

УДК 517.946

І. Д. ПУКАЛЬСЬКИЙ

**ЗАДАЧА ДІРІХЛЕ ТА ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ
ДЛЯ ЛІНІЙНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ З ВИРОДЖЕННЯМ**

I. D. Pukalsky. *Dirichlet's problem and the problem of optimum control for linear parabolic equation with degeneration*, Matematychni Studii, **23** (2005) 179–190.

The existence and uniqueness of Dirichlet's problem for linear parabolic equations with a free power order of degeneration of coefficients with time and space variables has been proved in terms of spaces of classical functions with the power order. The estimation of solution to the problem in the corresponding spaces has been found. The problem of choice of optimum control by systems, described by Dirichlet's problem with limited control is examined. The quality functional is determined by the volume integral.

И. Д. Пукальский. *Задача Дирихле и задача оптимального управления для линейных параболических уравнений с вырождением* // Математичні Студії. – 2005. – Т.23, №2. – С.179–190.

В пространствах классических функций со степенным весом доказано корректную разрешимость задачи Дирихле для линейных параболических уравнений с произвольным степенным порядком вырождения коэффициентов как по временной, так и пространственным переменным. Найдена оценка решения задачи в соответствующих пространствах. Рассмотрена задача о выборе оптимального управления системами, описываемыми задачей Дирихле с ограниченным управлением. Функционал качества определяется объемным интегралом.

Крайові задачі з нелокальною умовою за часовою змінною для параболічних рівнянь другого порядку зі степеневими особливостями в коефіцієнтах рівняння досліджувалися в [1, 2, 3]. У книзі [4] побудовано теорію класичних розв'язків задачі Коші та крайових задач у просторах максимально широких класів функцій для нерівномірно параболічних і B -параболічних рівнянь, які мають особливості обмеженого порядку на межі області.

Тут за допомогою принципу максимуму та апіорних оцінок досліджується задача Діріхле для лінійних параболічних рівнянь другого порядку без обмеження на степеневий порядок виродження коефіцієнтів за всіма змінними, а також встановлено необхідні й достатні умови існування оптимального розв'язку системи, що описується задачею Діріхле. Критерій якості задається об'ємним інтегралом.

Постановка задачі Діріхле і основний результат. Нехай Ω — деяка область в $\mathbb{R}^n$, $\dim \Omega \leq n - 1$, D — обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з межею ∂D . Розглянемо в області $Q =$

2000 *Mathematics Subject Classification*: 35K35.

Keywords: Dirichlet problem, optimum control, linear parabolic equation

doi:10.30970/ms.23.2.179-190

© І. Д. Пукальський, 2005

$(0, T] \times D$ для параболічного рівняння задачу знаходження функції u , яка задовольняє при $(t, x) \in Q^{(0)} \equiv Q \setminus \{(t, x), t = t^{(0)}, x \in D\} \cup \{(t, x), t \in (0, T], x \in \overline{\Omega}\}$ рівняння

$$(Lu)(t, x) \equiv \left[D_t - \sum_{ij=1}^n A_{ij}(t, x) D_{x_i} D_{x_j} - \sum_{i=1}^n A_i(t, x) D_{x_i} - A_0(t, x) \right] u(t, x) = f(t, x), \quad (1)$$

початкову умову

$$u|_{t=0} = \varphi(x) \quad (2)$$

і на бічній межі $\Gamma = (0, T] \times \partial D$ — крайову умову

$$u|_{\Gamma} = g(t, x). \quad (3)$$

Нехай $l^{(1)}, l^{(2)}$ — довільні дійсні числа, $t^{(0)} \in (0, T)$, $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$,

$$|x - \xi| = \inf_{\xi \in \overline{\Omega}} \left[\sum_{i=1}^n (x_i - \xi_i)^2 \right]^{1/2}, \quad \min_{y \in \partial D} |x - \xi| \geq e > 0, \quad e = \text{const.}$$

Особливості коефіцієнтів диференціального виразу L будуть характеризувати такі функції: $s_1(l^{(1)}, t) = |t - t^{(0)}|^{l^{(1)}}$ при $|t - t^{(0)}| \leq 1$, $s_1(l^{(1)}, t) = 1$ при $|t - t^{(0)}| \geq 1$; $s_2(l^{(2)}, x) = |x - \xi|^{l^{(2)}}$ при $|x - \xi| \leq 1$, $s_2(l^{(2)}, x) = 1$ при $|x - \xi| \geq 1$.

Нехай $\overline{Q} = [0, T] \times \overline{D}$, $\overline{D} = D \cup \partial D$, а $P(t, x)$, $P_1(t^{(1)}, x^{(1)})$, $B_k(t^{(1)}, x^{(2)})$ і $P_k^{(2)}(t^{(2)}, x^{(2)})$, $k \in \{1, \dots, n\}$, — точки із Q , $x^{(1)} = (x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$, $x^{(2)} = (x_1^{(1)}, \dots, x_{k-1}^{(1)}, x_k^{(2)}, x_{k+1}^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$. Позначимо через $\beta_k^{(\nu)}$, $\gamma^{(\nu)}$, $r_i^{(\nu)}$, $\delta^{(\nu)}$, α , $\nu \in \{1, 2\}$, дійсні числа такі, що $\beta_k^{(\nu)} \in (-\infty, \infty)$, $\gamma^{(\nu)} \geq 0$, $r_i^{(\nu)} \geq 0$, $\delta^{(\nu)} \geq 0$, $\alpha \in (0, 1)$. Покладемо $s(l; P) = s_1(l^{(1)}, t) s_2(l^{(2)}, x)$. Означимо функціональні простори, в яких досліджується задача.

Через $C^{2+\alpha}(\gamma, \beta, q; Q)$ позначимо простір функцій $u(t, x)$, $(t, x) \in \overline{Q}$, які мають неперервні частинні похідні в області $Q^{(0)}$ вигляду $D_t^k D_x^j u$, $2k + |j| \leq 2$, для яких скінченна норма

$$\|u; \gamma, \beta, q; Q\|_{2+\alpha} = \sum_{j=0}^2 \|u; \gamma, \beta, q; Q\|_j + \|u; \gamma, \beta, q; Q\|_{2+\alpha},$$

де $\|u; \gamma, \beta, q; Q\|_0 = \sup_{P \in \overline{Q}} s(q; P) |u(P)|$, $\|u; \gamma, \beta, 0; Q\|_0 \equiv \|u\|_0$,

$$\|u; \gamma, \beta, q; Q\|_1 = \|u; \gamma, \beta, q; Q\|_0 + \sum_{i=1}^n \sup_{P \in Q} s(q + \gamma - \beta_i; P) |D_{x_i} u(P)|,$$

$$\|u; \gamma, \beta, q; Q\|_2 = \sum_{j=0}^1 \|u; \gamma, \beta, q; Q\|_j +$$

$$+ \sum_{ij=1}^n \sup_{P \in Q} (s(q + 2\gamma - \beta_i - \beta_j; P) |D_{x_i} D_{x_j} u(P)| + s(q + 2\gamma; P) |D_t u(P)|),$$

$$\|u; \gamma, \beta, q; Q\|_{2+\alpha} = \sum_{i,j,k=1}^n \left\{ \sup_{\{P_1, B_k\} \subset \overline{Q}} [s(q + (2 + \alpha)\gamma - \beta_i - \beta_j - \alpha\beta_k; \tilde{P}_1) |x_k^{(1)} - x_k^{(2)}|^{-\alpha} \times \right.$$

$$\begin{aligned}
& \times |D_{x_i} D_{x_j} u(P_1) - D_{x_i} D_{x_j} u(B_k)| + \sup_{\{P_1, B_k\} \subset \overline{Q}} [s(q + (2 + \alpha)\gamma - \alpha\beta_k; \tilde{P}_1) \times \\
& \times |x_k^{(1)} - x_k^{(2)}|^{-\alpha} |D_t u(P_1) - D_t u(B_k)|] + \sup_{\{P_k^{(2)}, B_k\} \subset \overline{Q}} [s(q + (2 + \alpha)\gamma - \beta_i - \beta_j; \tilde{P}_2) \times \\
& \times |t^{(1)} - t^{(2)}|^{-\frac{\alpha}{2}} |D_{x_i} D_{x_j} u(P_k^{(2)}) - D_{x_i} D_{x_j} u(B_k)|] + \sup_{\{P_k^{(2)}, B_k\} \subset \overline{Q}} [s(q + (2 + \alpha)\gamma; \tilde{P}_2) \times \\
& \times |t^{(1)} - t^{(2)}|^{-\frac{\alpha}{2}} |D_t u(P_k^{(2)}) - D_t u(B_k)|] \Big\}.
\end{aligned}$$

Тут використано позначення:

$$s(m; \tilde{P}_1) = \min(s(m; P_1), s(m; B_k)), \quad s(m; \tilde{P}_2) = \min(s(m; P_k^{(2)}), s(m; B_k)).$$

Нехай $C^\alpha(l; Q)$ — множина функцій $v_k(t, x)$, $(t, x) \in \overline{Q}$, для яких скінченна норма

$$\begin{aligned}
\|v_k; l; Q\|_\alpha &= \sup_{P \in \overline{Q}} s(l; P) |v_k(P)| + \\
&+ \sum_{k=1}^n \left[\sup_{\{P_1, B_k\} \subset \overline{Q}} s(l; \tilde{P}_1) s_2(\alpha, \tilde{x}) |x_k^{(1)} - x_k^{(2)}|^{-\alpha} |v_k(P_1) - v_k(B_k)| + \right. \\
&\left. + \sup_{\{P_k^{(2)}, B_k\} \subset \overline{Q}} s(l; \tilde{P}_2) s_1\left(\frac{\alpha}{2}, \tilde{t}\right) |t^{(1)} - t^{(2)}|^{-\frac{\alpha}{2}} |v_k(B_k) - v_k(P_k^{(2)})| \right],
\end{aligned}$$

$$s_1(l^{(1)}, \tilde{t}) = \min(s_1(l^{(1)}, t^{(1)}), s_1(l^{(1)}, t^{(2)})), \quad s_2(l^{(2)}, \tilde{x}) = \min(s_2(l^{(2)}, x^{(1)}), s_2(l^{(2)}, x^{(2)})).$$

Нехай для задачі (1) - (3) виконуються умови:

а) коефіцієнти $A_i \in C^\alpha(r_i, Q)$, $A_0 \in C^\alpha(\delta, Q)$, $A_0 \leq K < +\infty$, $K = \text{const}$, $A_{ij} \in C^\alpha(\beta_i + \beta_j, Q)$ і виконується умова рівномірної параболичності [5, с. 9] для рівняння

$$\left[D_t - \sum_{ij=1}^n s(\beta_i + \beta_j; P) A_{ij}(P) D_{x_i} D_{x_j} \right] u(P) = f_1(P); \quad (4)$$

б) функції $f \in C^\alpha(\gamma, \beta; \delta; Q)$, $\varphi \in C^{2+\alpha}(\tilde{\gamma}, \tilde{\beta}; 0; D)$, $g \in C^{2+\alpha}(\Gamma)$, $\tilde{\gamma} = (0, \gamma^{(2)})$, $\tilde{\beta}_i = (0, \beta_i^{(2)})$, $\gamma^{(\nu)} = \max\left(\max_{i \in \{1, \dots, n\}} \left(1 + \beta_i^{(\nu)}\right); \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \left(r_i^{(\nu)} - \beta_i^{(\nu)}\right); \frac{\delta^{(\nu)}}{2}\right)$, $\nu \in \{1, 2\}$, і виконуються умови узгодження першого порядку [5, с. 365];

в) поверхня ∂D належить до класу $C^{2+\alpha}$.

Правильна така теорема.

Теорема 1. *Нехай виконані умови а)-в). Тоді існує єдиний розв'язок задачі (1)-(3) з простору $C^{2+\alpha}(\gamma, \beta; 0; Q)$, для якого з деякою сталою $C \in [0, +\infty)$ правильна оцінка*

$$\|u; \gamma, \beta; 0; Q\|_{2+\alpha} \leq C \left(\|f; \gamma, \beta; \delta; Q\|_\alpha + \|\varphi; \tilde{\gamma}, \tilde{\beta}; 0; D\|_{2+\alpha} + \|g\|_{C^{2+\alpha}(\Gamma)} \right). \quad (5)$$

Для доведення теореми 1 побудуємо послідовність розв'язків крайових задач з гладкими коефіцієнтами, граничним значенням якої є розв'язок задачі (1)-(3).

Оцінка розв'язків крайових задач з гладкими коефіцієнтами. Нехай $Q_m = Q \cap \{(t, x) \in Q : s_1(1, t) \geq m_1^{-1}, s_2(1, x) \geq m_2^{-1}\}$, $m = \{m_1, m_2\}$, m_1, m_2 — натуральні числа, $m_1 > 1$, $m_2 > 1$, — послідовність областей, яка при $m_1 \rightarrow \infty$, $m_2 \rightarrow \infty$ збігається до Q , $D_m = \{x \in D : s_2(1, x) \geq m_2^{-1}\}$, $\partial D_m = \{x \in D : s_2(1, x) = m_2^{-1}\}$, $\Gamma_m = \partial D_m \times (0, T)$.

Розглянемо в області Q задачу про знаходження розв'язків рівняння

$$(L_1 u_m)(t, x) \equiv \left[D_t - \sum_{ij=1}^n a_{ij}(t, x) D_{x_i} D_{x_j} - \sum_{i=1}^n a_i(t, x) D_{x_i} - a_0(t, x) \right] u_m = f_m(t, x), \quad (6)$$

які задовольняють умови

$$u_m|_{t=0} = \varphi_m(x), \quad u_m|_{\Gamma} = g(t, x). \quad (7)$$

Тут коефіцієнти a_{ij} , a_i , a_0 , функції f_m , φ_m визначаються у наступний спосіб. Якщо $(t, x) \in (0, T] \times \overline{D}_m$ і $\beta_i^{(1)} + \beta_j^{(1)} \geq 0$, то $a_{ij}(t, x) = \min(A_{ij}(t, x), A_{ij}(m_1^{-1}, x))$ при $t^{(0)} \in (0, m_1^{-1}]$ і

$$a_{ij}(t, x) = \min \left\{ A_{ij}(t, x), \frac{m_1(t^{(0)} - t) + 1}{2} A_{ij}(t^{(0)} - m_1^{-1}, x) + \frac{m_1(t - t^{(0)}) + 1}{2} A_{ij}(t^{(0)} + m_1^{-1}, x) \right\}$$

при $t^{(0)} \geq m_1^{-1}$. У випадку $\beta_i^{(1)} + \beta_j^{(1)} < 0$ беремо $a_{ij}^{(1)}(t, x) = \max(A_{ij}(t, x), A_{ij}(m_1^{-1}, x))$ при $t^{(0)} \in (0, m_1^{-1}]$ і

$$a_{ij}^{(1)}(t, x) = \max \left\{ A_{ij}(t, x), \frac{m_1(t^{(0)} - t) + 1}{2} A_{ij}(t^{(0)} - m_1^{-1}, x) + \frac{m_1(t - t^{(0)}) + 1}{2} A_{ij}(t^{(0)} + m_1^{-1}, x) \right\}.$$

Коефіцієнти $a_i(t, x) = \min\{A_i(t, x), A_i(m_1^{-1}, x)\}$ при $t^{(0)} \in (0, m_1^{-1}]$ і при $t^{(0)} \geq m_1^{-1}$, $i \in \{0, 1, \dots, n\}$,

$$a_i(t, x) = \min \left\{ A_i(t, x), \frac{m_1(t^{(0)} - t) + 1}{2} A_i(t^{(0)} - m_1^{-1}, x) + \frac{m_1(t - t^{(0)}) + 1}{2} A_i(t^{(0)} + m_1^{-1}, x) \right\}.$$

Функції $f_m(t, x) = \min\{f(t, x), f(m_1^{-1}, x)\}$ при $t^{(0)} \in (0, m_1^{-1}]$ і

$$f_m(t, x) = \min \left\{ f(t, x), \frac{m_1(t^{(0)} - t) + 1}{2} f(t^{(0)} - m_1^{-1}, x) + \frac{m_1(t - t^{(0)}) + 1}{2} f(t^{(0)} + m_1^{-1}, x) \right\}$$

при $t^{(0)} \geq m_1^{-1}$. При $x \in \overline{D}_m$ функції $\varphi_m(x) = \varphi(x)$.

Для $(t, x) \in Q \setminus \{(0, T) \times D_m\}$ коефіцієнти a_{ij} , a_i , a_0 і функції f_m є розв'язками внутрішньої задачі

$$D_t u = \Delta u, \quad u(0, x) = 0, \quad \frac{du}{d\vec{n}} \Big|_{\Gamma_m} = \psi(t, x),$$

де, наприклад, для a_i беремо $\psi = a_i|_{\Gamma_m}$, $\vec{n}$ — нормаль до Γ_m . Для $x \in D \setminus D_m$ функції φ_m є розв'язками внутрішньої задачі Діріхле

$$\Delta u = 0, \quad u|_{\partial D_m} = \varphi|_{\partial D_m}.$$

Позначимо через $\tilde{g}$ розв'язок задачі Діріхле в області $Q = (0, T] \times D$

$$D_t u = \Delta u, \quad u(0, x) = 0, \quad u|_{\Gamma} = g(t, x).$$

У задачі (6), (7) зробимо підстановку

$$u_m(t, x) = v_m(t, x)e^{\lambda t} + \tilde{g}(t, x), \quad \lambda > K. \quad (8)$$

Одержимо

$$(L_2 v_m)(t, x) \equiv (L_1 + \lambda)v_m = [f_m(t, x) - (L_1 \tilde{g})(t, x)]e^{-\lambda t} \equiv F(t, x), \quad (9)$$

$$v_m(0, x) = \varphi(x) - \tilde{g}(0, x) \equiv \Phi(x), \quad v_m|_{\Gamma} = 0. \quad (10)$$

Сформулюємо принцип максимуму для задачі (9), (10) у тому вигляді, який використовуваватимемо пізніше.

Теорема 2. Нехай v_m — класичний розв'язок задачі (9), (10) в області Q і виконані умови а)-в). Тоді для v_m правильна оцінка

$$|v_m| \leq \max\{\|\Phi\|_0, \|F(\lambda - a_0)^{-1}\|_0\}. \quad (11)$$

Доведення. Можливі три випадки: v_m не додатний в $\overline{Q}$, або найбільше додатне значення v_m досягається на $\Gamma_T = \Gamma \cup D$, або це найбільше значення досягається в точці $P_1 \in Q$.

У першому випадку $\max_{\overline{Q}} v_m(t, x) \leq 0$, в другому — $0 < \max_{\overline{Q}} v_m(t, x) = \max_{\overline{D}} \Phi(x)$. У третьому випадку $\max_{\overline{Q}} v_m(t, x) = v_m(P_1)$, при цьому в точці P_1 справджуються рівняння (9) і співвідношення

$$D_t v_m \geq 0, \quad D_{x_i} v_m = 0, \quad - \sum_{ij=1}^n a_{ij}(P_1) D_{x_i} D_{x_j} v_m(P_1) \geq 0. \quad (12)$$

Нерівність (12) справджується, оскільки в точці максимуму другі похідні $D_{y_k} D_{y_k} v_m$ за будь-яким напрямком $y_k = \sum_{l=1}^n \alpha_{kl} s(\beta_l; P_1)(x_l - x_l^{(1)})$ ($\det \|\alpha_{kl}\| \neq 0$) недодатні, а вираз

$$\begin{aligned} \sum_{ij=1}^n a_{ij}(P_1) D_{x_i} D_{x_j} v_m &= \sum_{k,l=1}^n \left(\sum_{ij=1}^n s(\beta_i + \beta_j; P_1) a_{ij}(P_1) \alpha_{ki} \alpha_{lj} \right) D_{y_k} D_{y_l} v_m = \\ &= \sum_{k=1}^n \mu_k D_{y_k} D_{y_k} v_m < 0, \end{aligned}$$

позаяк за умовою а) характеристичні числа $\mu_1, \dots, \mu_n$ квадратичної форми додатні (рівняння (4) рівномірно параболічне). Враховуючи (12) і рівняння (9) в точці P_1 , маємо нерівність

$$v_m(P_1) \leq F(P_1)(-a_0(P_1) + \lambda)^{-1}. \quad (13)$$

Подібно, розглядаючи точку найменшого недодатного значення функції v_m , маємо

$$v_m \geq \min \left\{ 0, \min_{\overline{D}} \Phi(x), \min_{\overline{Q}} (F(t, x)(\lambda - a_0(t, x))^{-1}) \right\}.$$

Отже, для розв'язку задачі (9), (10) правильна нерівність (11). $\square$

Введемо в просторі $C^{2+\alpha}(Q)$ норму $\|v_m; \gamma, \beta; q; Q\|_{2+\alpha}$, еквівалентну при кожному фіксованому m_1, m_2 до гельдерової норми, яка визначається як $\|u; \gamma, \beta; q; Q\|_{2+\alpha}$ тільки замість функцій $s_1(q_1, t), s_2(q_2, x)$ беремо відповідно $d_1(q_1, t), d_2(q_2, x)$, де $d_1(q_1, t) = \max(s_1(q_1, t), m_1^{-q_1})$ при $q_1 \geq 0$ і $d_1(q_1, t) = \min(s_1(q_1, t), m_1^{-q_1})$ при $q_1 < 0$; $d_2(q_2, x) = \max(s_2(q_2, x), m_2^{-q_2})$ при $q_2 \geq 0$ і $d_2(q_2, x) = \min(s_2(q_2, x), m_2^{-q_2})$ при $q_2 < 0$.

Правильна така теорема.

Теорема 3. *Якщо виконані умови а)-в), то для розв'язку задачі (9), (10) правильна оцінка*

$$\|v_m; \gamma, \beta; 0; Q\|_{2+\alpha} \leq C(\|F; \gamma, \beta; 2\gamma; Q\|_\alpha + \|\Phi; \tilde{\gamma}, \tilde{\beta}; 0; D\|_{2+\alpha} + \|v_m\|_0). \quad (14)$$

Стала $C \in [0, +\infty)$ не залежить від m .

Доведення. Використовуючи означення норми та інтерполяційні нерівності з [6, с. 176], для кожного $\varepsilon > 0$ з деякою сталою $c(\varepsilon) \in [0, +\infty)$ маємо

$$\|v_m; \gamma, \beta; 0; Q\|_{2+\alpha} \leq (1 + \varepsilon^\alpha)[\|v_m; \gamma, \beta; 0; D\|_{2+\alpha} + c(\varepsilon)\|v_m\|_0].$$

Тому досить оцінити півнорму $[\|v_m; \gamma, \beta; 0; Q\|_{2+\alpha}]$. З означення $[\|v_m; \gamma, \beta; 0; Q\|_{2+\alpha}]$ випливає існування в $\overline{Q}$ точок $P_1, B_k, P_k^{(2)}$, для яких справджується одна з таких нерівностей:

$$\frac{1}{2}[\|v_m; \gamma, \beta; 0; Q\|_{2+\alpha}] \leq E_k, \quad k \in \{1, 2, 3, 4\}, \quad (15)$$

$$E_1 \equiv \sum_{i,j,k=1}^n d(2\gamma - \beta_i - \beta_j + \alpha(\gamma - \beta_k); \tilde{P}_1) |x_k^{(1)} - x_k^{(2)}|^{-\alpha} |D_{x_i} D_{x_j} v_m(P_1) - D_{x_i} D_{x_j} v_m(B_k)|;$$

$$E_2 \equiv \sum_{i,j,k=1}^n d(2\gamma - \beta_i - \beta_j + \alpha\gamma; \tilde{P}_2) |t^{(1)} - t^{(2)}|^{-\frac{\alpha}{2}} |D_{x_i} D_{x_j} v_m(B_k) - D_{x_i} D_{x_j} v_m(P_k^{(2)})|;$$

$$E_3 \equiv \sum_{k=1}^n d(2\gamma + \alpha(\gamma - \beta_k); \tilde{P}_1) |x_k^{(1)} - x_k^{(2)}|^{-\alpha} |D_t v_m(P_1) - D_t v_m(B_k)|;$$

$$E_4 \equiv \sum_{k=1}^n d((2 + \alpha)\gamma; \tilde{P}_2) |t^{(1)} - t^{(2)}|^{-\frac{\alpha}{2}} |D_t v_m(B_k) - D_t v_m(P_k^{(2)})|.$$

Якщо $|t^{(1)} - t^{(2)}| \geq d(2\gamma; \tilde{P}) \frac{\rho^2}{16} \equiv T_1$, $d(2\gamma; \tilde{P}) = \min(d(2\gamma, \tilde{P}_1), d(2\gamma, \tilde{P}_2))$, ρ — довільне число з $(0, 1)$, то

$$E_k \leq 2\rho^{-\alpha} \|v_m; \gamma, \beta; 0; Q\|_2, \quad k \in \{2, 4\}.$$

Враховуючи інтерполяційні нерівності, маємо

$$E_k \leq \varepsilon^\alpha [\|v_m; \gamma, \beta; 0; Q\|_{2+\alpha} + c(\varepsilon)\|v_m\|_0]. \quad (16)$$

Вибираючи $\varepsilon > 0$ досить малим, з нерівності (16) знаходимо

$$[\|v_m; \gamma, \beta; 0; Q\|_{2+\alpha}] \leq c\|v_m\|_0. \quad (17)$$

Якщо $|x_k^{(1)} - x_k^{(2)}| \geq n^{-1} d(\gamma - \beta_k, \tilde{P}) \frac{\rho}{4} \equiv T_2$, то $E_k \leq 2\rho^{-\alpha} \|v_m; \gamma, \beta; 0; Q\|_{2+\alpha}$, $k \in \{1, 3\}$. Повторюючи проведені вище міркування, одержимо нерівності (17).

Розглянемо випадок, коли $|x_k^{(1)} - x_k^{(2)}| \leq T_2$, або $|t^{(1)} - t^{(2)}| \leq T_1$. Будемо вважати, що $d(\gamma, \tilde{P}) \equiv d(\gamma; P_1)$. Нехай $|x_n^{(1)} - \xi_n| \geq 2T_2$, $\xi \in \partial D$ або $|x^{(1)} - \xi| \geq 2T_2n$. Запишемо задачу (9), (10) у вигляді

$$L_3 v_m \equiv \left[D_t - \sum_{ij=1}^n a_{ij}(P_1) D_{x_i} D_{x_j} \right] v_m =$$

$$= \left[\sum_{ij=1}^n (a_{ij}(t, x) - a_{ij}(P_1)) D_{x_i} D_{x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(t, x) D_{x_i} + a_0(t, x) - \lambda \right] v_m + F(t, x) \equiv F_1(t, x), \quad (18)$$

$$v_m(0, x) = \Phi(x), \quad v_m(t, x)|_{\Gamma} = 0. \quad (19)$$

Нехай $V_1 \in Q$, V_1 — куб з центром у точці P_1 , $V_r = \{(t, x) \in Q : |t - t^{(1)}| \leq 16r^2 T_1, t \geq 0, |x_i^{(1)} - x_i| \leq 4r T_2, i \in \{1, \dots, n\}\}$.

У задачі (18), (19) зробимо заміну $v_m(t, x) = \omega_m(t, y)$, $y_i = d(\beta_i, P_1)x_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Область визначення $\omega_m(t, y)$ позначимо через Q_0 . Тоді функція $W_m(t, y) = \omega_m(t, y)\mu(t, y)$ є розв'язком задачі Діріхле

$$(L_4 W_m)(t, y) \equiv \left[D_t - \sum_{ij=1}^n d(\beta_i + \beta_j; P_1) a_{ij}(P_1) D_{y_i} D_{y_j} \right] W_m =$$

$$= \sum_{ij=1}^n d(\beta_i + \beta_j; P_1) a_{ij}(P_1) \{ [D_{y_i} \omega_m D_{y_j} \mu + D_{y_j} \omega_m D_{y_i} \mu] + \omega_m D_{y_i} D_{y_j} \mu \} +$$

$$+ \omega_m D_t \mu + F_1(t, Y) \mu(t, y) \equiv F_2(t, y), \quad (20)$$

$$W_m(0, y) = \Phi(Y) \mu(0, y) \equiv \varphi_2(y), \quad W_m|_{\Gamma} = 0, \quad (21)$$

де

$$\mu(t, y) = \begin{cases} 1, & (t, y) \in H_{1/2}, \quad |D_t^j D_y^k \mu(t, y)| \leq c_{kj} d^{-1}((2j + |k|)\gamma; P_1); \\ 0, & (t, y) \notin H_{3/4}, \quad 0 \leq \mu(t, y) \leq 1, \end{cases}$$

$$H_\eta = \{(t, y) \in Q_0 : |t - t^{(1)}| \leq \eta^2 T_1, |y_i - y_i^{(1)}| \leq \eta d(\gamma; P_1), y_i^{(1)} = d(\beta_i; P_1)x_i^{(1)}\},$$

$$Y = (d^{-1}(\beta_1; P_1)y_1, \dots, d^{-1}(\beta_n; P_1)y_n).$$

Коефіцієнти рівняння (20) обмежені сталими, не залежними від P_1 . Тому, на підставі теореми 5.2 із [5, с. 364], для довільних точок $M_1(\tau^{(1)}, \xi^{(1)}) \in H_{1/4}$ і $M_2(\tau^{(2)}, \xi^{(2)}) \in H_{1/4}$ правильна нерівність

$$d^{-\alpha}(M_1, M_2) |D_\tau^j D_\xi^k \omega_m(M_1) - D_\tau^j D_\xi^k \omega_m(M_2)| \leq c(\|F_2\|_{C^\alpha(H_{1/4})} + \|\varphi_2\|_{C^{2+\alpha}(H_{1/4} \cap \{t=0\})}),$$

де $d(M_1, M_2)$ — параболічна відстань між точками M_1, M_2 , $2j + |k| = 2$.

Використовуючи властивості функції $\mu(t, y)$ і означення простору $C^{2+\alpha}(\gamma, \beta; 0; Q)$, знаходимо

$$E_k \leq c(n^2 \rho^\alpha + \varepsilon^\alpha(n + 2))(\|v_m; \gamma, \beta; 0; V_{3/4}\|_{2+\alpha} + \|F_1; \gamma, \beta; 2\gamma; V_{3/4}\|_\alpha +$$

$$+ \|\Phi; \tilde{\gamma}, \tilde{\beta}; 0; V_{3/4} \cap \{t = 0\}\|_{2+\alpha} + \|v_m\|_0). \quad (22)$$

Одержимо оцінку норми $\|F_1; \gamma, \beta; 2\gamma; V_{3/4}\|_\alpha$. Враховуючи інтерполяційні нерівності, досить оцінити півнорму кожного доданка виразу $F_1(t, x)$. Наприклад,

$$[|a_i D_{x_i} v_m; \gamma, \beta; 2\gamma, V_{3/4}|]_\alpha \leq \sum_{k=1}^n \sup_{\{A_1, B_k, A_2\} \subset V_{3/4}} [d(\gamma - \beta_i; \tilde{A}) |D_{\xi_i} v_m| \{|\tau^{(1)} - \tau^{(2)}|^{-\frac{\alpha}{2}} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times d(\gamma + \beta_i + \alpha\gamma; \tilde{A})|a_i(B_k) - a_i(A_2)| + \sum_{i=1}^n d(\gamma + \beta_i + \alpha(\gamma - \beta_k); \tilde{A})|\xi_k^{(1)} - \xi_k^{(2)}|^{-\alpha} \times \\
& \times |a_i(A_1) - a_i(B_k)|] + \sum_{k=1}^n \sup_{\{A_1, B_k, A_2\} \subset V_{3/4}} [d(\gamma + \beta_i; \tilde{A})|a_i|\{d(\gamma - \beta_i + \alpha\gamma; \tilde{A}) \times \\
& \times |\tau^{(1)} - \tau^{(2)}|^{-\frac{\alpha}{2}}|D_{\xi_i}v_m(B_k) - D_{\xi_i}v_m(A_2)| + \sum_{i=1}^n d(\gamma - \beta_i + \alpha(\gamma - \beta_k); \tilde{A}) \times \\
& \times |\xi_k^{(1)} - \xi_k^{(2)}|^{-\alpha}|D_{\xi_i}v_m(A_1) - D_{\xi_i}v_m(B_k)|\}] \leq c(\|v_m; \gamma, \beta; 0; V_{3/4}\|_2 + \|v_m\|_0).
\end{aligned}$$

Отже, отримуємо оцінку

$$\|F_1; \gamma, \beta; 2\gamma; V_{3/4}\|_\alpha \leq c(\|F; \gamma, \beta; 2\gamma; V_{3/4}\|_\alpha + \|v_m\|_0) + \varepsilon_1\|v_m; \gamma, \beta; 0; V_{3/4}\|_{2+\alpha}, \quad (23)$$

де $\varepsilon_1 = n^2\rho^\alpha + \varepsilon^\alpha$, ρ, ε — довільні числа, $\varepsilon \in (0, 1)$, $\rho \in (0, 1)$.

Підставляючи (23) в (22), одержимо

$$\begin{aligned}
E_k & \leq c(\|F; \gamma, \beta; 2\gamma; V_{3/4}\|_\alpha + \|v_m\|_0) + \varepsilon_2\|v_m; \gamma, \beta; 0; V_{3/4}\|_{2+\alpha} + \\
& + \|\Phi; \tilde{\gamma}, \tilde{\beta}; 0; V_{3/4} \cap \{t = 0\}\|_{2+\alpha},
\end{aligned} \quad (24)$$

$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 + c(n^2\rho^\alpha + \varepsilon^\alpha(n+2))$.

Нехай $|x^1 - y| \leq 2T_2n$ і $|x_n^{(1)} - y_n| < 2T_2$, $y \in \partial D$. Розглянемо кулю $K(R, P)$ радіуса R , $R \geq 4T_2n$, з центром у деякій точці $P \in \Gamma$, яка містить точки $P_1, P_k^{(2)}, B_k$. Використовуючи обмеження на гладкість поверхні ∂D , можна розпрямити $\partial D \cap K(R, P)$ за допомогою взаємно однозначного перетворення $x = \psi(y)$ так, щоб межа $\partial D \cap K(R, P)$ перейшла в площину $y_n = 0$, а область $\Pi \equiv Q \cap K(R, P)$ лежала в півпросторі $y_n \geq 0$, $t \geq 0$.

Вважаємо, що $P_1, B_k, P_k^{(2)}, E_k, d(\gamma; P_1), v_m, T_1, T_2, \Pi$ переходять при цьому перетворенні відповідно в $M_1, N_k, M_2, E_k^{(1)}, d_1(\gamma; M_1), \omega_m, T_1^{(1)}, T_2^{(1)}, \Pi_1$. Позначимо коефіцієнти диференціального виразу L_2 в області Π_1 через k_{ij}, k_i, k_0 . Тоді ω_m є розв'язком задачі

$$\begin{aligned}
& \left[D_t - \sum_{ij=1}^n k_{ij}(M_1)D_{y_i}D_{y_j} \right] \omega_m(t, y) = \sum_{ij=1}^n [k_{ij}(t, y) - k_{ij}(M_1)]D_{y_i}D_{y_j}\omega_m + \\
& + \sum_{i=1}^n k_i(t, y)D_{y_i}\omega_m + (k_0(t, y) - \lambda)\omega_m + F(t, \psi(y)) \equiv F_5(t, y), \\
& \omega_m(0, y) = \Psi(\psi(y)) \equiv \varphi_3(y), \quad \omega_m|_{y_n=0} = 0.
\end{aligned} \quad (25)$$

Зробивши в задачі (25) заміну $\omega_m(t, y) = V_m(t, z)$, де $z_k = d_1(\beta_k; M_1)y_k$, $k \in \{1, \dots, n\}$, одержимо

$$\begin{aligned}
& \left[D_t - \sum_{ij=1}^n d_1(\beta_i + \beta_j; M_1)k_{ij}(M_1)D_{z_i}D_{z_j} \right] V_m = F_5(t, Z), \\
& V_m(0, z) = \varphi_3(Z), \quad V_m|_{z_n=0} = 0,
\end{aligned} \quad (26)$$

де $Z = (d_1^{-1}(\beta_1; M_1)z_1, \dots, d_1^{-1}(\beta_n; M_1)z_n)$.

Повторюючи міркування, проведені при дослідженні задачі (20)–(21), маємо і в цьому випадку оцінку (24). Використовуючи нерівності (24), (16), (15) і вибираючи ρ і ε досить малими, дістанемо нерівність (14). $\square$

Доведення теореми 1. Оскільки

$$\|F_1; \gamma, \beta; 2\gamma; Q\|_\alpha \leq c(\|f; \gamma, \beta; \delta; Q\|_\alpha + \|g\|_{C^{2+\alpha}(\Gamma)}),$$

$$\|\Phi; \tilde{\gamma}, \tilde{\beta}; 0; D\|_{2+\alpha} \leq c(\|\varphi; \tilde{\gamma}, \tilde{\beta}; 0; D\|_{2+\alpha} + \|g\|_{C^{2+\alpha}(\Gamma)}),$$

то, використовуючи нерівність (11), маємо

$$\|v_m; \gamma, \beta; 0; Q\|_{2+\alpha} \leq c(\|f; \gamma, \beta; \delta; Q\|_\alpha + \|\varphi; \tilde{\gamma}, \tilde{\beta}; 0; D\|_{2+\alpha} + \|g\|_{C^{2+\alpha}(\Gamma)}). \quad (27)$$

Права частина нерівності (27) не залежить від m і послідовності $\{V_m^{(0)}\} \equiv \{|v_m(P)|\}$, $\{V_m^{(1)}\} = \{d(\gamma - \beta_i; P)|D_{x_i}v_m(P_1)|\}$, $\{V_m^{(2)}\} = \{d(2\gamma - \beta_i - \beta_j; P)|D_{x_i}D_{x_j}v_m(P)|\}$, $P \in Q$, рівномірно обмежені й одностайно неперервні.

За теоремою Арцели існують підпослідовності $\{V_{m(k)}^{(0)}\}, \{V_{m(j)}^{(1)}\}, \{V_{m(l)}^{(2)}\}$, рівномірно збіжні в Q . Переходячи до границі при $k \rightarrow \infty, j \rightarrow \infty, l \rightarrow \infty$ в задачі (9), (10), одержимо, що $u = ve^{\lambda t} + \tilde{g}$ єдиний розв'язок задачі (1)–(3), $u \in C^{2+\alpha}(\gamma, \beta; 0; Q)$ і правильна оцінка (5). $\square$

Теорема 4. Нехай виконані умови а)–в), $f \in C^\alpha(Q)$. Тоді єдиний розв'язок задачі (1)–(3) в просторі $C^{2+\alpha}(\gamma, \beta; 0; Q)$ визначається інтегралами Стілтєса з борелевою мірою

$$\begin{aligned} u(t, x) = u_1 + u_2 + u_3 \equiv & \int_Q G_1(t, x; d\tau, d\xi) f(\tau, \xi) + \int_D G_2(t, x; d\xi) \varphi(\xi) + \\ & + \int_\Gamma G_3(t, x; d\tau, d_\xi S) g(\tau, \xi) \end{aligned} \quad (28)$$

і для компонент (G_1, G_2, G_3) правильні нерівності

$$\begin{aligned} \left| \int_Q G_1(t, x; d\tau, d\xi) \right| & \leq \|(-A_0(t, x) + \lambda)^{-1}\|_0, \quad \left| \int_D G_2(t, x; d\xi) \right| \leq 1, \\ \left| \int_\Gamma G_3(t, x; d\tau, d_\xi S) \right| & \leq 1. \end{aligned} \quad (29)$$

Доведення. Оскільки $C^\alpha(Q) \subset C^\alpha(\gamma, \beta; 0; Q)$, то для $f \in C^\alpha(Q)$ справджується нерівність $\|f; \gamma, \beta; 0; Q\|_\alpha \leq c\|f\|_{C^\alpha(Q)}$. Отже, враховуючи теорему 1, для розв'язку задачі (1)–(3) отримуємо нерівність

$$\|u; \gamma, \beta; 0; Q\|_{2+\alpha} \leq c(\|f\|_{C^\alpha(Q)} + \|\varphi; \tilde{\gamma}, \tilde{\beta}; 0; D\|_{2+\alpha} + \|g\|_{C^{2+\alpha}(\Gamma)}). \quad (30)$$

Розглянемо $u(t, x)$ при фіксованих (t, x) як лінійний неперервний функціонал $\Phi(f, \varphi, g)$ на нормованому просторі $C_\alpha = C^\alpha(Q) \times C^{2+\alpha}(\tilde{\gamma}, \tilde{\beta}; 0; D) \times C^{2+\alpha}(\Gamma)$ з нормою, яка дорівнює правій частині нерівності (30). Беручи до уваги включення $C_\alpha \subset C$, на підставі теореми Рісса можна вважати, що $u(t, x)$ породжує борелеву міру $G(t, x; Z)$, яка визначена на σ -алгебрі підмножин Z області $\overline{Q}$, включаючи $\overline{Q}$ і всі її відкриті підмножини такі, що

значення функціонала визначається формулою (28). З теореми 2 випливає правильність для розв'язків задачі (1)–(3) нерівностей

$$\|u_1\|_0 \leq \|f e^{-\lambda t} (-A_0 + \lambda)^{-1}\|_0, \quad \|u_2\|_0 \leq \|\varphi\|_0, \quad \|u_3\|_0 \leq \|e^{-\lambda t} g\|_0, \quad (31)$$

де u_1 — розв'язок крайової задачі (1)–(3) при $\varphi \equiv 0$, $g \equiv 0$; u_2 — розв'язок крайової задачі (1)–(3) при $f \equiv 0$, $g \equiv 0$ і u_3 — розв'язок задачі (1)–(3) при $f \equiv 0$, $\varphi \equiv 0$. Підставивши в нерівності (31) відповідно $f \equiv 1$, $\varphi \equiv 1$, $g \equiv 1$, дістанемо нерівності (29). $\square$

Задача оптимального керування. В області $Q = (0, T] \times D$ розглянемо задачу знаходження функцій u і p , на яких функціонал

$$I(p) = \int_0^T dt \int_D F(t, x, u, p) dx \quad (32)$$

досягає мінімуму в класі функцій $p \in V = \{p \in C^\alpha(Q) : \psi_1 \leq p \leq \psi_2\}$, де u є розв'язком крайової задачі

$$(Lu)(t, x) = f(t, x, p), \quad u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u|_\Gamma = g(t, x). \quad (33)$$

Вважатимемо виконаними такі умови:

г) функції $\psi_1 \in C^\alpha(Q)$, $\psi_2 \in C^\alpha(Q)$, $f(t, x, p)$, $F(t, x, u, p)$ визначені відповідно в областях $M_1 = Q \times [\psi_1, \psi_2]$, $M_2 = Q \times \mathbb{R}^1 \times [\psi_1, \psi_2]$, мають гельдерові похідні другого порядку за змінними u і p , які належать як функції від (t, x) до простору $C^\alpha(Q)$.

За умов а)–г) для будь-якого $p \in V$ існує єдиний розв'язок задачі (33) із простору $C^{2+\alpha}(\gamma, \beta; 0; Q)$ і для нього правильна оцінка (5).

Нехай $E_m(t, x, \tau, \xi)$ — функція Гріна однорідної крайової задачі (6), (7) ($g(t, x) \equiv 0$). Тоді, за теоремою 2, правильна нерівність $0 \leq \int_D E_m(t, x, \tau, \xi) d\xi \leq 1$. Позначимо

$$\lambda(t, x) \equiv \int_t^T d\tau \int_D E_m(\tau, \xi, t, x) D_u F(\tau, \xi, u_m, p) d\xi,$$

$$H(u_m, \lambda, p) \equiv F(t, x, u_m, p) + \lambda(t, x) f(t, x, p).$$

Для встановлення існування розв'язку задачі (32), (33) потрібно встановити розв'язність допоміжних задач з гладкими коефіцієнтами.

Розглянемо в області Q задачу про знаходження функцій u_m , p , на яких функціонал

$$I(p) = \int_0^T dt \int_D F(t, x, u_m, p) dx \quad (34)$$

досягає мінімуму в класі функцій $p \in V$, з яких u_m є розв'язком крайової задачі

$$(L_1 u_m)(t, x) = f(t, x, p), \quad u_m|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_m|_\Gamma = g(t, x). \quad (35)$$

Правильні такі теореми.

Теорема 5. Якщо функція $H(u_m, \lambda, p)$ за аргументом p монотонно зростаюча для $p \in V$, то оптимальним є керування $p^{(0)} = \psi_1$ і оптимальний розв'язок задачі (35) $u_m^{(0)}(t, x, p) = u_m^{(0)}(t, x, \psi_1(t, x))$.

Якщо функція $H(u_m, \lambda, p)$ за аргументом p монотонно спадає для $p \in V$, то оптимальним є керування $p^{(0)} = \psi_2$ і оптимальний розв'язок задачі (35) $u_m^{(0)}(t, x, p) = u_m^{(0)}(t, x, \psi_2(t, x))$.

Доведення проводиться за схемою доведення теореми 1 із [7].

Теорема 6. Нехай $H(u_m, \lambda, p)$ — немонотонна функція за аргументом p . Для того, щоб керування $p^{(0)}$ і відповідний розв'язок $u_m^{(0)}(t, x, p^{(0)})$ крайової задачі (35) були оптимальними, необхідно і достатньо, щоб виконувались умови:

- 1) функція $H(u_m, \lambda, p)$ за аргументом p має в точці $p = p^{(0)}$ мінімальне значення;
- 2) для довільного вектора $(\mu_1, \mu_2) \neq 0$ і точки $(t, x) \in Q$ виконується нерівність

$$D_{u_m}^2 F(t, x, u_m^{(0)}, p^{(0)})\mu_1^2 + 2D_{p, u_m}^2 F(t, x, u_m^{(0)}, p^{(0)})\mu_1\mu_2 - \lambda(t, x)D_p^2 f(t, x, p^{(0)})\mu_2^2 > 0.$$

Доведення теореми проводиться за схемою доведення теореми 2 з [7].

Пояснимо, як знаходяться $u_m^{(0)}$ і $p^{(0)}$. Якщо $p^{(0)}$ — оптимальне, то $D_p H = 0$ і $D_p^2 H > 0$. Застосовуючи теорему про неявні функції до рівняння $D_p H(u_m, \lambda, p^{(0)}) = 0$, одержимо $p^{(0)} = W(u_m^{(0)}, \lambda)$ і $W(u_m^{(0)}, \lambda)$ диференційовна функція за змінними $\lambda, u_m^{(0)}$.

Використовуючи функцію Гріна однорідної крайової задачі (6), (7), у відповідність задачі (34)–(35) поставимо систему інтегральних рівнянь

$$\begin{aligned} u_m^{(0)} &= \int_0^t d\tau \int_D E_m(t, x, \tau, \xi) f(\tau, \xi, W(u_m^{(0)}, \lambda)) d\xi + \omega_1, \\ \lambda &= \int_t^T d\tau \int_D E_m(\tau, \xi, t, x) D_{u_m} F(\tau, \xi, u_m^{(0)}, W(u_m^{(0)}, \lambda)) d\xi, \end{aligned} \quad (36)$$

де ω_1 — розв'язок крайової задачі $(L_1 \omega_1)(t, x) = 0$, $\omega_1|_{t=0} = \varphi(x)$, $\omega_1|_{\Gamma} = g(t, x)$.

Розв'язок системи (36) знаходимо методом послідовних наближень. Переходячи до границі в задачі (34), (35) при $m_1 \rightarrow \infty$, $m_2 \rightarrow \infty$, одержимо розв'язок задачі (32), (33).

ЛІТЕРАТУРА

1. Пукальський І.Д. Нелокальна задача Неймана для параболічного рівняння з виродженням // Укр. мат. журн. — 1999. — Т. 51, №9. — С. 1232–1244.
2. Пукальський І.Д. Одностороння нелокальна крайова задача для сингулярних параболічних рівнянь // Укр. мат. журн. — 2001. — Т. 53, №11. — С. 1521–1531.
3. Пукальский И.Д. Задача с кривой производной для неравномерно параболического уравнения // Дифференц. уравнения. — 2001. — Т. 37, №12. — С. 1521–1531.
4. Матійчук М.І. Параболічні сингулярні крайові задачі. — К.: Ін-т математики НАН України, 1999. — 176 с.
5. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уралыцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967. — 736 с.

6. Эйдельман С.Д. Параболические системы.— М: Наука, 1964.— 444 с.
7. Пукальський І.Д. *Функція Гріна параболічної крайової задачі і задача оптимізації* // Укр. мат. журн.— 2000.— 52, №4.— С. 567–571.

Чернівецький національний університет ім. Ю.Федьковича

Надійшло 18.05.2004

Після переробки 21.09.2004