УДК 517.5

Р. В. Хаць

ПРО КОЕФІЦІЄНТИ ФУР'Є ОДНОГО КЛАСУ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ

R. V. Khats'. *On the Fourier coefficients of one class of entire functions*, Matematychni Studii, **23** (2005) 99–102.

Sufficient conditions under which for the Fourier coefficients $S_m(r; f)$ of entire function f of order $\rho \in (0; +\infty)$ with the indicator h the relation $S_m(r; f) = \gamma_m r^\rho + o(r^{\rho_3})$ $(r \to +\infty)$, $m \in \mathbb{Z}$, where $\gamma_m = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(\varphi)e^{-im\varphi}\, d\varphi$, holds for some $\rho_3 \in (0; \rho)$, are found.

Р. В. Хаць. *О коэффициентах Фурье одного класса целых функций* // Математичні Студії. – 2005. – Т.23, №1. – С.99–102.

Найдены достаточные условия, при выполнении которых для коэффициентов Фурье $S_m(r; f)$ целой функции f порядка $\rho \in (0; +\infty)$ с индикатором h для некоторого $\rho_3 \in (0; \rho)$ имеет место соотношение $S_m(r; f) = \gamma_m r^\rho + o(r^{\rho_3})$ $(r \to +\infty)$, $m \in \mathbb{Z}$, где $\gamma_m = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(\varphi)e^{-im\varphi}\, d\varphi$.

Нехай f — ціла функція, (λ_n) — послідовність її нулів, а

$$S_m(r; f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-im\varphi} \ln|f(re^{i\varphi})|\, d\varphi \ (m \in \mathbb{Z})$$

— коефіцієнти Фур'є $\ln|f(re^{i\varphi})|$. Для простоти вважатимемо, що $f(0) = 1$. Відомо [1, с. 10], що

$$S_m(r; f) = \frac{1}{2}\alpha_m r^m + \frac{1}{2m}\sum_{|\lambda_n| \le r}\left(\left(\frac{r}{\lambda_n}\right)^m - \left(\frac{\overline{\lambda}_n}{r}\right)^m\right) \quad (m \ge 1), \tag{1}$$

$$S_m(r; f) = \overline{S_{-m}(r; f)} \quad (m \le -1), \quad S_0(r; f) = N(r), \quad N(r) = \int\limits_0^r \frac{n(t)}{t}\, dt, \quad n(t) = \sum_{|\lambda_n| \le t} 1,$$

і α_m знаходяться із розвинення

$$\ln f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m z^m, \tag{2}$$

причому $\ln f(z)$ — це однозначна вітка $\mathrm{Ln}\ f(z)$ в околі точки $z = 0$ така, що $\ln f(0) = 0$.

Безпосередньо з означення $S_m(r; f)$ випливає наступне твердження.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 30D15.

Теорема 1. *Нехай f — ціла функція порядку $\rho \in (0; +\infty)$ з індикатором $h(\varphi)$. Якщо для деякого $\rho_1 \in (0; \rho]$ існує послідовність (r_k), $0 < r_k \uparrow +\infty$, для якої рівномірно за $\varphi \in [0; 2\pi)$ виконується*

$$\ln |f(r_k e^{i\varphi})| = r_k^{\rho} h(\varphi) + o(r_k^{\rho_1}) \quad (k \to +\infty), \tag{3}$$

то для кожного $m \in \mathbb{Z}$

$$S_m(r_k; f) = \gamma_m r_k^{\rho} + o(r_k^{\rho_1}) \quad (k \to +\infty), \quad \gamma_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\varphi) e^{-im\varphi}\, d\varphi.$$

Зауважимо, що якщо послідовність (r_k) задовольняє додаткову умову: $r_{k+1}/r_k \to 1$ при $k \to +\infty$, яка рівносильна до співвідношення $r_{k+1}^{\rho} - r_k^{\rho} = o(r_k^{\rho})$ $(k \to +\infty)$, а (3) виконується з $\rho_1 = \rho$, то [2, с. 499] ціла функція f є функцією цілком регулярного зростання і, тому ([1, 3]) $S_m(r; f) = \gamma_m r^{\rho} + o(r^{\rho})$ $(r \to +\infty)$ для кожного $m \in \mathbb{Z}$.

Метою даної статті є доведення наступного твердження, яке пов'язане із задачею про знаходження умов, за яких для цілої функції справедливі тонші асимптотичні оцінки в порівнянні з цілими функціями цілком регулярного зростання ([4, 5]).

Теорема 2. *Нехай f — ціла функція порядку $\rho \in (0; +\infty)$ з індикатором $h(\varphi)$. Тоді, якщо існує послідовність (r_k), $0 < r_k \uparrow +\infty$, для якої при деякому $\rho_1 \in (0; \rho)$ рівномірно за $\varphi \in [0; 2\pi)$ виконується (3) і*

$$r_{k+1}^{\rho} - r_k^{\rho} = o(r_k^{\rho_1}) \quad (k \to +\infty), \tag{4}$$

то існує $\rho_3 \in (0; \rho)$ таке, що $S_m(r; f) = \gamma_m r^{\rho} + o(r^{\rho_3})$ $(r \to +\infty)$ для кожного $m \in \mathbb{Z}$.

Для доведення теореми 2 будуть потрібні наступні допоміжні твердження.

Лема 1. *Якщо для цілої функції f порядку $\rho \in (0; +\infty)$ виконуються умови теореми 2, то для деякого $\rho_1 \in (0; \rho)$*

$$N(r) = \gamma_0 r^{\rho} + o(r^{\rho_1}) \quad (r \to +\infty), \tag{5}$$

де γ_0 визначене вище.

Доведення цієї леми міститься в доведенні леми 2 з [4, с. 142].

Лема 2. *Нехай $\rho \in (0; +\infty)$. Для того, щоб для деякого $\rho_2 \in (0; \rho)$ виконувалось*

$$n(r) = \rho\gamma_0 r^{\rho} + o(r^{\rho_2}) \quad (r \to +\infty), \tag{6}$$

необхідно і достатньо, щоб для деякого $\rho_1 \in (0; \rho)$ виконувалось (5).

Доведення цієї леми міститься в доведенні леми 3 з [4, с. 143].

Лема 3. *Нехай f — ціла функція порядку $\rho \in (0; +\infty)$ і існує така послідовність (r_k), $0 < r_k \uparrow +\infty$, що для деякого $\rho_1 \in (0; \rho)$ виконується (4). Тоді для $r \in [r_k; r_{k+1})$ і деякого $\rho_3 \in (0; \rho)$ виконується*

$$S_m(r; f) - S_m(r_k; f) = o(r^{\rho_3}) \quad (r \to +\infty). \tag{7}$$

Доведення. Нехай ρ — неціле число. Тоді, як відомо [6], ціла функція f, $f(0) = 1$, подається у вигляді

$$f(z) = e^{Q(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{\lambda_n}; p\right),$$

де $Q(z) = \sum\limits_{m=1}^{\nu} Q_m z^m$ — поліном степеня $\nu < \rho$, $p = [\rho]$, і $E(u;p) = (1-u)\exp(u + u^2/2 + \cdots + u^p/p)$. Тому, використовуючи (1) і (2), отримаємо (вважаємо, що $Q_m = 0$, коли $m > \nu$)

$$S_m(r;f) = \frac{1}{2} Q_m r^m + \frac{1}{2m} \sum_{|\lambda_n| \le r} \left(\left(\frac{r}{\lambda_n}\right)^m - \left(\frac{\overline{\lambda}_n}{r}\right)^m \right) \quad (1 \le m \le p), \tag{8}$$

і

$$S_m(r;f) = -\frac{1}{2m} \left(\sum_{|\lambda_n| > r} \left(\frac{r}{\lambda_n}\right)^m + \sum_{|\lambda_n| \le r} \left(\frac{\overline{\lambda}_n}{r}\right)^m \right) \quad (m \ge p+1).$$

Нехай $m \in [1;p]$. Якщо $r \in [r_k; r_{k+1})$, то з (8) отримаємо

$$|S_m(r;f) - S_m(r_k;f)| \le \frac{1}{2m}(r_{k+1}^m - r_k^m) \left(mQ_m + \int\limits_0^{r_k} (t^{-m} + r_k{}^{-2m} t^m)\, dn(t) \right) +$$

$$+ \frac{1}{2m} \int\limits_{r_k}^{r} \left(\left(\frac{r_{k+1}}{t}\right)^m + \left(\frac{t}{r_k}\right)^m \right) dn(t) = I_1 + \frac{1}{2}(r_{k+1}^m - r_k^m)(I_2 + I_3) + I_4 + I_5 + I_6, \tag{9}$$

де

$$I_1 = \frac{1}{2m}(r_{k+1}^m - r_k^m)(mQ_m + 2n(r_k) r_k^{-m}), \quad I_2 = \int\limits_0^{r_k} \frac{n(t)dt}{t^{m+1}}, \quad I_3 = -r_k^{-2m} \int\limits_0^{r_k} t^{m-1} n(t)\, dt;$$

$$I_4 = \frac{1}{2m} \left(n(r) \left(\left(\frac{r_{k+1}}{r}\right)^m + \left(\frac{r}{r_k}\right)^m \right) - n(r_k) \left(\left(\frac{r_{k+1}}{r_k}\right)^m + 1 \right) \right);$$

$$I_5 = \frac{1}{2} r_{k+1}^m \int\limits_{r_k}^{r} \frac{n(t)dt}{t^{m+1}}, \quad I_6 = -\frac{1}{2} r_k^{-m} \int\limits_{r_k}^{r} t^{m-1} n(t)\, dt.$$

Враховуючи (4) і (6), при $k \to +\infty$ отримуємо

$$I_1 = \left(\frac{Q_m}{2} r_k^m + \frac{1}{m} n(r_k) \right) \left(\left(\frac{r_{k+1}^\rho - r_k^\rho}{r_k^\rho} + 1 \right)^{m/\rho} - 1 \right) =$$

$$= \left(\frac{Q_m}{2} r_k^m + \frac{\gamma_0 \rho}{m} r_k^\rho + o(r_k^{\rho_2}) \right) \left(\left(1 + o(r_k^{\rho_1 - \rho})\right)^{m/\rho} - 1 \right) =$$

$$= o(r_k^{m+\rho_1-\rho}) + o(r_k^{\rho_1}) + o(r_k^{\rho_2+\rho_1-\rho}) = o(r_k^{\rho_3}) \quad (\rho_3 < \rho). \tag{10}$$

Крім цього, за умов (4) і (6), при $k \to +\infty$

$$I_4 = \frac{1}{2m} r_{k+1}^m \rho\gamma_0 (r^{\rho-m} - r_k^{\rho-m}) + \frac{1}{2m} r_k^{-m} \rho\gamma_0 (r^{\rho+m} - r_k^{\rho+m}) + o(r_k^{\rho_2}) = o(r_k^{\rho_3}) \quad (\rho_3 < \rho). \quad (11)$$

До того ж, за умови (6), маємо

$$I_2 = \frac{\rho\gamma_0}{\rho - m} r_k^{\rho-m} + o(r_k^{\rho_2 - m}) = O(r_k^{\rho-m}) + o(r_k^{\rho_2-m}) \quad (k \to +\infty), \quad (12)$$

а

$$I_3 = -r_k^{-2m} \left(\frac{\rho\gamma_0}{\rho + m} r_k^{\rho+m} + o(r_k^{\rho_2+m}) \right) = O(r_k^{\rho-m}) + o(r_k^{\rho_2-m}) \quad (k \to +\infty). \quad (13)$$

Подібно, за умов (4) і (6), при $k \to +\infty$

$$I_5 = \frac{\gamma_0\rho}{2(\rho - m)} r_{k+1}^m \left(r^{\rho-m} - r_k^{\rho-m} \right) + o(r_k^{\rho_2}) = o(r_k^{\rho_3}) \quad (\rho_3 < \rho), \quad (14)$$

і

$$I_6 = -\frac{\gamma_0\rho}{2(\rho + m)} r_k^{-m} \left(r^{\rho+m} - r_k^{\rho+m} \right) + o(r_k^{\rho_2}) = o(r_k^{\rho_3}) \quad (\rho_3 < \rho). \quad (15)$$

Об'єднавши (9) – (15), при $r \to +\infty$ одержимо $|S_m(r;f) - S_m(r_k;f)| \le \frac{1}{2}\left(r_{k+1}^m - r_k^m\right) \times \times \left(O(r_k^{\rho-m}) + o(r_k^{\rho_2-m})\right) + o(r_k^{\rho_3}) = o(r^{\rho_3})$ $(\rho_3 < \rho)$. Звідси випливає (7). Випадки $m \ge p+1$ та цілого ρ розглядаються подібно. $\square$

Доведення теореми 2. Оскільки $S_m(r;f) = S_m(r_k;f) + S_m(r;f) - S_m(r_k;f)$, то за теоремою 1 і лемою 3 при деякому $\rho_3 \in (0;\rho)$ справедлива асимптотична оцінка $|S_m(r;f) - \gamma_m r^\rho| \le \gamma_m (r_{k+1}^\rho - r_k^\rho) + o(r^{\rho_3}) = o(r^{\rho_3})$ $(r \to +\infty)$. Звідси випливає потрібне твердження. $\square$

Відзначимо, що нам не вдалося довести обернене твердження до теореми 2.

ЛІТЕРАТУРА

1. Кондратюк А. А. Ряды Фурье и мероморфные функции.– Львов: Выща школа, 1988.– 196 с.
2. Леонтьев А. Ф. *Представление функций рядами обобщенных експонент* // Мат. сб. – 1987. – Т. 134 (176) №4 (12). – С.496–510.
3. Азарин В. С. *О регулярности роста коэффициентов Фурье логарифма модуля целой функции* // Теория функций, функц. анализ и их прилож. (Харьков). – 1977. – Вып. 27. – С.9–21.
4. Винницький Б. В., Хаць Р. В. *Про асимптотичну поведінку цілих функцій нецілого порядку* // Матем. студії. – 2004. – Т. 21, №2. – С.140–150.
5. Хаць Р. В. *Про асимптотичну поведінку коефіцієнтів Фур'є цілих функцій* // X міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука: Матеріали конф. – Київ, 2004. – С. 537.
6. Гольдберг А. А., Островский И. В. Распределение значений мероморфных функций. – М.: Наука, 1970. – 591 с.

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка
Інститут фізики, математики та інформатики
mathanalys@mail.ru

Надійшло 13.05.2004
Після переробки 07.10.2004