

УДК 517.5

Е. Ю. Леончик, Н. А. Малаксиано

ОБ ОДНОЙ МАКСИМАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ, СВЯЗАННОЙ С УСЛОВИЕМ МАКЕНХАУПТА*

Ye. Yu. Leonchik, N. A. Malaxiano. *On a maximal function related to Muckenhoupt's condition*, Matematychni Studii, **23** (2005) 143–148.

We introduce the maximal function which is connected with the Muckenhoupt A_1 condition. The estimate for the equimeasurable rearrangement is obtained in terms of this maximal function. In particular, this estimate allows us to obtain the well-known Muckenhoupt lemma. The connection between boundedness of such maximal function and continuity of the initial function is investigated as well.

Е. Ю. Леончик, Н. А. Малаксиано. *Об одной максимальной функции, связанной с условием Макенхаупта* // Математичні Студії. – 2005. – Т.23, №2. – С.143–148.

Рассматривается максимальная функция, измеряющая локальную гладкость, которая связана с условием Макенхаупта A_1 . В терминах этой функции получена поточечная оценка равноизмеримой перестановки, из которой, в частности, вытекает одна известная лемма Макенхаупта. Также исследуется связь между ограниченностью такой максимальной функции и непрерывностью исходной функции.

1. Введение. Пусть положительная функция $f \in L(Q_0)$ отделена от нуля на единичном кубе $Q_0 \subset \mathbb{R}^d$, то есть $|Q_0| = 1$ и $\operatorname{ess\,inf}_{x \in Q_0} f(x) > 0$ (здесь и в дальнейшем рассматриваются только такие кубы, стороны которых параллельны координатным осям, а через $|\cdot|$ обозначена мера Лебега). Говорят, что f удовлетворяет условию Макенхаупта A_1 при некотором $C > 1$ ($f \in A_1(C)$), если для всех кубов $Q \subset Q_0$ выполнено неравенство $f_Q / \operatorname{ess\,inf}_{x \in Q} f(x) \leq C$, где $f_Q = |Q|^{-1} \int_Q f(y) dy$ (см. [1]). Это условие играет важную роль в теории весовых пространств и теории квазиконформных отображений. Одно из основных свойств функций из A_1 содержится в следующей лемме.

Лемма А (Макенхаупт, [1]). Пусть $f \in A_1(1+B)$. Тогда найдется такое $p_0 = p_0(B, d) > 1$, что $f \in L^p(Q_0)$ при любом $p < p_0$, причем $p_0 \rightarrow +\infty$ при $B \rightarrow +0$.

Другими словами, функция из A_1 допускает повышение показателя суммируемости. Кроме того, если

$$\xi(f, \delta) = \sup_{|Q| \leq \delta} \left(\frac{f_Q}{\operatorname{ess\,inf}_{x \in Q} f(x)} - 1 \right) \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow +0,$$

2000 *Mathematics Subject Classification*: 26D10, 46E30.

*Работа частично поддержана ДФФД, грант $\Phi 7/329-2001$.

Keywords: maximal function, Muckenhoupt condition, equimeasurable condition

doi:10.30970/ms.23.2.143-148

© Е. Ю. Леончик, Н. А. Малаксиано, 2005

то из леммы А сразу вытекает, что $f \in L^p(Q_0)$ для всех $p \geq 1$. Ниже, в следствии 2 приведено уточнение этого свойства с учетом скорости стремления к нулю величины $\xi(f, \delta)$ при $\delta \rightarrow +0$.

Рассмотрим следующую максимальную функцию

$$m_\eta(f, x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{\eta(|Q|)} \left(\frac{f_Q}{\operatorname{ess\,inf}_{y \in Q} f(y)} - 1 \right),$$

где η — модуль непрерывности или $\eta \equiv 1$, а верхняя грань берется по всем кубам $Q \subset Q_0$, содержащим точку x . Через $M^\eta(B)$ определим класс функций, для которых $\|m_\eta(f, \cdot)\|_\infty \leq B$, и будем писать $M^1(B)$ при $\eta \equiv 1$. Максимальная функция $m_\eta(f, \cdot)$ связана с условием Макенхаупта A_1 , поскольку из определения классов $M^1(B)$ и $A_1(1+B)$ сразу вытекает их совпадение.

Невозрастающей равноизмеримой перестановкой функции f называют

$$f^*(t) = \sup_{|E|=t} \inf_{x \in E} f(x), \quad 0 < t \leq |Q_0| = 1,$$

где верхняя грань берется по всем измеримым множествам $E \subset Q_0$ с мерой $|E| = t$. Благодаря свойствам монотонности и равноизмеримости, перестановки широко используются в различных вопросах теории функций.

Основным результатом этой статьи является поточечная оценка перестановки f^* через $m_\eta(f, \cdot)$ (см. п.2). Из этой оценки, в частности, следует лемма А. Далее, в п.3 установлена связь между классами функций $M^\eta = \bigcup_{B>0} M^\eta(B)$ и классами Гельдера H^ω .

Авторы глубоко благодарны А. А. Кореновскому за постановку задач и постоянное внимание к работе.

2. Поточечная оценка перестановки. Обозначим

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds, \quad 0 < t \leq |Q_0| = 1.$$

Очевидно, что $f^{**}(t) \geq f^*(t)$ для всех $t \in (0; 1]$ и $f^{**}(1) = f_{Q_0}$. Кроме того, f^{**} абсолютно непрерывна на $[\varepsilon; 1]$ при любом $\varepsilon \in (0; 1)$.

Теорема 1. Пусть $f \in L(Q_0)$ и $\operatorname{ess\,inf}_{x \in Q_0} f(x) > 0$, $Q_0 \subset \mathbb{R}^d$. Тогда для любого $t \in (0; 1]$ справедливо неравенство

$$f^{**}(t) \leq f_{Q_0} \exp \left(\int_t^1 \left(1 - \frac{1}{1 + c m_\eta^*(f, s) \eta(s)} \right) \cdot \frac{ds}{s} \right), \quad (1)$$

где постоянная c зависит только от d .

Для доказательства теоремы 1 понадобится следующая лемма о покрытии.

Лемма В ([2]). Для любого измеримого множества $E \subset Q_0$ и числа $\rho \in (|E|; 1)$ найдется не более, чем счетное семейство подкубов $Q_k \subset Q_0$ ($k \in \{1, 2, \dots\}$) с такими свойствами:

- i) $|Q_k \cap E| = \rho |Q_k|$, $k \in \{1, 2, \dots\}$;

- ii) каждая точка из Q_0 принадлежит не более, чем $N = N(d)$ кубам семейства $\{Q_k\}$;
iii) почти каждая точка из E принадлежит объединению $\bigcup_{k \geq 1} Q_k$.

Основная часть доказательства теоремы 1 содержится в следующей лемме.

Лемма 1. Пусть $f \in L(Q_0)$ и $\operatorname{ess\,inf}_{x \in Q_0} f(x) > 0$. Тогда для всех $t \in (0; 1]$ справедливо неравенство

$$\frac{f^{**}(t)}{f^*(t)} \leq 1 + c m_\eta^*(f, t) \eta(t), \quad (2)$$

где $c = 4N$, а N — постоянная из леммы В.

Доказательство. Зафиксируем $t \in (0; 1]$ и обозначим

$$F_1 = \{x \in Q_0 : f(x) > f^*(t)\}, \quad F_2 = \{x \in Q_0 : m_\eta(f, x) > m_\eta^*(f, t)\}, \quad E = F_1 \cup F_2.$$

Ясно, что $|E| \leq 2t$. Сначала рассмотрим случай $|E| < 1$. Для произвольного $\rho \in (|E|; 1)$, применив лемму В к множеству E , найдем семейство кубов $\{Q_k\}$ со свойствами i)–iii). Для любого k из определения $m_\eta(f, \cdot)$ имеем

$$f_{Q_k} \leq [1 + \eta(|Q_k|) m_\eta(f, x_0)] \operatorname{ess\,inf}_{x \in Q_k} f(x), \quad (3)$$

где x_0 любая точка из Q_k . Возьмем $x_0 \in Q_k \setminus F_2$. Такая точка x_0 существует, поскольку, в силу i),

$$|Q_k \setminus F_2| \geq |Q_k \cap cE| = (1 - \rho)|Q_k| > 0$$

(cE — дополнение множества E в Q_0). Тогда, из (3) получаем, что

$$f_{Q_k} \leq [1 + \eta(|Q_k|) m_\eta^*(f, t)] \operatorname{ess\,inf}_{x \in Q_k} f(x). \quad (4)$$

Кроме того, $\operatorname{ess\,inf}_{y \in Q_k} f(y) \leq f^*(t)$, поскольку из i) следует, что

$$|Q_k \setminus F_1| \geq |Q_k \cap cE| = (1 - \rho)|Q_k| > 0.$$

Поэтому из (4), в силу равноизмеримости функции f и ее перестановки f^* , получаем

$$\begin{aligned} t(f^{**}(t) - f^*(t)) &= \int_{F_1} (f(x) - f^*(t)) dx \leq \\ &\leq \sum_k \int_{F_1 \cap Q_k} (f(x) - f^*(t)) dx \leq \sum_k \int_{Q_k} (f(x) - \operatorname{ess\,inf}_{y \in Q_k} f(y)) dx \leq \\ &\leq m_\eta^*(f, t) \sum_k |Q_k| \eta(|Q_k|) \operatorname{ess\,inf}_{y \in Q_k} f(y) \leq m_\eta^*(f, t) f^*(t) \sum_k |Q_k| \eta(|Q_k|). \end{aligned} \quad (5)$$

Для оценки суммы справа в (5), в силу свойства i) и ii), находим

$$\sum_k |Q_k| \eta(|Q_k|) \leq \eta(|E|) \sum_k |Q_k| = \frac{1}{\rho} \eta(|E|) \sum_k |Q_k \cap E| \leq \frac{N}{\rho} \eta(|E|) |E| \leq \frac{4N}{\rho} \eta(t) t.$$

Окончательно, из (5) имеем

$$f^{**}(t) - f^*(t) \leq \frac{4N}{\rho} m_\eta^*(f, t) \eta(t) f^*(t),$$

а учитывая произвольность $\rho \in (|E|; 1)$, получаем (2).

Теперь пусть $|E| = 1$. Тогда

$$t(f^{**}(t) - f^*(t)) \leq f_{Q_0} - \operatorname{ess\,inf}_{x \in Q_0} f(x) \leq \eta(1) \inf_{y \in Q_0} m_\eta(f, y) \operatorname{ess\,inf}_{x \in Q_0} f(x).$$

Отсюда, поскольку $|E| = 1 \leq 2t$, находим

$$f^{**}(t) - f^*(t) \leq 2\eta(2t)m_\eta^*(f, t)f^*(t).$$

Следовательно, (2) имеет место при $N = 1$. Лемма доказана. $\square$

Доказательство теоремы 1. Для почти всех $t \in (0; 1)$ справедливо

$$(f^{**})'(t) = -\frac{1}{t^2} \int_0^t f^*(s) ds + \frac{1}{t} f^*(t) = -\frac{f^{**}(t) - f^*(t)}{t}. \quad (6)$$

Поскольку $f^{**}(t)$ для каждого $\varepsilon \in (0; 1)$ абсолютно непрерывна и отделена от нуля на промежутке $[\varepsilon, 1]$, то $\ln f^{**}(t)$ абсолютно непрерывна на $[\varepsilon, 1]$ и

$$-\int_t^1 \frac{(f^{**})'(s)}{f^{**}(s)} ds = -\int_t^1 (\ln f^{**}(s))' ds = \ln \frac{f^{**}(t)}{f^{**}(1)}.$$

Откуда, используя (6), находим

$$f^{**}(t) = f^{**}(1) \exp \left(\int_t^1 \frac{f^{**}(s) - f^*(s)}{f^{**}(s)} \cdot \frac{ds}{s} \right).$$

Отсюда, в силу (2), получаем неравенство (1), что и требовалось доказать. $\square$

Из теоремы 1 следует, что функция $f \in M^1(B)$, допускает повышение показателя суммируемости.

Следствие 1. Пусть $f \in M^1(B)$. Тогда $f \in L^p(Q_0)$ для любого $p < 1 + (4BN)^{-1}$, где $N = N(d)$ — постоянная из леммы B.

Доказательство. Для всех $t \in (0; 1]$ из (2) имеем

$$f^{**}(t) \leq f_{Q_0} \exp \left(\int_t^1 \left(1 - \frac{1}{1 + 4BN} \right) \cdot \frac{ds}{s} \right) = f_{Q_0} \frac{1}{t^{1 - \frac{1}{1 + 4BN}}}.$$

Значит, $f^{**} \in L^p([0; 1])$, и тогда $f \in L^p(Q_0)$ при каждом $p < 1 + (4BN)^{-1}$. $\square$

Замечание 1. Как отмечалось во введении, $M^1(B) = A_1(1 + B)$. Таким образом, из следствия 1, немедленно получаем утверждение леммы A.

3. Связь между классами функций M^η и H^ω . Обозначим через K множество всех модулей непрерывности. Говорят, что непрерывная функция f удовлетворяет условию

Гельдера при некотором $\omega \in K$ ($f \in H^\omega$), если $|f(x) - f(y)| \leq C\omega(|x - y|)$ для всех $x, y \in Q_0$, где $C = C(f)$. В этом параграфе рассмотрено вложение M^η в класс Гельдера H^ω . Легко видеть, что при любом $\eta \in K$ справедливо включение $H^\eta \subset M^\eta$. Но обратное утверждение, как показывает следующий пример, вообще говоря, не верно.

Пример 1. Пусть $f(x) = \ln x^{-1}$, $0 < x \leq e^{-1}$. Тогда $f_{[0;y]} = f(y) + 1$ и $f_{[0;y]}/f(y) - 1 = f^{-1}(y)$, $0 < y \leq e^{-1}$. Значит, $f \in M^\eta(1)$ при $\eta(\delta) = \ln^{-1} \delta^{-1}$, $0 < \delta \leq e^{-1}$, но, очевидно, $f \notin H^\eta$.

Кроме того, если $\eta, \omega \in K$ и $\eta(\delta) = o(\omega(\delta))$, $\delta \rightarrow +0$, то найдется такая функция g , что $g \in H^\omega$ и $g \notin M^\eta$. Приведем соответствующий пример.

Пример 2. Пусть $g(x) = 1 + \omega(x)$, $0 \leq x \leq 1$, и $\eta(\delta) = o(\omega(\delta))$, $\delta \rightarrow +0$. Ясно, что $g \in H^\omega$. С другой стороны,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta(y)} \left(\frac{g_{[0;y]}}{\operatorname{ess\,inf}_{x \in [0;y]} g(x)} - 1 \right) &= \frac{1}{y\eta(y)} \int_0^y \omega(x) dx \geq \frac{1}{y\eta(y)} \int_{y/2}^y \omega(x) dx \geq \\ &\geq \frac{1}{2\eta(y)} \cdot \omega\left(\frac{y}{2}\right) \geq \frac{\omega(y)}{4\eta(y)} \rightarrow +\infty, \quad y \rightarrow +0, \end{aligned}$$

так что $g \notin M^\eta$.

В связи с рассмотренными выше примерами возникает вопрос: при каких условиях имеет место вложение $M^\eta \subset H^\omega$? Ответ дает следующая теорема.

Теорема 2. Пусть $f \in M^\eta$, где $\eta \in K$ такова, что

$$\int_0^1 \eta(s) \cdot \frac{ds}{s} < +\infty. \quad (7)$$

Тогда f эквивалентна некоторой функции из H^ω , где

$$\omega(\delta) = \int_0^\delta \eta(s) \cdot \frac{ds}{s}, \quad 0 \leq \delta \leq 1. \quad (8)$$

Обозначим

$$\mu(f, \delta) = \sup_{|Q|=\delta} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q| dx, \quad 0 < \delta \leq 1,$$

где верхняя грань берется по всем кубам $Q \subset Q_0$ меры δ . Прежде, чем перейти к доказательству теоремы 2 отметим, что поведение величины $\mu(f, \cdot)$ тесно связано с существенной непрерывностью функции f . Именно, справедлива следующая теорема.

Теорема А (Спанне, [3]). Пусть $f \in L(Q_0)$ такова, что

$$\int_0^1 \mu(f, s) \cdot \frac{ds}{s} < +\infty.$$

Тогда f эквивалентна некоторой непрерывной функции g и

$$\omega(g, \delta) \leq c_0 \int_0^\delta \mu(f, s) \cdot \frac{ds}{s}, \quad 0 < \delta \leq 1,$$

где постоянная c_0 зависит только от d .

Доказательство теоремы 2. Сначала докажем, что из условия (7) вытекает существенная ограниченность f . Из неравенства (1) имеем

$$f^{**}(+0) \leq f_{Q_0} \exp \left(\int_0^1 \frac{cB}{1 + cB\eta(s)} \cdot \frac{\eta(s)ds}{s} \right).$$

Отсюда, учитывая (7), получаем, что $f^{**}(+0) < +\infty$, а это равносильно существенной ограниченности функции f . Теперь для произвольного куба $Q \subset Q_0$ получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q| dx &= \frac{2}{|Q|} \int_{\{f < f_Q\}} (f_Q - f(x)) dx \leq 2(f_Q - \operatorname{ess\,inf}_{x \in Q} f(x)) \leq \\ &\leq 2B\eta(|Q|) \operatorname{ess\,inf}_{x \in Q} f(x) \leq 2B \operatorname{ess\,sup}_{x \in Q_0} f(x) \eta(|Q|). \end{aligned}$$

Отсюда $\mu(f, \delta) \leq C(f)\eta(\delta)$, $0 < \delta \leq 1$. Следовательно, в силу теоремы А, последнее неравенство гарантирует эквивалентность f и некоторой функции из H^ω , где ω определяется равенством (8). Теорема 2 доказана. $\square$

Замечание 2. Из теоремы 2, в частности, следует, что при $\eta(t) = t^\alpha$ ($0 < \alpha \leq 1$) класс функций M^η можно отождествить с H^η .

Если положительная функция f такова, что $\xi(f, \cdot) \in K$, то, очевидно, что $f \in M^\xi(1)$. Таким образом, из теоремы 2 сразу вытекает следующее утверждение.

Следствие 2. Пусть $f \in L(Q_0)$ и $\xi(f, \cdot) \in K$, причем

$$\int_0^1 \xi(f, s) \cdot \frac{ds}{s} < +\infty.$$

Тогда f эквивалентна некоторой функции из H^ω , где

$$\omega(\delta) = \int_0^\delta \xi(f, s) \cdot \frac{ds}{s}, \quad 0 \leq \delta \leq 1.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Muckenhoupt B. *Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1972. – V. 165. – P. 207–226.
2. Mateu J., Mattila P., Nicolau A., Orobitg J. *BMO for nondoubling measure* // Duke Math. J. – 2000. – V. 102, no. 3. – P. 533–565.
3. Spanne S. *Some function spaces defined using the mean oscillation over cube* // Ann. Sc. norm. super. Pisa. – 1965. – V. 19, no. 4. – P. 593–608.

Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова

Поступило 29.09.2004