УДК 517.947

Л. Баб'як-Білецька, О. Горбачук

ПРЯМА АСИМПТОТИЧНА ЗАДАЧА ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНОГО РІВНЯННЯ З НЕОДНОРІДНОЮ ЧАСТИНОЮ У ВИГЛЯДІ МНОГОЧЛЕНА

L. Babjak-Biletska, O. Horbachuk. *Direct asymptotic problem for evolutionary equation where inhomogeneous part is a polynomial*, Matematychni Studii, **23** (2005) 82–91.

We establish the asymptotic behavior of the solution of an evolutionary equation, where inhomogeneous part is a polynomial.

Л. Бабьяк-Билецкая, О. Горбачук. *Прямая асимптотическая задача для эволюционного уравнения с неоднородной частью в виде многочлена* // Математичні Студії. – 2005. – Т.23, №1. – С.82–91.

Устанавливается асимптотика решения эволюционного уравнения с неоднородной частью в виде многочлена.

1. Розглянемо у банаховому просторі $\mathcal{B}$ неоднорідне еволюційне рівняння першого порядку

$$\frac{dy(t)}{dt} = Ay(t) + f(t), \tag{1}$$

де A — лінійний оператор зі щільною у просторі $\mathcal{B}$ областю визначення $\mathcal{D}(A)$, $f(t)$ — задана сильно неперервна вектор-функція на $[0,\infty)$ зі значеннями у просторі $\mathcal{B}$.

Розв'язком рівняння (1) на проміжку $[0,T)$ будемо називати функцію $y(t)$, яка задовольняє умови:

(a) значення функції $y(t)$ належать до області визначення $\mathcal{D}(A)$ оператора A для всіх $t \in [0,T)$;

(b) у кожній точці t проміжку $[0,T)$ існує сильна похідна $y'(t)$ функції $y(t)$;

(c) рівняння (1) справджується при всіх $t \in [0,T)$.

Під *задачею Коші* на проміжку $[0,T)$ розуміємо задачу про знаходження розв'язку рівняння (1) на $[0,T)$, який задовольняє початкову умову

$$y(0) = y_0 \in \mathcal{D}(A). \tag{2}$$

Сім'я обмежених лінійних операторів $U(t)$, $t \geq 0$, які відображають банахів простір $\mathcal{B}$ в себе, утворює півгрупу, якщо:

2000 *Mathematics Subject Classification:* 46G05.

© Л. Баб'як-Білецька, О. Горбачук, 2005

(a) $U(0)$ — тотожний оператор, тобто $U(0)f = f$ для всіх $f \in \mathcal{B}$;

(b) $U(t_1 + t_2)f = u(t_1) \cdot U(t_2)f = U(t_2) \cdot U(t_1)f$ для всіх $f \in \mathcal{B}$, $t_1, t_2 \geq 0$.

Півгрупу $U(t)$ називаємо *сильно неперервною* у початку координат (або півгрупою класу (C_0) за термінологією Хілле-Філліпса), якщо для довільного $x \in \mathcal{B}$ виконується умова

$$\lim_{t \to +0} U(t)x = x.$$

Нехай $U(t)$ є півгрупою операторів класу (C_0). Визначимо її *твірний оператор* A (генератор або *інфінітезимальний твірний оператор* за термінологією Хілле-Філліпса) за допомогою рівності

$$Ax = \lim_{t \to +0} \frac{U(t)x - x}{t} = U'(0)x,$$

причому x належить до області визначення $\mathcal{D}(A)$ оператора A тоді, коли ця границя існує. Півгрупова властивість дає можливість будувати півгрупу за її генератором.

Нехай $\operatorname{Ker} A = \{x | x \in \mathcal{B}, Ax = 0\}$ — ядро оператора A, а $R(A) = \{Ax | x \in \mathcal{D}(A)\}$ — образ оператора A.

Важливою є наступна теорема (див.[2], т.18.6.2).

Теорема. *Якщо оператор A є генератором обмеженої півгрупи класу (C_0) у рефлексивному банаховому просторі $\mathcal{B}$, то простір $\mathcal{B}$ розкладається на пряму суму ядра* $\operatorname{Ker} A$ *і замикання образу $\overline{R(A)}$ оператора A, тобто $\mathcal{B} = \operatorname{Ker} A \dotplus \overline{R(A)}$.*

Границю за Чезаро першого порядку функції $f(t)\colon \mathbb{R}_+ \to \mathcal{B}$ на нескінченності визначаємо за допомогою рівності (див.[2], с.519)

$$(C,1) \lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int\limits_0^t f(\xi) d\xi.$$

Основні твердження про півгрупи обмежених лінійних операторів і їхній зв'язок з розв'язками неоднорідних еволюційних рівнянь подаються у монографії [2].

2. Дослідимо пряму асимптотичну задачу для неоднорідного еволюційного рівняння (1) у банаховому просторі $\mathcal{B}$, якщо неоднорідна частина цього рівняння є многочленом вигляду

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k,$$

де a_k, $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ — елементи простору $\mathcal{B}$.

Лема 1. *Нехай A — лінійний оператор банаховому просторі $\mathcal{B}$. Якщо многочлен*

$$g(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k \quad (a_k \in \mathcal{B},\ k \in \{0, 1, \ldots, n\}),\ t > 0,$$

належить до області визначення $\mathcal{D}(A)$ оператора A, то $a_k \in \mathcal{D}(A)$, $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Доведення. Виберемо на інтервалі $(0, +\infty)$ точки $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t_{n+1} < +\infty$ і знайдемо значення многочлена $g(t)$ у них

$$g(t_i) = \sum_{k=0}^{n} a_k t_i^k = b_i, \quad i \in \{1, 2, , \ldots, n+1\}.$$

Ми отримали систему рівнянь:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 t_1 + a_2 t_1^2 + \ldots + a_n t_1^n = b_1; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0 + a_1 t_{n+1} + a_2 t_{n+1}^2 + \ldots + a_n t_{n+1}^n = b_{n+1}. \end{cases}$$

З цієї системи рівнянь за правилом Крамера однозначно визначаються елементи

$$a_l = \frac{\Delta_l}{\Delta}, \quad l \in \{1, 2, \ldots, n+1\},$$

де Δ — визначник основної матриці системи; Δ_l — визначник матриці системи, у якій на місці l-го стовпця записано стовпець (b_i).

Визначник Δ є визначником Ван-дер-Монда і

$$\Delta = \prod_{1 \le i < j \le n+1} (t_j - t_i) \neq 0.$$

Оскільки за умовою леми $b_i \in \mathcal{D}(A)$, $i \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$, то $\Delta_l \in \mathcal{D}(A)$, $l \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$, як їхня лінійна комбінація. Звідси за правилом Крамера та за лінійністю $\mathcal{D}(A)$ отримуємо, що $a_k \in \mathcal{D}(A)$, $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Лему доведено. $\square$

Зауваження 1. Якщо $\sum_{k=0}^{n} a_k t_k = \sum_{k=0}^{n} b_k t_k$, $t \geq 0$, де $a_k, b_k \in \mathcal{B}$, $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, то $a_k = b_k$, $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Лема 2. *Многочлен степеня n є розв'язком однорідного еволюційного рівняння*

$$\frac{dy(t)}{dt} = Ay(t), \quad t \geq 0, \tag{3}$$

де A — лінійний оператор у банаховому просторі $\mathcal{B}$, тоді і тільки тоді, коли існує кореневий вектор оператора A порядку n з нульовим власним значенням.

Доведення. Доведемо необхідність твердження. Нехай многочлен $\sum_{k=0}^{n} a_k t^k$ ($a_k \in \mathcal{B}$, $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $a_n \neq 0$) є розв'язком однорідного еволюційного рівняння (3). Підставивши його у (3), отримаємо

$$\sum_{k=1}^{n} k a_k t^{k-1} = A \left(\sum_{k=0}^{n} a_k t^k \right), \quad t \geq 0.$$

За лемою 1 $a_k \in \mathcal{D}(A)$, $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, тому маємо

$$\sum_{k=1}^{n} k a_k t^{k-1} = \sum_{k=0}^{n} A a_k t^k, \quad t \geq 0.$$

Звідси отримуємо наступні співвідношення:

$$Aa_n = 0,\ Aa_{n-1} = na_n,\ \ldots,\ Aa_0 = a_1. \tag{4}$$

Застосувавши до $Aa_{n-1} = na_n$ лінійний оператор A, одержимо

$$A^2 a_{n-1} = nAa_n = 0.$$

Застосувавши до $Aa_{n-2} = (n-1)a_{n-1}$ оператор A^2, маємо

$$A^3 a_{n-2} = (n-1)A^2 a_{n-1} = 0.$$

Міркуючи подібно, далі отримаємо $A^{n-1}a_2 = 3A^{n-2}a_3 = 0$, $A_n a_1 = 2A^{n-1}a_2 = 0$, $A^{n+1}a_0 = A^n a_1 = 0$. Доведемо, що $A^n a_0 \neq 0$. Подіємо на співвідношення (4) операторами $A^{n-1}, A^{n-2}, \ldots, A$ відповідно, починаючи з останнього $A^n a_0 = A^{n-1}a_1$, $A^{n-1}a_1 = 2A^{n-2}a_2$, $Aa_{n-1} = na_n$. Звідси отримуємо, що $A^n a_0 = A^{n-1}a_1 = 2A^{n-2}a_2 = 2\cdot 3A^{n-3}a_3 = \ldots = 2\cdot 3\cdot 4\ldots(n-1)na_n = n!a_n \neq 0$. Отже, $A^n a_0 \neq 0$ і $A^{n+1}a_0 = 0$, тобто ми довели, що існує кореневий вектор a_0 оператора A порядку n з нульовим власним значенням (див.[3], с.31).

Для доведення достатності твердження проведемо наступні міркування. Нехай існує кореневий вектор b_0 оператора A порядку n з нульовим власним значенням, тобто $A^{n+1}b_0 = 0$, $A^n b_0 \neq 0$. Знайдемо многочлен $g(t)$ степеня n, який був би розв'язком однорідного рівняння (3) $g(t) = x_n t_n + x_{n-1}t^{n-1} + \ldots + x_1 t + x_0$, $x_n \neq 0$, де x_k, $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, — невідомі коефіцієнти. Підставивши його у рівняння (3), за лемою 1, отримаємо $Ax_n = 0$, $Ax_{n-1} = nx_n$, …, $Ax_0 = x_1$. Приймаючи $x_n = A^n b_0 \neq 0$, визначимо усі інші коефіцієнти x_k шуканого многочлена $g(t)$ $x_{n-1} = nA^{n-1}b_0$, $x_{n-2} = n(n-1)A^{n-2}b_0$, …, $x_0 = n!b_0$. Отже, многочлен $g(t)$ визначається однозначно і є розв'язком однорідного еволюційного рівняння (3). Лему доведено. □

3. Розглянемо у банаховому просторі $\mathcal{B}$ задачу Коші

$$\frac{dy(t)}{dt} = Ay(t) + \sum_{k=0}^{n} a_k t^k, \quad t \geq 0, \tag{5}$$

$$y(0) = y_0, \quad y_0 \in \mathcal{D}(A), \tag{6}$$

де A — лінійний замкнений оператор зі щільною у просторі $\mathcal{B}$ областю визначення $\mathcal{D}(A)$, a_k, $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, — елементи з простору $\mathcal{B}$.

Означимо q_k з допомогою таких рекурентних співвідношень:

$$q_n = -a_n;$$
$$q_k = (k+1)A^{-1}q_{k+1} - a_k, \quad k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}, \tag{7}$$

(у тих випадках, коли дія оберненого оператора A^{-1} до оператора A на елементи q_{k+1}, $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, є визначеною).

Через $\sigma_p(A)$ позначимо точковий спектр оператора A.

Теорема 1. *Нехай A — лінійний замкнений оператор зі щільною областю визначення $\mathcal{D}(A)$ у банаховому просторі $\mathcal{B}$ і $0 \notin \sigma_p(A)$. Довільний розв'язок $y(t)$ рівняння (5) має вигляд*

$$y(t) = u(t) + \sum_{k=0}^{n} b_k t^k, \tag{8}$$

де $u(t)$ *— розв'язок однорідного рівняння* (3), b_k, $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, *— елементи з простору* $\mathcal{B}$, *тоді і тільки тоді, коли*

$$(a) \quad q_k \in \mathcal{D}(A^{-1}), \quad k \in \{0, 1, \ldots, n\};$$

причому шукані коефіцієнти визначаються однозначно $b_k = A^{-1}q_k$, $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Доведення. Необхідність твердження. Нехай існує зображення розв'язку рівняння (5) у вигляді (8). Підставивши (8) у рівняння (5), отримаємо

$$\frac{du(t)}{dt} + \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=0}^{n} b_k t^k\right) = Au(t) + A\left(\sum_{k=0}^{n} b_k t^k\right) + \sum_{k=0}^{n} a_k t^k, \ t \geq 0. \tag{9}$$

Враховуючи те, що функція $u(t)$ є розв'язком однорідного рівняння (3), звідси отримаємо

$$\sum_{k=1}^{n} k b_k t^{k-1} = A\left(\sum_{k=0}^{n} b_k t^k\right) + \sum_{k=0}^{n} a_k t^k, \quad t \geq 0. \tag{10}$$

За лемою 1, усі коефіцієнти b_k, $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, належать до області визначення $\mathcal{D}(A)$ оператора A. Тому рівність (10) можна звести до вигляду

$$\sum_{k=1}^{n} k b_k t^{k-1} = \sum_{k=0}^{n} \left(A b_k t^k\right) + \sum_{k=0}^{n} a_k t^k, \quad t \geq 0. \tag{11}$$

З (11) отримуємо співвідношення між шуканими коефіцієнтами b_k, $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, та заданими коефіцієнтами a_k, $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$

$$Ab_n = -a_n, \ Ab_{n-1} = nb_n - a_{n-1}, \ \ldots, \ Ab_0 = b_1 - a_0, \tag{12}$$

тобто,

$$\begin{gathered} Ab_n = -a_n; \\ Ab_k = (k+1)b_{k+1} - a_k, \quad k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}. \end{gathered} \tag{13}$$

Застосовуючи у (13) введені вище позначення (7), отримаємо

$$Ab_k = q_k, \quad k \in \{0, 1, \ldots, n\}. \tag{14}$$

З (14) бачимо, що $q_k \in \mathcal{D}(A^{-1})$, $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, і $b_k = A^{-1}q_k$, $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Через те, що нуль не належить до точкового спектру $\sigma_p(A)$ оператора A, коефіцієнти b_k, $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, визначаються звідси однозначно.

Доведемо достатність твердження. Нехай $q_k \in \mathcal{D}(A^{-1})$, $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, і $b_k = A^{-1}q_k$, $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Утворимо $\tilde{y}(t) := \sum_{k=0}^{n} b_k t^k = \sum_{k=0}^{n} A^{-1}q_k t^k \in \mathcal{D}(A)$, а також $\tilde{y}(t) \in \mathbb{C}([0, \infty), \mathcal{B})$. Скористаємось означенням (7) та доведемо, що функція $\tilde{y}(t)$ є частковим розв'язком рівняння (5)

$$\frac{d\tilde{y}(t)}{dt} = \left(\sum_{k=0}^{n} A^{-1}q_k t^k\right)' = \sum_{k=1}^{n} k A^{-1}q_k t^{k-1};$$

$$A\tilde{y}(t)+\sum_{k=0}^{n}a_kt^k=A\left(\sum_{k=0}^{n}A^{-1}q_kt^k\right)+\sum_{k=0}^{n}a_kt^k=\sum_{k=0}^{n-1}\left((k+1)A^{-1}q_{k+1}-a_k\right)t^k+$$
$$+(-a_n)t^n+\sum_{k=0}^{n-1}a_kt^k+a_nt^n=\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)A^{-1}q_{k+1}t^k=\sum_{k=1}^{n}kA^{-1}q_kt^{k-1}.$$

Якщо $y(t)$ — розв'язок рівняння (5), то

$$u(t):=y(t)-\tilde{y}(t) \tag{15}$$

є розв'язком однорідного рівняння (3). Теорему доведено. □

Наслідок 1. *Нехай A — лінійний замкнений оператор зі щільною у банаховому просторі $\mathcal{B}$ областю визначення. Довільний розв'язок $y(t)$ рівняння (5) має вигляд (8) тоді і тільки тоді, коли*

$$(a)\quad q_k\in\mathcal{D}^{-1}(A),\quad k\in\{0,1,\ldots,n\},$$

причому коефіцієнти $b_k=A^{-1}q_k$ ($k\in\{0,1,\ldots,n\}$) і визначаються, взагалі кажучи, неоднозначно.

Зазначимо, що у випадку, коли нуль належить до резольвентної множини $\rho(A)$ оператора A і A є генератором обмеженої півгрупи класу (C_0), завжди існує представлення розв'язку $y(t)$ у вигляді (8).

Нехай $\operatorname{Ker}A$ і $R(A)$ відповідно ядро і образ оператора A, $\overline{R(A)}$ — замикання $R(A)$.

Теорема 2. *Нехай A — лінійний замкнений оператор зі щільною у рефлексивному банаховому просторі $\mathcal{B}$ областю визначення $\mathcal{D}(A)$ такий, що*

$$\mathcal{B}=\operatorname{Ker}A\dot{+}\overline{R(A)}\quad i\quad \mathcal{D}(A)\subseteq\operatorname{Ker}A\dot{+}R(A).$$

Довільний розв'язок $y(t)$ рівняння (5) представляється у вигляді (8), де $u(t)$ — розв'язок однорідного рівняння (3), $b_k\in\mathcal{B}$, $k\in\{0,1,\ldots,n\}$, тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{array}{ll}(a) & a_n\in R(A);\\ (b) & a_k\in\operatorname{Ker}A+R(A),\quad k\in\{0,1,\ldots,n-1\}.\end{array} \tag{16}$$

Причому коефіцієнти b_k, $k\in\{1,2,\ldots,n\}$, визначаються однозначно, а елемент b_0 — з точністю до елемента з ядра $\operatorname{Ker}A$ оператора A.

Доведення. Достатність твердження. Нехай для коефіцієнтів a_k ($k\in\{0,1,\ldots,n\}$) неоднорідної частини рівняння (5) виконуються умови (16). Розв'язок рівняння (5) шукатимемо у вигляді (8). Підставивши його у рівняння (5), міркуваннями, подібними до проведених у доведенні теореми 1, отримаємо співвідношення (12), з яких будемо визначати шукані елементи b_k, $k\in\{0,1,\ldots,n\}$.

Оскільки частковий розв'язок рівняння (5) шукаємо у вигляді многочлена $\sum_{k=0}^{n}b_kt^k$, $b_k\in\mathcal{B}$, $k\in\{0,1,\ldots,n\}$, то $\left(\sum_{k=0}^{n}b_kt^k\right)\in\mathcal{D}(A)$. За лемою 1, тоді $b_k\in\mathcal{D}(A)$, $k\in\{0,1,\ldots,n\}$. За умовою теореми $\mathcal{D}(A)\subset\operatorname{Ker}A\dot{+}R(A)$, тому $b_k\in\operatorname{Ker}A\dot{+}R(A)$ і елементи b_k можна представити як суму двох елементів $b_k=f_k+r_k$, де $f_k\in\operatorname{Ker}A$, $r_k\in R(A)$, $k\in\overline{0,n}$.

Оскільки $a_n \in R(A)$, то з того, що $Ab_n = -a_n$, елемент b_n визначимо як прообраз елемента $-a_n$ так, щоб $nb_n - a_{n-1} \in R(A)$, тобто ядро f_n елемента b_n треба вибрати таким, щоб ядра елементів nb_n і a_{n-1} збігались і у виразі $nb_n - a_{n-1}$ знищувались. Через те, що $a_{n-1} \in \operatorname{Ker} A \dot{+} R(A)$, елемент a_{n-1} можна подати у вигляді суми елементів з ядра і образу оператора A, тобто $a_{n-1} = f'_{n-1} + r'_{n-1}$, де $f'_{n-1} \in \operatorname{Ker} A$, $r'_{n-1} \in R(A)$. Отже, елемент b_n визначається однозначно, причому $f_n = \frac{1}{n} f'_{n-1}$. Тоді з того, що $Ab_{n-1} = nb_n - a_{n-1}$, елемент b_{n-1} визначимо як прообраз елемента $nb_n - a_{n-1} \in R(A)$ так, щоб $(n-1)b_{n-1} - a_{n-2} \in R(A)$, тобто ядро f_{n-1} елемента b_{n-1} треба вибрати таким, щоб ядра елементів $(n-1)b_{n-1}$ і a_{n-2} збігались і у виразі $(n-1)b_{n-1} - a_{n-2}$ знищувались. Оскільки $a_{n-2} \in \operatorname{Ker} A \dot{+} R(A)$, то $a_{n-2} = f'_{n-2} + r'_{n-2}$, де $f'_{n-2} \in \operatorname{Ker} A$, $r'_{n-2} \in R(A)$, а тому елемент b_{n-1} визначається однозначно, причому $f_{n-1} = \frac{1}{n-1} f'_{n-2}$.

Міркуючи подібно, далі зі співвідношень (12) і з того, що усі решта $a_k \in \operatorname{Ker} A \dot{+} R(A)$, $k \in \{0, 1, \ldots, n-3\}$, ми отримаємо, що $a_k = f'_k + r'_k$, де $f'_k \in \operatorname{Ker} A$, $r'_k \in R(A)$, $k \in \{0, 1, \ldots, n-3\}$, і елементи b_k, $k \in \{1, 2, \ldots, n-2\}$, визначаються з рівностей

$$Ab_k = (k+1)b_{k+1} - a_k, \quad k \in \{1, 2, \ldots, n-2\},$$

однозначно, причому $f_k = \frac{1}{k-1} f'_{k-1}$, $k \in \{1, 2, \ldots, n-2\}$. Елемент b_0 визначається з того, що

$$Ab_0 = b_1 - a_0,$$

але неоднозначно, а з точністю до його ядра f_0.

Отже, розв'язок $y(t)$ рівняння (5) можна представити у вигляді (8).

Необхідність твердження. Припустимо, що існує представлення довільного розв'язку $y(t)$ рівняння (5) у вигляді функції (8). Із співвідношень (12) випливає, що елемент a_n повинен належати до $R(A)$ і $kb_k - a_{k-1}$, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, теж повинен належати до $R(A)$. Враховуючи те, що $kb_k \in \mathcal{D}(A)$, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, і $\mathcal{D}(A) \subset \operatorname{Ker} A \dot{+} R(A)$, тобто необхідно, щоб для елементів a_k, $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, виконувались умови (16). Теорему 2 доведено. □

Наслідок 2. *Нехай A — генератор обмеженої півгрупи класу (C_0) у рефлексивному банаховому просторі $\mathcal{B}$ і $\mathcal{D}(A) \subset \operatorname{Ker} A \dot{+} R(A)$. Розв'язок задачі Коші* (5), (6) *має вигляд* (8)*, де $u(t)$ — розв'язок однорідного рівняння* (3) *з умовою $(C,1) \lim_{t\to\infty} u(t) = 0$, тоді і тільки тоді, коли виконуються умови* (16)*. Причому многочлен $\sum_{k=0}^{n} b_k t^k$ і функція $u(t)$ визначаються однозначно.*

Доведення. Подібно до доведення теореми 2, знаходимо многочлен $\sum_{k=0}^{n} b_k t^k$. Всі елементи b_k, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, визначаються однозначно, елемент b_0 визначається з точністю до ядра $\operatorname{Ker} A$ ($b_0 + x, x \in \operatorname{Ker} A$).

Побудуємо функцію $u(t)$ як розв'язок такої задачі

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t) + a, \quad t \geq 0, \tag{17}$$

$$u(0) = u_0, \; u_0 \in \mathcal{D}(A),$$

$$(C,1) \lim_{t\to\infty} u(t) = 0, \tag{18}$$

де A — генератор обмеженої півгрупи класу (C_0), a — параметр з рефлексивного банахового простору $\mathcal{B}$.

У праці [4] встановлено необхідні і достатні умови існування і єдиності розв'язку $(u(t), a)$ подібної задачі, а саме
$$Pu_0 = 0, \tag{19}$$
де P — проектор на підпростір $\operatorname{Ker} A$ у розкладі $\mathcal{B} = \operatorname{Ker} A \dot{+} \overline{R(A)}$, а також визначено параметр a: $a = -A0 = 0$.

Знайдемо $y(0) = u(0) + (b_0 + x)$. Функція $u(t)$ як розв'язок задачі (17), (18) визначається однозначно, і виконується умова (19). Звідси отримуємо, що
$$u(0) = y(0) - (b_0 + x) = y_0 - b_0 - x;$$
$$Pu(0) = P(y_0 - b_0 - x) = P(y_0 - b_0) - Px = P(y_0 - b_0) - x = 0,$$
а, отже, $x = P(y_0 - b_0)$, тому многочлен $\sum_{k=0}^{n} b_k t^k$ визначається однозначно.

Всі умови, які ми тут розглядали, є необхідними і достатніми. Наслідок доведено. □

Наслідок 3. *Нехай A — генератор обмеженої півгрупи класу (C_0) у рефлексивному банаховому просторі $\mathcal{B}$ і $R(A)$ є замкненим ($R(A) = \overline{R(A)}$). Існує представлення розв'язку $y(t)$ задачі Коші (5), (6) у вигляді (8) тоді і тільки тоді, коли*
$$a_n \in R(A). \tag{20}$$
Причому многочлен $\sum_{k=0}^{n} b_k t^k$ визначається однозначно.

Доведення. Нехай $R(A) = \overline{R(A)}$. Оскільки A є генератором обмеженої півгрупи класу (C_0) у рефлексивному банаховому просторі $\mathcal{B}$, то $\mathcal{B} = \operatorname{Ker} A \dot{+} \overline{R(A)}$. Тоді умова для елементів
$$a_k \in \operatorname{Ker} A \dot{+} R(A), \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\},$$
виконується, позаяк $a_k \in \mathcal{B}$, $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, а тому істотною залишається лише умова (20). Наслідок доведено. □

Наслідок 4. *Нехай A — лінійний замкнений оператор зі щільною у банаховому просторі $\mathcal{B}$ областю визначення $\mathcal{D}(A)$ і $\mathcal{B} = \operatorname{Ker} A \dot{+} R(A)$. Довільний розв'язок $y(t)$ еволюційного рівняння (5) представляється у вигляді (8) тоді і тільки тоді, коли виконується умова (20). Причому коефіцієнти b_k, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, визначаються однозначно.*

Доведення. Умови теореми 2, виконуються, а тому у результаті істотною є лише умова $a_n \in R(A)$ (умови $a_k \in \operatorname{Ker} A \dot{+} R(A)$, для $k \le n-1$, виконуються автоматично). Наслідок доведено. □

Зауваження 2. Оператор A, для якого $\mathcal{B} = \operatorname{Ker} A \dot{+} \overline{R(A)}$, не має кореневих векторів, що відповідають нульовому власному значенню (якщо $A^2 a = 0$, то $Aa \in \operatorname{Ker} A$ і $Aa \in R(A)$, $Aa = 0$).

Коефіцієнти b_k многочлена $\sum_{k=0}^{n} b_k t^k$ у теоремах 1 і 2 визначались однозначно. Цей результат можна отримати, виходячи з того, що різниця розв'язків неоднорідного рівняння є розв'язком однорідного рівняння, а згідно з лемою 2, розв'язком однорідного рівняння може бути лише многочлен нульового степеня.

Зауваження 3. Розв'язок задачі Коші (1), (2), коли неоднорідна частина $f(t)$ рівняння (1) є многочленом $\sum_{k=0}^{n} a_k t^k$ степеня n ($a_k \in \mathcal{B}$, $k \in \{0, 1, \dots, n\}$), можна було б шукати за формулою розв'язку задачі Коші для рівняння (1) (див.[1], с.166, т. 6.5), а саме

$$y(t) = U(t)y(0) + \int_0^t U(t-s)f(s)ds = U(t)y_0 + \int_0^t U(t-s)\left(\sum_{k=0}^{n} a_k s^k\right) ds,$$

де $U(t)$ — півгрупа класу (C_0), що генерується оператором A, і очікувати при цьому, що вираз $\int_0^t U(t-s)(\sum_{k=0}^{n} a_k s^k)ds$ буде многочленом. Вивчення цього питання показало, що це не завжди так.

У частковому випадку, коли многочлен $\sum_{k=0}^{n} a_k s^k$ є многочленом нульового степеня, у наступній теоремі 3 встановлено, що функція $\int_0^t U(t-s)a_0 ds$ є далеко не завжди аналітичною (тим паче цілою).

Нагадаємо, що вектор $f \in D(A^n)$ називається аналітичним вектором для лінійного оператора A у банаховому просторі $\mathcal{B}$, якщо для деякого $t > 0$ (див.[3], с. 69)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A^n f\|}{n!} t^n < \infty \tag{21}$$

Вектор $f \in D(A^n)$ називається цілим вектором для лінійного оператора A у банаховому просторі $\mathcal{B}$, якщо для усіх $t \in (-\infty; \infty)$ виконується умова (21).

Теорема 3. *Функція $\int_0^t U(t-s)a_0 ds$ є аналітичною в околі точки нуль тоді і тільки тоді, коли вектор a_0 є аналітичним вектором оператора A.*

Доведення. Нехай функція $\int_0^t U(t-s)a_0 ds$ є аналітичною в околі точки нуль. Введемо заміну $t - s = \mu$, тоді $t = s + \mu$, $s = t - \mu$, $ds = -d\mu$,

$$\int_0^t U(t-s)a_0 ds = -\int_t^0 U(\mu)a_0 d\mu = \int_0^t U(\mu)a_0 d\mu.$$

Знайдемо похідну функції $\int_0^t U(t-s)a_0 ds$

$$\left(\int_0^t U(t-s)a_0 ds\right)' = \left(\int_0^t U(\mu)a_0 d\mu\right)' = U(t)a_0 - a_0.$$

Функція $U(t)a_0$, як відомо, є розв'язком задачі Коші

$$\frac{dz(t)}{dt} = Az(t), \quad t \geq 0,$$
$$z(0) = a_0, \quad a_0 \in \mathcal{D}(A),$$

де A — генератор півгрупи $U(t)$ класу (C_0). Як встановлено у статті [5], цей розв'язок є аналітичною функцією в околі точки 0 тоді і тільки тоді, коли a_0 є аналітичним вектором оператора A. Теорему доведено. $\square$

ЛІТЕРАТУРА

1. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1967. – 464 с.
2. Хилле Э. Филлипс Р.С. Функциональный анализ и полугруппы. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 826 с.
3. Горбачук В.И., Горбачук М.Л. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – К.: Наукова думка, 1984. – 284 с.
4. Горбачук О.Л. *Розв'язок однієї оберненої задачі для еволюційного рівняння у банаховому просторі* // Укр. мат. журн. – 1990. – 42, №9. – С.1262–1265.
5. Горбачук О.Л. *Симетричні оператори і аналітичні вектори* // Матем. Студії. – 1999. – Т.11, №2. – С.216–218.

Дрогобицький державний педуніверситет імені Івана Франка
Львівський національний університет імені Івана Франка

Надійшло 30.06.2004