}); \\ g_\gamma\left((y-\frac{1}{4})/\frac{1}{2}\right)/\|g_\gamma\|, & y \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]; \\ g_\gamma(1)/\|g_\gamma\|, & y \in (\frac{3}{4}, 1]. \end{cases}$$

Легко бачити, що $\dim_H\left(\operatorname{graph}\hat{g}_\gamma|_{\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]}\right) = \gamma$ ([8, с. 18]), $\dim_H\left(\operatorname{graph}\hat{g}_\gamma|_{\left[0,\frac{1}{4}\right]\cup\left[\frac{3}{4},1\right]}\right) = 1$. Тому, $\dim_H(\operatorname{graph}\hat{g}_\gamma) = \gamma$. Використовуючи відповідні властивості виміру Гаусдорфа (див. [9]), можемо стверджувати, що графік функції $\hat{g}_{1\gamma} \in C(\mathbb{I}^n)$, означеної як $\hat{g}_{1\gamma}(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \hat{g}_\gamma(y_1)$, матиме вимір Гаусдорфа $(n-1)+\gamma$. Крім того, оскільки, фактично, $\operatorname{graph}\hat{g}_{1\gamma} = \operatorname{graph}\hat{g}_\gamma \times \mathbb{I}^{n-1}$, то для довільних $k, k' \in (0,1)$, $k < k'$ правильна рівність

$$\dim_H\left(\operatorname{graph}\hat{g}_{1\gamma}\,|_{\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]\times[k,k']^{n-1}}\right) = (n-1)+\gamma.$$

Зафіксуємо тепер довільну гладку функцію $h \in C(\mathbb{I}^n)$, що задовольняє умови:

(4) $h\,|_{\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]^n} = c = \text{const}$;

(5) $h\,|_{\partial\mathbb{I}^n} \equiv 0, h\,|_{\mathbb{I}^n\setminus\partial\mathbb{I}^n} > 0$;

(5') $\sup\limits_{y\in\mathbb{I}^n} |h(y)| \leq 1$.

Означимо функцію $\tilde{g}_\gamma \in C(\mathbb{I}^n)$ формулою $\tilde{g}_\gamma(y) = \hat{g}_{1\gamma}(y) \cdot h(y)$. З умови (4) і відповідних властивостей виміру Гаусдорфа випливає ([8], с. 18), що $\dim_H\left(\operatorname{graph}\tilde{g}_\gamma\,|_{[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]^n}\right) = (n-1)+\gamma$. З того, що відображення множення на функцію є ліпшицевим, і з відповідної властивості виміру Гаусдорфа (див. [8], с.10) випливає, що $\dim_H\left(\operatorname{graph}\tilde{g}_\gamma\,|_{\mathbb{I}^n\setminus[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]^n}\right) \leq \dim_H\left(\operatorname{graph}\hat{g}_{1\gamma}\,|_{\mathbb{I}^n\setminus[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]^n}\right) = (n-1)+\gamma$. Враховуючи ці факти та умови (5) і (5'), можемо стверджувати, що функція $\tilde{g}_\gamma$ задовольняє умови:

(6) $\dim_H(\operatorname{graph}\tilde{g}_\gamma) = (n-1)+\gamma$;

(7) $\tilde{g}_\gamma\,|_{\partial\mathbb{I}^n} \equiv 0$;

(8) $\sup\limits_{y\in\mathbb{I}^n} |\tilde{g}_\gamma(y)| \leq 1$.

Запишемо $\mathbb{N}$ як диз'юнктне об'єднання нескінченної кількості нескінченних множин, нехай $N_1, N_2, \ldots$. Для $m \geq 1$ та $p \in N_m$ позначимо $\bar{g}_p = \tilde{g}_{\gamma_{m+1}-(n-1)}$.

Розглянемо підпростір $\mathcal{C}'$ простору $C(\mathbb{I}^n)$, який складається з усіх елементів простору $C(\mathbb{I}^n)$, що дорівнюють 0 на межі куба $\mathbb{I}^n$. Очевидно, $\mathcal{C}'$ як повна опукла нескінченновимірна ніде не локально компактна підмножина в локально-опуклому просторі, гомеоморфна до l^2 (див. [12]) та множина $PL(\mathbb{I}^n) \cap \mathcal{C}'$ локально гомотопійно щільна у просторі $\mathcal{C}'$. Тому існує гомотопія $\tilde{H}\colon \mathcal{C}' \times \mathbb{I} \to \mathcal{C}'$, що задовольняє умови, аналогічні до умов (1)–(3).

Означимо відображення $\varphi_i\colon \mathbb{I} \to C(\mathbb{I}^n)$ як $\varphi_i(t) = \tilde{H}(\bar{g}_i, t/2)$. Тоді, $\varphi_i(0) = \bar{g}_i$, $\varphi_i((0,1]) \subseteq PL(\mathbb{I}^n) \cap \mathcal{C}'$ і для кожного $t \in [0,1]$ $\varphi_i(t)\mid_{\partial\mathbb{I}^n} \equiv 0$ (врахувавши умову (7)).

Для кожного $m \geq 1$ запишемо $\mathcal{A}_m = \bigcup_{p=1}^{\infty} A_m^p$, де A_m^p — замкнена підмножина в X. Позначимо через $i(m,p)$ p-ий елемент множини N_m. Для довільного $x \in X$ означимо функцію $G_{i(m,p)}(x)\colon \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ як

$$G_{i(m,p)}(x)(y) = \frac{\delta(x)}{2} \cdot \begin{cases} \varphi_{i(m,p)}(d(x, A_m^p)) \left(\frac{y - \left(1 - \frac{\delta(x)}{2} - \frac{\delta(x)}{2^{i(m,p)}}\right)\cdot \bar{1}}{\frac{\delta(x)}{2^{i(m,p)+1}}} \right), \\ \qquad \text{для } y \in \left[1 - \frac{\delta(x)}{2} - \frac{\delta(x)}{2^{i(m,p)}}, 1 - \frac{\delta(x)}{2} - \frac{\delta(x)}{2^{i(m,p)+1}}\right]^n; \\ 0, \qquad \text{для } y \in \mathbb{I}^n \setminus \left[1 - \frac{\delta(x)}{2} - \frac{\delta(x)}{2^{i(m,p)}}, 1 - \frac{\delta(x)}{2} - \frac{\delta(x)}{2^{i(m,p)+1}}\right]^n, \end{cases}$$

де $\overline{1} = (1, 1, \ldots, 1)$, для $x \in X \setminus K$ і $G_{i(m,p)}(x) \equiv 0$ для $x \in K$. Означимо $G(x)(y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i(m,p)}} G_{i(m,p)}(x)(y)$.

Нехай $\xi\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ — нескінченно диференційовна функція така, що $\xi(\mathbb{R}\setminus[0,3]) = 0$, $\xi([1,2]) = 1$, $\xi \mid (0,1)$ монотонно зростає, $\xi \mid (2,3)$ монотонно спадає. Для кожного $t \in [0,1)$ нехай $\xi_t = \xi \circ k_t$, де $k_t\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — функція, означена формулою:

$$k_t(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in \mathbb{R}\setminus[0,3); \\ \frac{x}{t+1}, & \text{якщо } x \in [0, \frac{3}{2}(t+1)]; \\ \frac{x-3t}{1-t}, & \text{якщо } x \in [\frac{3}{2}(t+1), 3). \end{cases}$$

Зауважимо, що функція ξ_t нескінченно диференційовна для кожного $t \in [0,1)$ і відображення $t \mapsto \xi_t$ неперервно вкладає $[0,1)$ в $C(\mathbb{R})$.

Нехай $\xi_{nt}(x) = \xi_t \left(\frac{9n(n+1)}{2} \left(x - \frac{1}{n} + \frac{1}{3n(n+1)} \right) \right)$ для $n \in \mathbb{N}$. Зауважмо, що носії функцій ξ_{nt} і $\xi_{mt'}$ диз'юнктні при $n \neq m$ і довільних t, t'. Для довільного елемента $t \in [0,1)^\omega$, де $t = (t_i)_{i=1}^{\infty}$, приймемо $K(t)(x) = \hat{h}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \xi_{nt_n}(x)\cdot\hat{h}(x)$, де $\hat{h}\colon \mathbb{R} \to [0,1/2]$ — нескінченно диференційовна функція така, що $\hat{h}(x) = 0$, якщо $x \leq 0$, $\hat{h}(x)$ монотонно зростає, якщо $x \in (0,1]$ і $\hat{h}(x) = 1/2$, якщо $x > 1$. У такому випадку ряд у правій частині рівності рівномірно збігається (для нього числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \hat{h}(\frac{1}{n})$ є мажорантним і, очевидно, збіжним) і тому функція $K(t) \in C(\mathbb{R})$ для кожного $t \in [0,1)^\omega$.

Нехай $T\colon \mathbb{I}^{n-1} \to \mathbb{R}_+$ — нескінченно диференційовна функція, що дорівнює 0 лише на межі куба $\mathbb{I}^{n-1}$. Приймемо для $n > 1$, $t \in [0,1)^\omega$, $t = (t_i)_{i=1}^{\infty}$ і $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{I}^n$

$$\Phi(t)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = K(t)(x_1) \cdot T(x_2, x_3, \ldots, x_n),$$

і для $n = 1$ $\Phi(t)(x) = K(t)(x)$. Покажемо, що відображення $t \mapsto \Phi(t)$ замкнено вкладає $[0,1)^\omega$ в $C(\mathbb{I}^n)$.

(a) *Неперервність відображення* Φ. Достатньо довести неперервність відображення $K\colon [0,1)^\omega \to C(\mathbb{R})$. З умов, накладених на функцію $\hat{h}\colon \mathbb{R} \to [0,1/2]$, випливає, що для кожного $\delta > 0$ існує $n_0 \in \mathbb{N}$ для якого $\hat{h}(\frac{1}{n}) \leq \delta$ для всіх $n > n_0$, а також, враховуючи неперервність по t відображення $t \mapsto k_t$, існує $\varepsilon > 0$ таке, що $\|\xi_{t_n} - \xi_{t'_n}\| < \delta$ як тільки $|t_n - t'_n| < \varepsilon$ для всіх $n \leq n_0$. Очевидно, що для таких δ, ε, n_0 виконується умова: для всіх $t' \in O(t, n_0; \varepsilon) = \{t' \in [0,1)^\omega \mid |t_i - t'_i| < \varepsilon, i = 1, 2, \ldots, n_0\}$, $\|K(t') - K(t)\| < \delta$. Остання нерівність доводить неперервність відображення K, а отже і Φ.

(b) *Ін'єктивність відображення* Φ випливає з ін'єктивності відображення ξ_t та побудови відображення K.

(c) *Замкненість відображення* Φ. Виберемо послідовність $\{t^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ у просторі $[0,1)^{\omega}$, яка не збігається у цьому просторі, і доведемо, що відповідна послідовність функцій $\{\Phi(t^{(k)})\}_{k=1}^{\infty}$ не збігається у просторі $C(\mathbb{I}^n)$. Оскільки вибрана послідовність незбіжна, то існує $n \in \mathbb{N}$ для якого послідовність $\{t_n^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ незбіжна у просторі $[0,1)$. З побудови відображення Φ випливає, що для доведення його замкненості, достатньо довести, що послідовність $\{\xi_{t_n^{(k)}}\}_{k=1}^{\infty}$ не збігається у просторі $C(\mathbb{R})$. Розглянемо два можливі випадки: 1) послідовність $\{t_n^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ не є фундаментальною у просторі $[0,1)$ (ми розглядаємо простір $[0,1)$ з Евклідовою метрикою). Тоді, з побудови відображення k_t випливає, що відповідна послідовність функцій $\{\xi_{t_n^{(k)}}\}_{k=1}^{\infty}$ не буде фундаментальною, а отже і збіжною у просторі $C(\mathbb{R})$. 2) Послідовність $\{t_n^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ збігається до 1 при $k \to +\infty$. У такому випадку послідовність $\{k_{t_n^{(k)}}\}_{k=1}^{\infty}$ збігається до функції k_1, яка є розривною у точці $x = 3$. Звідси випливає, що відповідна послідовність функцій $\{\xi_{t_n^{(k)}}\}_{k=1}^{\infty}$ збігається до функції ξ_1, яка також є розривною у точці $x = 3$, тобто, $\xi_1 \notin C(\mathbb{R})$. Це доводить замкненість відображення Φ.

Оскільки $[0,1)^{\omega} \cong s \cong l^2$, то з доведеного вище можемо стверджувати, що існує замкнене вкладення $\tilde{h}\colon X \to C(\mathbb{I}^n)$, яке, враховуючи побудову відображення Φ, для кожного $x \in X$ задовольняє умови :

(9) $\tilde{h}(x)\mid_{\partial\mathbb{I}^n} \equiv 0$, $\tilde{h}(x)(y) > 0$ для всіх $y \in \mathbb{I}^n \setminus \partial\mathbb{I}^n$;

(10) $\sup\limits_{y\in\mathbb{I}^n} |\tilde{h}(x)| \leq 1$;

(10') $\tilde{h}$ — гладка функція простору $C(\mathbb{I}^n)$.

Означимо функцію $P(x)\colon \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$ для $x \in X\setminus K$ формулою

$$P(x)(y) = \frac{\delta(x)}{2} \cdot \begin{cases} \tilde{h}(x)\left(\frac{y-\left(1-\frac{\delta(x)}{4}\right)\cdot\bar{1}}{\frac{\delta(x)}{4}}\right), & \text{для } y \in \left[1-\frac{\delta(x)}{4}, 1\right]^n; \\ 0, & \text{для } y \in \mathbb{I}^n \setminus \left[1-\frac{\delta(x)}{4}, 1\right]^n, \end{cases}$$

і $P(x) \equiv 0$ для $x \in K$.

Означимо тепер для кожного $x \in X$ відображення $q\colon X \to C(\mathbb{I}^n)$ як

$$q(x) = F(x) + G(x) + P(x).$$

Ми стверджуємо, що q — шукане відображення, тобто відображення яке задовольняє умови з означення сильної $\mathcal{F}_{\sigma}$-універсальності. Доведення цього факту розбивається на такі кроки.

Крок 1. *Відображення q коректно визначене, неперервне, задовольняє рівність $q \mid K = f \mid K$ і $\hat{d}(f(x), q(x)) \leq \frac{3}{4}\min\{\varepsilon(f(x)), \hat{d}(f(x), f[K])\}$ для кожного $x \in X$.*

(a) Для доведення того факту, що $q(x) \in C(\mathbb{I}^n)$, достатньо довести неперервність за змінною y функцій $F(x)(y)$, $G(x)(y)$, $P(x)(y)$ для деякого фіксованого $x \in X$.

Неперервність функції $F(x)$ є очевидною, оскільки вона побудована за допомогою неперервних функцій.

Функція $G(x)(y)$ є сумою ряду $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} G_i(x)(y)$. Для кожного $i \in \mathbb{N}$, функція $G_i(x)(y) = \delta(x) \cdot \varphi_i(t)(y)$ для певного $t \in [0,1]$ і $y \in \left[1-\frac{\delta(x)}{2}-\frac{\delta(x)}{2^i}, 1-\frac{\delta(x)}{2}-\frac{\delta(x)}{2^{i+1}}\right]^n$, тобто є неперервною для таких y, оскільки $\varphi_i([0,1]) \subseteq C(\mathbb{I}^n)$ за побудовою (згідно умов (1), (2)); для $y \in \mathbb{I}^n \setminus \left[1-\frac{\delta(x)}{2}-\frac{\delta(x)}{2^i}, 1-\frac{\delta(x)}{2}-\frac{\delta(x)}{2^{i+1}}\right]^n$, $G_i(x)(y)$, очевидно, неперервно продовжена (враховуючи умову (7)). Отже, $G_i(x) \in C(\mathbb{I}^n)$. Враховуючи умови (8) і (3.5), маємо $|G_i(x)(y)| \leq 1$ для кожного $y \in \mathbb{I}^n$. Це означає, що ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} G_i(x)$ рівномірно збігається до $G(x)$ на $\mathbb{I}^n$, що є достатньою умовою неперервності функції $G(x)(y)$.

Неперервність функції $P(x)(y)$ випливає з умови (9).

(b) Для доведення неперервності відображення q, досить довести неперервність (за змінною x) відображень $F(x)$,$G(x)$ і $P(x)$.

Неперервність відображення F випливає з неперервності використаних при його побудові відображень H, f,μ і δ.

Неперервність відображення G_i випливає з неперервності відображень φ_i і δ, умови (3.5) і неперервності метрики d. Оскільки для кожного $x \in X$, $\|G_i(x)\| \leq 1$ (умови (3.5), (8)), то ряд, складений з функцій $c_i \in C(\mathbb{I}^n)$, де $c_i \equiv \frac{1}{2^i}$ є, очевидно, збіжним і мажорантним для ряду $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} G_i$. Це означає, що послідовність часткових сум ряду $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} G_i$ є фундаментальною в повному метричному просторі $C(X, C(\mathbb{I}^n))$, звідки випливає неперервність відображення G.

Неперервність відображення P випливає з неперервності відображень i, δ і умови (3.5).

(c) Зафіксуємо довільне $x \in X$. Очевидно, $\hat{d}(f(x), F(x)) \leq \frac{\mu(x)}{8} + 2\mu(x)$ (за умовою (3) і побудовою функції $\delta(x)$), $\hat{d}(F(x), F(x)+G(x)+P(x)) \leq \frac{\mu(x)}{8}$ (оскільки, з побудови відповідних функцій і умов (8), (10) випливає, що $\sup_{y\in\mathbb{I}^n} |G(x)(y)| \leq \frac{\delta(x)}{2}$ і $\sup_{y\in\mathbb{I}^n} |P(x)(y)| \leq \frac{\delta(x)}{2}$ і, більше того, для довільного $y \in \mathbb{I}^n$ виконується $P(x)(y) \cdot G(x)(y) = 0$). Тоді, $\hat{d}(f(x), q(x)) \leq \frac{\mu(x)}{8} + \frac{\mu(x)}{8} + 2\mu(x) = \frac{9}{4}\mu(x) \leq \frac{3}{4} \min\{\varepsilon(f(x)), \hat{d}(f(x), f[K])\}$. Остання нерівність доводить, що $q \mid K = f \mid K$.

Крок 2. *Відображення q — замкнене вкладення.*

Зауважимо спочатку, що з доведеного Кроком 1 (c) випливає

(11) $q[X \backslash K] \cap q[K] = \varnothing$.

Доведемо спочатку ін'єктивність відображення q. Зафіксуємо $x, x' \in X$ такі, що $q(x) = q(x')$. Нам потрібно встановити, що $x = x'$. Якщо $x, x' \in K$, то потрібна рівність випливає з рівності $q \mid K = f \mid K$ і того, що f — вкладення. Якщо, наприклад, $x \in K$ і $x' \notin K$ то з (11) випливає, що $q(x) \neq q(x')$. Отже, не зменшуючи загальності, можемо припустити, що $x, x' \in X \backslash K$. У такому разі $\delta(x)$ і $\delta(x')$ відмінні від нуля.

Зауважимо, що з рівності $q(x) = q(x')$ і з побудови відображення q (а саме умов (7) і (9)) випливає рівність $F(x)(\overline{1}) = F(x')(\overline{1})$.

Доведемо тепер, що $\delta(x) = \delta(x')$. Припустимо протилежне. Нехай $\delta(x) < \delta(x')$. Тоді, за побудовою відображення q, існує таке дійсне δ, $\frac{\delta(x)}{4} < \delta < \frac{\delta(x')}{4}$, для якого $P(x) \mid_{\left[1-\delta, 1-\frac{\delta(x)}{4}\right]^n} \equiv 0$, і тому $q(x) \mid_{\left[1-\delta, 1-\frac{\delta(x)}{4}\right]^n} = F(x)(\overline{1})$, в той час, як $q(x') \mid_{\left[1-\delta, 1-\frac{\delta(x)}{4}\right]^n} = F(x')(\overline{1}) + P(x') \mid_{\left[1-\delta, 1-\frac{\delta(x)}{4}\right]^n}$, де $P(x') \mid_{\left[1-\delta, 1-\frac{\delta(x)}{4}\right]^n} \neq 0$ (що випливає з умови (9)). Ми отримали суперечність з рівністю $q(x) = q(x')$. Отже, $\delta(x) = \delta(x')$. Тому, за побудовою відображення q, можемо стверджувати, що $P(x) = P(x')$. Використавши ін'єктивність відображення $\tilde{h}$ і умову (3.5), отримуємо рівність $x = x'$.

Щоб довести, що відображення q є замкненим вкладенням, досить довести, що якщо $\{x_n\}$ — така послідовність, що $\{q(x_n)\}$ збігається до деякого елемента $y \in C(\mathbb{I}^n)$, то $\{x_n\}$ містить збіжну підпослідовність. Оскільки $q \mid K = f \mid K$ — замкнене вкладення, досить розглянути випадок, коли $x_n \in X \backslash K$. Зі збіжності послідовності $\{q(x_n)\}$ і побудови відображення G випливає збіжність послідовності $\{\delta(x_n)\}$. Ми можемо припустити, враховуючи умову (3.5), що $\{\delta(x_n)\}$ збігається до $\delta_0 \in [0,1]$. Розглянемо два можливі випадки.

Перший випадок: $\delta_0 = 0$. Якщо $\delta_0 = 0$, то послідовність $\{F(x_n)\}$ прямує до y і $\{\hat{d}(F(x_n), \tilde{F}(x_n))\}$ прямує до 0, тобто послідовність $\{\tilde{F}(x_n)\}$ прямує до y. Послідовності функцій $\{\tilde{F}(x_n)\}$ відповідають дві числові послідовності: верхніх меж діаметрів графіків функцій $\tilde{F}(x_n)$ на підмножинах A в $\mathbb{I}^n$ (посл. $\{\mu(x_n)\}$), та відповідних максимально допустимих діаметрів цих підмножин A в $\mathbb{I}^n$ (посл. $\{\Delta'(x_n)\}$) (тобто, як тільки для деякої підмножини A, $\mathrm{diam}(A) \le \Delta'(x_n)$, то $\mathrm{diam}(A \times \tilde{F}(x_n)(A)) < \frac{\mu(x_n)}{8}$). Нагадаємо, що за означенням, $\delta(x_n) = \min\{\frac{1}{2}\Delta'(x_n), \frac{\mu(x_n)}{8}\}$, тому, оскільки послідовність $\{\delta(x_n)\}$ прямує до нуля і $\mu(x_n) > 0$ та $\Delta'(x_n) > 0$, то принаймні одна з вище зазначених послідовностей повинна прямувати до нуля. Припустимо тепер, що послідовність $\{\mu(x_n)\}$ не прямує до 0. Тоді, з означення функцій Δ та Δ' (а саме з умови (3.2), тобто з максимальності вибору діаметру підмножин A в $\mathbb{I}^n$) випливає, що послідовність $\{\Delta'(x_n)\}$ також не прямує до нуля. Тому і послідовність $\{\delta(x_n)\}$ не прямує до 0, що суперечить початковій умові. Отже, послідовність $\{\mu(x_n)\}$ повинна прямувати до 0; тоді послідовність $\{\hat{d}(\tilde{F}(x_n), f(x_n))\}$ прямує до нуля згідно (3), тому послідовність $\{f(x_n)\}$ прямує до y і $\{\varepsilon(f(x_n))\}$ прямує до $\varepsilon(y) > 0$. За означенням функції μ звідси випливає, що тоді послідовність $\hat{d}(f(x_n), f[K])$ повинна прямувати до 0, тобто $y \in f[K]$. Оскільки відображення f замкнене над $f[K]$, то послідовність $\{x_n\}$ збігається до $f^{-1}(y)$.

Другий випадок: $\delta_0 > 0$. З побудови відображення q випливає, що послідовність $\{P(x_n)\}$, а отже і послідовність $\{\tilde{h}(x_n)\}$ є збіжною в просторі $C(\mathbb{I}^n)$. Оскільки відображення $\tilde{h}$ є замкненим вкладенням, $\{x_n\}$ збігається в просторі X.

Крок 3. *Для довільного $m \in \mathbb{N}$ виконується рівність $q^{-1}[C_{>\gamma_m}(\mathbb{I}^n)] \backslash K = \mathcal{A}_m \backslash K$.*

Зафіксуємо довільне $x \in X \backslash K$. Спочатку зауважимо, що за побудовою відображення q, $\dim_H \left(\mathrm{graph} \left(q(x) \mid_{\mathbb{I}^n \backslash \left[1-\delta(x), 1-\frac{\delta(x)}{2}\right]^n} \right) \right) = n$, або, іншими словами, $\dim_H(\mathrm{graph}(q(x))) = \dim_H(\mathrm{graph}(G(x)))$. Якщо $x \in \mathcal{A}_m$, то для деякого $p \in N_m$, $d(x, A^p_m) = 0$ і тому $\varphi_{i(m,p)}(0) = \hat{g}_{i(m,p)}$, де $\dim_H(\mathrm{graph}(\hat{g}_{i(m,p)})) = \gamma_{m+1}$ (умова (6)). У такому випадку, $\dim_H(\mathrm{graph}(q(x))) > \gamma_m$ і $q(x) \in C_{>\gamma_m}(\mathbb{I}^n)$. Якщо $x \notin \mathcal{A}_m$, то для довільного $p \in N_m$, $d(x, A^p_m) > 0$ і $\varphi_{i(m,p)}(d(x, A^p_m)) \in PL(\mathbb{I}^n)$ (умова (2)). Дане твердження є правильним для всіх $m' \ge m$, тому $\dim_H(\mathrm{graph}(q(x))) \le \gamma_m$. В цьому випадку, $q(x) \notin C_{>\gamma_m}(\mathbb{I}^n)$. Це доводить потрібну рівність.

Крок 4. *Відображення q є Z-вкладенням.*

Оскільки $q[K] = f[K]$ є Z-множиною, досить довести, що $q[Y]$ є Z-множиною, якщо $Y \subseteq X \backslash K$ — замкнена множина. Але це очевидно, оскільки для довільного $x \in Y$ функція $q(x) \mid_{\left[1-\frac{\delta(x)}{4}, 1\right]^n}$ — гладка. Тому на підставі умов (2) і (9), гомотопія $H_t \colon C(\mathbb{I}^n) \to C(\mathbb{I}^n)$ відображає $C(\mathbb{I}^n)$ в доповнення до $q[Y]$ для кожного додатного $t < 1$. Умова (3) завершує доведення теореми. ☐

Простір $C(\mathbb{I}^n)$, як сепарабельний метризовний простір Фреше, гомеоморфний до l^2, а отже до s. З теореми 2 випливає, що для кожного $\gamma \in [n, n+1)$, множина $C_{>\gamma}(\mathbb{I}^n)$ є $\mathcal{F}_\sigma$-множиною в $C(\mathbb{I}^n)$. З локальної гомотопійної нехтуваності множини $C(\mathbb{I}^n) \backslash PL(\mathbb{I}^n)$ і властивостей виміру Гаусдорфа випливає, що множина $C_{>\gamma_1}(\mathbb{I}^n)$ міститься в деякій σZ-множині простору $C(\mathbb{I}^n)$. З цих міркувань, теорем 3, 4 та стандартних результатів теорії поглинаючих систем випливає такий наслідок.

Наслідок. *Послідовності $(C(\mathbb{I}^n), (C_{>\gamma_k}(\mathbb{I}^n))_{k=1}^\infty)$ і $(s^\omega, (\Sigma^k \times s \times s \times \cdots)_{k=1}^\infty)$ гомеоморфні.*

ЛІТЕРАТУРА

1. Van Mill J. The Infinite-Dimensional Topology of Function Spaces . – Amsterdam: Elsevier, 2001. – V. 64.– 630 p.
2. Gladdines H. Absorbing systems in infinite-dimensional manifolds and applications . – Amsterdam: Vrije Universiteit, 1994. – 117 p.
3. Cauty R. *Suites $\mathcal{F}_\sigma$-absorbantes en theorie de la dimension* // Fundamenta Mathematicae.– 1999. – V. 159, no. 2. – P.115–126.
4. Cauty R. *Strong Universality and Its Applications* // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. – 1996. – V.212. – P.89–114.
5. Banakh T., Radul T., Zarichnyi M. Absorbing Sets in Infinite-Dimensional Manifolds. – Lviv: VNTL Publishers, 1996. – V. 1. – 231 p.
6. Geoghegan R. *On spaces of homeomorphisms, embeddings, and functions, II: The piecewise linear case* // Proc. London Math. Soc. – 1973. – V. 3. – P.463–483.
7. Dijkstra Jan J., Mogilski J. *The topological product structure of systems of Lebesgue spaces* // Math. Ann. – 1991. – V. 290. – P.527–543.
8. Falconer K. J. The Geometry of Fractal Sets. – Cambridge University Press, 1985. – 162 p.
9. Wegmann H. *Die Hausdorff-Dimension von kartesischen Produktmengen in metrischen Räumen* // J. reine angew. Math. – 1969. – B. 234. – 163–171.
10. Рудин У. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1976. – 443 с.
11. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976. – 542 с.
12. Bessaga C., Pelczynski A. Selected topics in infinite-dimensional topology . – Warszawa, 2001. – 352 p.
13. Mazurenko N. *Absorbing sets related to Hausdorff dimension* // Visnyk Lviv Univ., Ser. Mech-Math. – 2003. – V.61. – P.121–128.

Прикарпатський національний університет імені В. Стефаника

Надійшло 01.02.2004