УДК 519.21

С. І. Гуран, Б. І. Копитко

ОДНОВИМІРНА МОДЕЛЬ ДИФУЗІЇ З ЧАСТКОВИМ ВІДБИТТЯМ І ЗАТРИМКОЮ У ФІКСОВАНІЙ ТОЧЦІ

S. I. Guran, B. I. Kopytko. *One dimensional diffusion model with partial reflection and delay at a fixed point*, Matematychni Studii, **23** (2005) 103–107.

With the aid of analytic methods, we construct an operator semigroup that describes a diffusion process with varying coefficients on a line that possesses the property of delay and partial reflection at some fixed point.

С. И. Гуран, Б. И. Копытко. *Одномерная модель диффузии с частичным отражением и задержкой в фиксированной точке* // Математичні Студії. – 2005. – Т.23, №1. – С.103–107.

С помощью аналитических методов построена полугруппа операторов, описывающая диффузионный процесс с переменными коэффициентами на прямой, который обладает в некоторой фиксированной точке свойством задержки и частичного отражения.

Нехай в областях $D_1 = \{x \in \mathbb{R}^1 : x < 0\}$ і $D_2 = \{x \in \mathbb{R}^1 : x > 0\}$ заданий *необривний дифузійний процес*, що описується твірним диференціальним оператором

$$L = \frac{1}{2}b(x)\frac{d^2}{dx^2} + a(x)\frac{d}{dx}, \quad x \in D_i,\ i \in \{1,2\}, \tag{1}$$

де $b(x)$ та $a(x)$ – обмежені неперервні функції на $\overline{D_i} = D_i \cup \{0\}$, $i \in \{1,2\}$, $b(x) \geqslant 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}^1$. Вважаються заданими також три дійсні невід'ємні числа σ, q_1, q_2 ($\sigma + q_1 + q_2 > 0$), які будуть використані для характеризації процесу в точці $x = 0$.

Ставиться задача побудувати напігрупу операторів T_t, $t \geqslant 0$, яка б описувала достатньо загальний клас процесів Феллера на прямій, для яких твірний оператор в D_i, $i \in \{1,2\}$, збігається з L. Дану задачу ще називають *задачею про склеювання двох дифузійних процесів на прямій* ([1], [2]). У нашій статті ця задача вивчається за допомогою аналітичних методів. Це означає, що шукана напігрупа операторів визначається для кожної обмеженої вимірної функції $\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}^1$, через розв'язок $U(t,x)$ наступної задачі спряження для параболічного рівняння другого порядку з розривними коефіцієнтами:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = LU, \quad t > 0, x \in D_i,\ i \in \{1,2\}, \tag{2}$$

$$U(0,x) = \varphi(x), \quad x \in D_i,\ i \in \{1,2\}, \tag{3}$$

$$U(t,0-) = U(t,0+), \quad t \geqslant 0, \tag{4}$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 60J60.

$$\sigma\frac{\partial U(t,0)}{\partial t}=-q_1\frac{\partial U(t,0-)}{\partial x}+q_2\frac{\partial U(t,0+)}{\partial x}, t>0. \tag{5}$$

Зауважимо, що виконання для $T_t\varphi(x)$ рівняння (2) та початкової умови (3) означає, що в точках областей D_i, $i\in\{1,2\}$, шукані процеси будуть дифузійними і керуватимуться оператором L, умова (4) відповідає властивості феллеровості процесу, а рівність (5) означає, що серед можливих продовжень процесу після його попадання в точку $\{0\}$ може бути затримка ($\sigma\neq 0$), відбиття в область, з якої процес вийшов, або проникнення в іншу область ($q_1+q_2\neq 0$). Нагадаємо ([3]), що найбільш загальна гранична умова для одновимірних дифузійних процесів містить, крім відзначених в (5), також доданки, що відповідають за можливість обриву процесу та розривів його траекторій в точці $\{0\}$.

У даній статті задача (2)—(5) досліджується в припущенні, що виконується умова

$$\sigma>0, q_1\geqslant 0, q_2\geqslant 0. \tag{6}$$

Для її розв'язання застосовується метод теорії потенціалу. Відзначимо, що раніше в [1] (див. також [2])тим самим методом вивчалася задача про склеювання двох дифузійних процесів на прямій для випадку, коли в (5) параметр $\sigma=0$. Там було доведено, що побудований процес можна характеризувати як узагальнений дифузійний процес в розумінні М. І. Портенка ([2]). Крім того, у [2] вказано, як із узагальненого дифузійного процесу з частковим відбиттям, який є результатом склеювання двох процесів броунівського руху на прямій можна отримати дифузійний процес з затримкою, використовуючи випадкову заміну часу. Зауважимо також, що відповідь на питання про класичну розв'язність задачі (2)—(5) можна отримати, виходячи із загальної теорії для параболічних початково-крайових задач (див., наприклад, [4], [5]).

Додатково припускаємо, що для коефіцієнтів оператора L з (1) виконані умови:

а) $\lambda_0\leqslant b(x)\leqslant\lambda_1$, $\lambda_0,\lambda_1>0$, для всіх $x\in\mathbb{R}^1$;

б) $b,a\in H^\alpha(\mathbb{R}^1)$, $0<\alpha<1$, де $H^\alpha(\mathbb{R}^1)$ — простір Гельдера (означення гельдерових просторів функцій див. [6, С. 16]).

Умови а), б) забезпечують існування фундаментального розв'язку (ф.р.) для рівняння (2) (див. [6, 2]), який надалі позначатимемо через $g(t,x,y)$ ($t>0$, $x,y\in\mathbb{R}^1$).

Встановимо класичну розв'язність задачі (2)—(5) в гельдеровому просторі функцій $H^{1+\alpha/2,\,2+\alpha}([0,T]\times\overline{D_i})$, $i\in\{1,2\}$, припускаючи, що початкова функція φ з (3) є достатньо гладкою на $\mathbb{R}^1$ і для неї виконана умова узгодження

$$\sigma L\varphi(x)=(q_2-q_1)\varphi'(0). \tag{7}$$

Теорема 1. *Нехай для коефіцієнтів оператора L та параметрів σ, q_1, q_2 виконані умови відповідно а), б) та (6). Тоді за будь-якої початкової функції $\varphi\in H^{2+\alpha}(\mathbb{R}^1)$, що задовольняє умову узгодження (7), параболічна задача спряження (2)—(5) має єдиний розв'язок*

$$U\in H^{1+\alpha/2,\ 2+\alpha}([0,T]\times\overline{D_i}),\quad i\in\{1,2\}, \tag{8}$$

для якого справджується оцінка

$$\sum_{i=1}^{2}||U||_{H^{1+\alpha/2,\,2+\alpha}([0,T]\times\overline{D_i})}\leqslant C||\varphi||_{H^{2+\alpha}(\mathbb{R}^1)}, \tag{9}$$

і цей розв'язок можна представити у вигляді

$$U(t,x)=\int_{\mathbb{R}^1}g(t,x,y)\varphi(y)dy+\int_0^t g(t-\tau,x,0)V(\tau)d\tau, t>0, x\in D_i,\ i\in\{1,2\}, \tag{10}$$

де V — розв'язок деякого інтегрального рівняння Вольтерри другого роду.

Доведення. Розв'язок задачі (2)—(5) шукаємо у вигляді (10) з невідомою щільністю V у потенціалі простого шару. Позначимо перший доданок в (10) через $U_0(t,x)$ і припустимо a priori, що $V \in \underset{0}{H}^{\alpha/2}([0,T])$ (через $\underset{0}{H}^{\alpha/2}([0,T])$ позначається множина функцій з гельдерового простору $H^{\alpha/2}([0,T])$, які перетворюються в нуль при $t=0$). Використовуючи співвідношення про стрибок конормальної похідної від потенціалу простого шару ([6, гл. IV, § 15], [2, гл. II, § 5]), після підстановки (10) в (5) отримаємо рівність

$$\frac{\partial U(t,0)}{\partial t} = \frac{q_2-q_1}{\sigma}\frac{\partial U_0(t,0)}{\partial x} - \frac{q_1+q_2}{\sigma}\frac{V(t)}{b(0)} + \frac{q_2-q_1}{\sigma}\int_0^t \frac{\partial g_1(t-\tau,0,0)}{\partial x}V(\tau)d\tau.$$

Звідси, враховуючи початкову умову (3), знаходимо

$$U(t,0) = \frac{q_2-q_1}{\sigma}\int_0^t \frac{\partial U_0(s,0)}{\partial x}ds - \frac{q_1+q_2}{\sigma}\int_0^t V(s)ds +$$
$$+\frac{q_2-q_1}{\sigma}\int_0^t V(s)\left(\int_s^t \frac{\partial g_1(\beta-s,0,0)}{\partial x}d\beta\right)ds + \varphi(0). \tag{11}$$

Прирівнюючи між собою праві частини співвідношень (10), де треба покласти $x=0$, та (11), одержимо інтегральне рівняння Вольтерри першого роду відносно V

$$\int_0^t g(t-s,0,0)V(s)ds + \frac{q_1+q_2}{\sigma b(0)}\int_0^t V(s)ds +$$
$$+\frac{q_2-q_1}{\sigma}\int_0^t V(s)\left(\int_s^t \frac{\partial g_1(\beta-s,0,0)}{\partial x}d\beta\right)ds = \psi(t), \tag{12}$$

де

$$\psi(t) = \frac{q_2-q_1}{\sigma}\int_0^t \frac{\partial U_0(s,0)}{dx}ds - \int_{\mathbb{R}^1} g(t,0,y)(\varphi(y)-\varphi(0))dy.$$

За допомогою прийому Гольмгрена (див., наприклад, [7]) приведемо це рівняння до інтегрального рівняння Вольтерри другого роду. Для цього вводиться оператор $\mathcal{E}$, що діє за правилом

$$\mathcal{E}(t)\psi = \frac{d}{dt}\int_0^t (t-\tau)^{-1/2}\psi(\tau)d\tau, \quad t>0.$$

Відомо (див. [8], [9]), що $\mathcal{E}$ — обмежений оператор з $\underset{0}{H}^{(1+\alpha)/2}([0,T])$ в $\underset{0}{H}^{\alpha/2}([0,T])$, який має обмежений обернений. Застосування $\mathcal{E}$ до обох частин рівняння (12) перетворює це рівняння в еквівалентне рівняння Вольтерри другого роду

$$V(t) + \int_0^t K(t-\tau)V(\tau)d\tau = f(\tau), \quad t>0, \tag{13}$$

де

$$f(t) = \sqrt{\frac{2b(0)}{\pi}}\mathcal{E}(t)\psi,$$

а для ядра K справедлива оцінка

$$K(t-\tau) = C(t-\tau)^{-1+\alpha/2}, \quad 0 \leqslant \tau < t \leqslant T, \quad C \text{ — деяка стала}, C>0.$$

Якщо φ задовольняє умови теореми, то $\varphi \in \underset{0}{H}^{(1+\alpha)/2}([0,T])$, $f \in \underset{0}{H}^{\alpha/2}([0,T])$, і єдиний розв'язок рівняння (13) знаходиться методом послідовних наближень. При цьому $V(t)$ неперервна для $t \geqslant 0$, і $V \in \underset{0}{H}^{\alpha/2}([0,T])$. Отже, наше припущення a priori щодо V підтверджено і розв'язок задачі (2)—(5) побудовано.

Для обгрунтування умови (8), оцінки (9) та твердження про єдиність побудованого розв'язку задачі (2)—(5) достатньо лише зауважити, що знайдену функцію $U(t,x)$ в кожній з областей $t>0$, $x \in D_i$, $i \in \{1,2\}$, можна розглядати як розв'язок наступної першої параболічної крайової задачі:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial U}{\partial t}U = LU, \quad t>0, x \in D_i,\ i \in \{1,2\}, \\ &U(0,x) = \varphi(x), \quad x \in D_i,\ i \in \{1,2\}, \\ &U(t,0) = v(t), \quad t>0, \end{aligned}$$

за умов узгодження

$$\varphi(0) = v(0), \quad D_t U(t,0)|_{t=0} = D_t v(t)|_{t=0},$$

де функція $v(t)$ визначається правою частиною співвідношення (11), до того ж $v \in H^{1+\alpha/2}([0,T])$. Теорему 1 доведено. $\square$

Позначимо через $\mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$ банахів простір обмежених вимірних функцій з нормою $||\varphi|| = \sup_x |\varphi(x)|$ і визначимо на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$ сім'ю операторів $(T_t)_{t>0}$, за формулами (10), (13). Відзначимо, що і в цьому випадку розв'язок рівняння (13) знаходиться методом послідовних наближень, до того ж функція $V(t)$ неперервна при $t>0$ і справедлива оцінка

$$|V(t)| \leqslant C||\varphi||t^{-1/2}, \quad t \in (0,T], C \text{ — деяка стала}, C>0.$$

Звідси та з відомих оцінок для ф.р. g ([6, гл. IV, § 11]) випливає, що інтеграли у формулі (10) існують та визначають при $t>0$ обмежену вимірну функцію від x. Більше того, діючи за схемою праці [1] (див. також аналогічні результати в [2]), можна довести, що сім'я $(T_t)_{t>0}$, утворює напігрупу операторів у просторі $\mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$. При цьому оператори $T_t, t>0$, неперервні відносно обмеженої поточкової збіжності функцій і залишають інваріантним конус невід'ємних функцій. Крім того, $T_t\varphi_0(x) \equiv 1$ для $\varphi_0(y) \equiv 1$ і $T_t\varphi(x)$ неперервна за x, якщо тільки неперервна і обмежена функція $\varphi(x)$. Це означає (див. [2, гл. 1, § 3]), що напівгрупа операторів в T_t визначає на прямій необривний феллерів процес. Позначимо через $P(t,x,dy)$, $t>0$, $x \in \mathbb{R}^1$ ймовірність переходу цього процесу, так що

$$T_t\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^1} P(t,x,dy)\varphi(y).$$

Нарешті, безпосередньою перевіркою переконуємося в тому, що $P(t,x,dy)$ задовольняє умову

$$\lim_{t\uparrow 0} \sup_{x \in \mathbb{R}^1} \int_{\mathbb{R}^1} |y-x|^4 P(t,x,dy) = 0 \tag{14}$$

і тому отриманий процес є неперервним. Побудований тут процес можна трактувати як дифузійний процес в розумінні А. М. Колмогорова. Такий висновок є наслідком умови (14) та наступних співвідношень

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}^1} (y-x)P(t,x,dy) = \hat{a}(x) = \begin{cases} a(x) & \text{при } x \in D_i,\ i \in \{1,2\}, \\ \dfrac{q_2-q_1}{\sigma} & \text{при } x=0, \end{cases} \tag{15}$$

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}^1}(y-x)^2P(t,x,dy)=\hat{b}(x)=\begin{cases}b(x) & \text{при } x\in D_i,\ i\in\{1,2\},\\ 0 & \text{при } x=0,\end{cases}$$

Отже, доведено наступне твердження.

Теорема 2. *Нехай для коефіцієнтів оператора L з (1) та параметрів σ, q_1, і q_2 з (5) виконані умови теореми 1. Тоді розв'язок параболічної задачі спряження (2)—(5) визначає напівгрупу операторів на просторі $\mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$, яка описує дифузійний процес в $\mathbb{R}^1$, такий, що його ймовірність переходу $P(t,x,dy)$ задовольняє співвідношення (15).*

ЛІТЕРАТУРА

1. Копытко Б. И. *О склеивании двух диффузионных процессов на прямой* // Вероятностные методы бесконечномерного анализа. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1980. – С. 84–101.
2. Портенко М. І. *Процеси дифузії в середовищах з мембранами.* – Київ: Ін-т математики НАН України, 1995. – 200 с.
3. Feller W. *Generalized second order differential operators and their lateral conditions* // Illinois J. Math. – 1957. – V.1. – P. 495—504.
4. Ивасишен С. Д. Матрицы Грина параболических граничных задач. – Киев, Вища школа, 1990. – 200 с.
5. Житарашу Н. В., Эйдельман С. Д. Параболические граничные задачи. – Кишинев: "Штиинца", 1992. – 328 с.
6. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
7. Камынин Л. И. *О существовании решения краевых задач для параболического уравнения с разрывными коэфициентами* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1964. – Т.28, № 4. – С. 721–744.
8. Камынин Л. И. *Приложения параболических потенциалов к краевым задачам математической физики. II* // Диф. уравнения. – 1991. – Т.27, № 4. – С. 627–641.
9. Бадерко Е. А. *О решении первой краевой задачи для параболического уравнения с помощью потенциала простого слоя*// Докл. АН СССР. – 1985. – Т.283, № 1. – С. 11–13.

Львівський національний університет імені Івана Франка

Надійшло 04.07.2004