УДК 517.512

В. А. Андриенко, Л. Г. Коваленко

О СКОРОСТИ $(C,\alpha<0,0)$-СУММИРОВАНИЯ ПОЧТИ ВСЮДУ ДВОЙНЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДОВ[1]

V. A. Andrienko, L. G. Kovalenko. *On the rate of* $(C,\alpha<0,0)$-*almost everywhere summability of double orthogonal series*, Matematychni Studii, **23** (2005) 68–81.

Unimprovable estimates (in the class of double orthogonal series) are obtained on the rate of almost everywhere summability of orthogonal expansions of square-integrable functions by Cesaro methods of non-positive orders. The conditions imposed on the coefficients are of classical type.

В. А. Андриенко, Л. Г. Коваленко. *О скорости* $(C,\alpha<0,0)$-*суммирования почти всюду двойных ортогональных рядов* // Математичні Студії. – 2005. – Т.23, №1. – С.68–81.

Получены неулучшаемые (на классе двойных ортогональных рядов) оценки скорости суммирования почти всюду методами Чезаро неположительного порядка ортогональных разложений суммируемых с квадратом функций. Предполагаются заданными коэффициентные условия классического типа.

Пусть $\mathbb{Z}_+^2=\{i=(i_1,i_2)\}$ — множество точек евклидова пространства $\mathbb{R}^2$ с целыми неотрицательными координатами, частично упорядоченное соглашением, что неравенство $i\le n$ для $i,n\in\mathbb{Z}_+^2$ означает $i_j\le n_j$, $j\in\{1,2\}$. Если не оговорено специально, по умолчанию всюду в дальнейшем считаем $i,k,n\in\mathbb{Z}_+^2$, $j,r,p\in\mathbb{Z}_+\equiv\mathbb{Z}_+^1$. Условимся также, что $n_*=\min\{n_1,n_2\}$, $n^*=\max\{n_1,n_2\}$. Через $C(\alpha)$, $C_j(\alpha), j\in\{1,2,\dots\}$ будем обозначать некоторые постоянные, различные в различных формулах, зависящие от указанного в скобках параметра.

Пусть $\phi=\{\phi_i(x): i\in\mathbb{Z}_+^2\}$ — произвольная двойная ортонормированная система (ОНС) на множестве $X=[0,1]^2$ и Φ — множество всех таких систем; $\{a_i: i\in\mathbb{Z}_+^2\}$ — двойная последовательность действительных чисел, удовлетворяющая условию

$$\sum_{i_1=0}^{+\infty}\sum_{i_2=0}^{+\infty}a_{i_1,i_2}^2<+\infty. \tag{1}$$

Рассмотрим двойной ортогональный ряд

$$\sum_{i_1=0}^{+\infty}\sum_{i_2=0}^{+\infty}a_{i_1,i_2}\phi_{i_1,i_2}(x),\quad x\in X. \tag{2}$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 40G05.

[1] Работа выполнена при частичной поддержке ДФФД, грант No Ф7/329 - 2001.

По теореме Рисса-Фишера, ряд (2) сходится в метрике L^2 к некоторой функции $f \in L^2(X)$ и является ее рядом Фурье. В дальнейшем через $f(x)$ будем обозначать L^2 - сумму ряда (2). Однако хорошо известно, что условие (1) в общем случае не гарантирует сходимости почти всюду (п.в.) ортогонального ряда (2). Достаточное условие сходимости п.в. однократного ортогонального ряда устанавливает теорема Меньшова (1920 г.), для кратных ортогональных рядов ее аналог доказан Ф. Морицем (1978 г.). Как следствия этих результатов, теми же авторами были получены достаточные условия суммируемости п.в. методами Чезаро положительного порядка. Для методов отрицательного порядка достаточные условия суммируемости п.в. установлены Г. Суноути и С. Яно в одномерном случае (1950 г.) и Д.В. Брегвадзе — в кратном (1993 г.).

Многим позже появились первые оценки скорости суммирования п.в. В одномерном случае эту тематику развивали венгерские математики Й. Медер, К. Тандори, Г. Алексич, Д. Кралик, Л. Лейндлер (1957–1963 гг.). Окончательное решение задачи о скорости $(C,1)$–суммирования п.в. однократных ортогональных рядов предложил В.И. Коляда (1973 г.), а в общем случае $(C,\alpha>-1)$–суммирования — В.А. Андриенко (см. [1]). В кратном случае были известны частные результаты Ф. Морица 1983–1987 гг. для методов Чезаро неотрицательного порядка. В некотором смысле окончательные оценки скорости суммирования п.в. в кратном случае для методов $(C,\alpha>0,\beta>0)$, $(C,\alpha>0,0)$ и $(C,-1<\alpha<0,-1<\beta<0)$ были получены авторами этой статьи (2000 – 2003 гг.).

В настоящей работе мы рассматриваем $(C,-1<\alpha<0,0)$-методы. Полученные результаты позволяют судить о неулучшаемом на классе всех ортогональных рядов достаточном условии $(C,-1<\alpha<0,0)$ – суммируемости п.в. и об окончательных на классе всех ортогональных рядов оценках скорости $(C,-1<\alpha<0,0)$–суммирования п.в.

Для $-1<\alpha<0$ средние Чезаро порядка $(\alpha,0)$ (или $(C,\alpha,0)$-средние) ряда (2) определим соотношением $\sigma_n^{\alpha,0}(x) = (A_{n_1}^{\alpha})^{-1}\sum_{i_1\le n_1}\sum_{i_2\le n_2} A_{n_1-i_1}^{\alpha} a_{i_1,i_2}\phi_{i_1,i_2}(x)$, где $A_{n_1}^{\alpha} = \binom{n_1+\alpha}{n_1}$ — биномиальные коэффициенты, $n_1\in\{0,1,2,\dots\}$. Говорят, что ряд (2) суммируем методом Чезаро порядка $(\alpha,0)$ п.в. на множестве X, если последовательность $\{\sigma_n^{\alpha,0}(x): n\in\mathbb{Z}_+^2\}$ имеет конечный предел при $n_*\to+\infty$ п.в. на множестве X.

По определению, для $f_n\in L^2(X)$ и двойной числовой последовательности γ_n соотношение $f_n(x) = o_x\{\gamma_n\}$ означает,что п.в. $\gamma_n^{-1}f_n(x)\to 0 (n_*\to+\infty)$ и функция $F(x) = \sup_n \gamma_n^{-1}|f_n(x)|$ принадлежит пространству $L^2(X)$. Мы рассматриваем такую задачу: пусть задана положительная двойная последовательность $\lambda(n_1,n_2)\uparrow+\infty$ $(n^*\to+\infty)$. Требуется найти функцию $\gamma(n) = \gamma(\{\lambda(n_1,n_2)\}, n, -1<\alpha<0) > 0$, обладающую следующими свойствами:

(i) если

$$\sum_{i_1\ge 0}\sum_{i_2\ge 0} a_{i_1,i_2}^2\lambda^2(i_1,i_2) < +\infty, \tag{3}$$

то для любой системы $\phi\in\Phi$ п.в. на X

$$\Delta_n^{\alpha}(x) \equiv \left|f(x)-\sigma_n^{\alpha,0}(x)\right| = o_x\{\gamma(n)\}; \tag{4}$$

(ii) оценка (4) является точной на классе всех рядов Фурье, т.е. для любой последовательности $\upsilon(n_1,n_2)\to+\infty$ $(n^*\to+\infty)$ найдется ортогональный ряд (2) такой, что условие (3) выполнено, но $\overline{\lim}_{n_*\to+\infty}\upsilon(n_1,n_2)\gamma^{-1}(n)\Delta_n^{\alpha}(x) = +\infty$ всюду на X;

(iii) условие (3) для оценки (4) является необходимым на классе всех рядов Фурье, т.е. существует ортогональный ряд (2) с коэффициентами, удовлетворяющими тре-

бованию
$$\sum_{i_1\geq 0}\sum_{i_2\geq 0} a^2_{i_1,i_2}\lambda^2(i_1,i_2)=+\infty, \tag{5}$$
для которого $\overline{\lim}_{n_*\to+\infty}\gamma^{-1}(n)\Delta^\alpha_n(x)=+\infty$ всюду на X.

Будем говорить, что оценка (4) окончательна, если наряду с (i) выполнены (ii) и (iii). Решение сформулированной задачи заключено в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть $-1<\alpha<0$ и положительная последовательность $\lambda(n_1,n_2)$ удовлетворяет условиям: по каждой переменной*
$$\lambda(n_1,n_2)(n_1+1)^\alpha/\log n_2\uparrow \tag{6}$$
и по переменной n_1
$$\lambda(n_1,n_2)(n_1+1)^{\alpha-1}\downarrow 0. \tag{7}$$
Тогда: (i) если выполнено условие (3), то для любой системы $\phi\in\Phi$ п.в. на X справедлива оценка
$$\Delta^\alpha_n(x)=o_x\left\{\frac{(n_1+1)^{-\alpha}}{\lambda_1(n_1)}+\frac{\log(n_2-\nu_{k_2}+2)}{\lambda_2(n_2)}\right\}, \tag{8}$$
где $\lambda_1(n_1)=\lambda(n_1,0)$, $\lambda_2(n_2)=\lambda(0,n_2)$, последовательность $\{\nu_{k_2}\}^{+\infty}_{k_2=0}$ определяется соотношением
$$\lambda_2(\nu_{k_2+1}-1)<2\lambda_2(\nu_{k_2})\leq\lambda_2(\nu_{k_2+1}) \tag{9}$$
и при этом $\nu_{k_2}\leq n_2<\nu_{k_2+1}$;

(ii) оценка (8) является окончательной.

Последовательность ν_{k_2} однозначно определяется неравенствами (9), т.к., по предположению, $\lambda_2(n_2)\uparrow+\infty$ при $n_2\to+\infty$ и достаточно положить $\nu_{k_2+1}=\min\{t:\lambda_2(t)>2\lambda_2(\nu_{k_2})\}$.

Следствие. *При условии $\sum_{n\geq 0}a^2_n(n_1+1)^{-\alpha}\log^2(n_2+2)<+\infty$, для любого $-1<\alpha<0$ и любой системы $\phi\in\Phi$ п.в. на X справедлива окончательная оценка $\Delta^\alpha_n(x)=o_x\{1\}$.*

Метод доказательства теоремы 1 основан на сведении изучения скорости чезаровского суммирования п.в. к задаче о скорости сходимости п.в. и о порядке роста некоторых подпоследовательностей прямоугольных частных сумм двойных ортогональных рядов специального вида. Этот подход использовался при решении задач о скорости $(C,1)$ и $(C,\alpha>-1)$–суммирования соответственно В.И. Колядой и В.А. Андриенко в одномерном случае. Ключевым моментом в реализации сказанного является следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть $-1<\alpha<0$, неубывающая к бесконечности по каждой переменной последовательность $\lambda(n_1,n_2)>0$ и последовательность $\nu_k=(\nu_{k_1},\nu_{k_2})\in\mathbb{Z}^2_+$ таковы, что справедливы соотношения (9),*
$$1<p_1\leq\frac{\nu_{k_1+1}}{\nu_{k_1}}\leq p_2, \tag{10}$$
$$\lambda(n_1,n_2)(n_1+1)^\alpha\uparrow\ \text{\textit{по переменной} } n_1 \tag{11}$$
и
$$\lambda_1(\nu_{k_1})\nu_{k_1}^{-1-\gamma}\downarrow\ \text{\textit{для некоторого} } \gamma\in(0,1). \tag{12}$$

Если выполнено условие (3), *то для* $\nu_k \le n < \nu_{k+1}$, $x \in X$ *имеем*

$$\sigma_n^{\alpha,0}(x) = S_{\nu_k}(x) - \frac{\alpha}{n_1} S_{\nu_k}^{(1)}(x) + r_n(x),$$

где $S_{\nu_k}^{(1)}(x) = \sum_{i_1 \le \nu_{k_1}} \sum_{i_2 \le \nu_{k_2}} i_1 a_{i_1,i_2} \phi_{i_1,i_2}(x)$ *и*

$$r_n(x) = o_x \left\{ \frac{(n_1+1)^{-\alpha}}{\lambda_1(n_1)} + \frac{\log(n_2 - \nu_{k_2} + 2)}{\lambda_2(n_2)} \right\}. \tag{13}$$

Доказательство. По определению, для $\nu_k \le n < \nu_{k+1}$

$$\sigma_n^{\alpha,0}(x) = S_{\nu_k}(x) - \frac{\alpha}{n_1} S_{\nu_k}^{(1)}(x) - \rho_n(x) + \sum_{j=1}^{3} r_n^{(j)}(x),$$

где

$$\rho_n(x) = \sum_{i \le \nu_k} \left(1 - \frac{A_{n_1-i_1}^{\alpha}}{A_{n_1}^{\alpha}} - \frac{\alpha i_1}{n_1}\right) a_i \phi_i(x),$$

$$\sum_{j=1}^{3} r_n^{(j)}(x) = \begin{cases} 0, \quad \text{если } n = \nu_k, \\ r_n^{(2)}(x), \quad \text{если } n_1 = \nu_{k_1}, \nu_{k_2} < n_2 < \nu_{k_2+1}, \\ r_n^{(1)}(x), \quad \text{если } \nu_{k_1} < n_1 < \nu_{k_1+1}, n_2 = \nu_{k_2}, \\ r_n^{(1)}(x) + r_n^{(2)}(x) + r_n^{(3)}(x), \quad \text{если } \nu_k < n < \nu_{k+1} \end{cases}$$

и

$$r_n^{(j)}(x) = \sum_{i \in P_j} \frac{A_{n_1-i_1}^{\alpha}}{A_{n_1}^{\alpha}} a_i \phi_i(x), \quad j \in \{1,2,3\},$$

$$P_1 = \left\{ i = (i_1, i_2) \in \mathbb{Z}_+^2 : \ \nu_{k_1} + 1 \le i_1 \le n_1, \ 0 \le i_2 \le \nu_{k_2} \right\},$$
$$P_2 = \left\{ i = (i_1, i_2) \in \mathbb{Z}_+^2 : \ 0 \le i_1 \le \nu_{k_1}, \ \nu_{k_2} + 1 \le i_2 \le n_2 \right\},$$
$$P_3 = \left\{ i = (i_1, i_2) \in \mathbb{Z}_+^2 : \ \nu_{k_1} + 1 \le i_1 \le n_1, \ \nu_{k_2} + 1 \le i_2 \le n_2 \right\}.$$

Пусть $q_{i_1} \equiv q_{i_1}(n_1) = \frac{n_1}{i_1} \left\{ \frac{n_1}{\alpha i_1} \left(1 - \frac{A_{n_1-i_1}^{\alpha}}{A_{n_1}^{\alpha}}\right) - 1 \right\}, 1 \le i_1 \le n_1; q_0 = 0$; $\Delta q_{i_1} = q_{i_1} - q_{i_1+1}$ и $d_{i_1} = \max\{|q_{i_1}(n_1) - q_{i_1+1}(n_1)| : \nu_{k_1} < n_1 \le \nu_{k_1+1}\}$. Заметим, что $\rho_n(x) = \alpha n_1^{-2} \sum_{i \le \nu_k} q_{i_1} i_1^2 a_i \phi_i(x)$ и на основании преобразования Абеля

$$\rho_n(x) = \frac{\alpha}{n_1^2} \left\{ \sum_{i_1 \le \nu_{k_1} - 1} \Delta q_{i_1} \sum_{i_2 \le \nu_{k_2}} \sum_{j \le i_1} j^2 a_{j i_2} \phi_{j i_2}(x) + q_{\nu_{k_1}} \sum_{i \le \nu_k} i_1^2 a_i \phi_i(x) \right\}.$$

Далее, применяя неравенство Коши-Буняковского и лемму 2 из [1], получаем

$$\rho_n^2(x) \le \frac{C_1(\alpha)}{\nu_{k_1}^4} \left\{ \nu_{k_1}^{-\alpha} \sum_{i_1=0}^{\nu_{k_1}-1} d_{i_1} \left[\sum_{j=0}^{i_1} \sum_{i_2=0}^{\nu_{k_2}} j^2 a_{j i_2} \phi_{j i_2}(x) \right]^2 + \nu_{k_1}^{-2\alpha} \left[\sum_{i \le \nu_k} i_1^2 a_i \phi_i(x) \right]^2 \right\}, \tag{14}$$

где здесь и ниже в пределах доказательства этой леммы постоянные $C_j(\alpha), j \in \{1, 2, \dots\}$ зависят от указанного параметра α и, вообще говоря, от p_1 и p_2. Пусть теперь $\psi_k(x) =$

$\sup\{\rho_n^2(x):\nu_{k_1}\le n_1<\nu_{k_1+1}, n_2\ge\nu_{k_2}\}$ и $F_{k_2}(x)=\sum_{k_1\ge0}\lambda_1^2(\nu_{k_1})\nu_{k_1}^{2\alpha}\psi_k(x)$. Очевидно, что последовательность $\{F_{k_2}(x)\}_{k_2=1}^{+\infty}$ не возрастает,

$$\int_X F_{k_2}(x)\,dx\le\sum_{k_1=0}^{\infty}\lambda_1^2(\nu_{k_1})\nu_{k_1}^{2\alpha}\int_X\psi_{k_1,0}(x)\,dx.$$

Учитывая неравенство (14), лемму 2 из [1], а также условия (12) и (3), имеем

$$\int_X F_{k_2}(x)\,dx\le C_2(\alpha)\sum_{k_1=0}^{\infty}\lambda_1^2(\nu_{k_1})\nu_{k_1}^{-4}\sum_{i\le\nu_k}i_1^4a_i^2\le C_2(\alpha)\sum_{i\ge0}i_1^4a_i^2\sum_{\nu_{k_1}\ge i_1}\lambda_1^2(\nu_{k_1})\nu_{k_1}^{-4}\le$$

$$\le C_3(\alpha)\sum_{i\ge0}a_i^2\lambda_1^2(i_1)\le C_3(\alpha)\sum_{i\ge0}a_i^2\lambda^2(i)<+\infty.$$

По теореме Леви и признаку Вейерштрасса (см. также (10), (11)),

$$\rho_n(x)=o_x\left\{\frac{\nu_{k_1}^{-\alpha}}{\lambda_1(\nu_{k_1})}\right\}=o_x\left\{\frac{(n_1+1)^{-\alpha}}{\lambda_1(n_1)}\right\}\quad\text{при } n_1\to+\infty \text{ равномерно по } n_2.$$

Для оценки порядка величины $r_n^{(1)}(x)$ положим $\delta=(\alpha-1)/2$ и запишем

$$r_n^{(1)}(x)=(A_{n_1}^{\alpha})^{-1}\sum_{i\in P_1}A_{n_1-i_1}^{\alpha}\;a_i\phi_i(x)=$$

$$=(A_{n_1}^{\alpha})^{-1}\sum_{i\in P_1}a_i\phi_i(x)\sum_{i_1\le j\le n_1}A_{n_1-j}^{\delta}A_{j-i_1}^{\delta}=(A_{n_1}^{\alpha})^{-1}\sum_{\nu_{k_1}<j\le n_1}A_{n_1-j}^{\delta}A_j^{\delta}\bar\sigma_{j,\nu_{k_2}}(x),$$

где

$$\bar\sigma_{j,\nu_{k_2}}(x)=(A_j^{\delta})^{-1}\sum_{i_1=\nu_{k_1}+1}^{j}A_{j-i_1}^{\delta}\sum_{i_2\le\nu_{k_2}}a_i\phi_i(x).$$

Отсюда, с помощью неравенства Коши-Буняковского, получаем

$$|r_n^{(1)}(x)|^2\le C_1(\alpha)n_1^{-2\alpha}\sum_{\nu_{k_1}<j\le n_1}(n_1+1-j)^{\alpha-1}(j+1)^{\alpha-1}\sum_{\nu_{k_1}<j\le n_1}|\bar\sigma_{j,\nu_{k_2}}(x)|^2\le$$

$$\le C_2(\alpha)\nu_{k_1}^{-1-\alpha}\sum_{j=\nu_{k_1}+1}^{\nu_{k_1+1}}|\bar\sigma_{j,\nu_{k_2}}(x)|^2.$$

Поскольку

$$\int_X|\bar\sigma_{j,\nu_{k_2}}(x)|^2\,d\mu(x)\le C_2(\alpha)(j+1)^{1-\alpha}\sum_{i_1=\nu_{k_1}+1}^{j}(j+1-i_1)^{\alpha-1}\sum_{i_2=1}^{\nu_{k_2}}a_i^2,$$

то, полагая $\psi_k(x)=\sup\{|r_n^{(1)}(x)|^2:\nu_{k_1}<n_1<\nu_{k_1+1}, n_2>\nu_{k_2}\}$, имеем

$$\int_X\psi_k(x)\,d\mu(x)\le C_3(\alpha)\nu_{k_1}^{-1-\alpha}\sum_{j=\nu_{k_1}+1}^{\nu_{k_1+1}}(j+1)^{1-\alpha}\sum_{i_1=\nu_{k_1}+1}^{j}(j+1-i_1)^{\alpha-1}\sum_{i_2=1}^{\nu_{k_2}}a_i^2=$$

$$= C_3(\alpha)\nu_{k_1}^{-1-\alpha}\sum_{i_1=\nu_{k_1}+1}^{\nu_{k_1+1}}\sum_{i_2=1}^{\nu_{k_2}}a_i^2\sum_{j=i_1}^{\nu_{k_1+1}}(j+1)^{1-\alpha}(j+1-i_1)^{\alpha-1}\le C_3(\alpha)\nu_{k_1}^{-2\alpha}\sum_{i_1=\nu_{k_1}+1}^{\nu_{k_1+1}}\sum_{i_2=1}^{\nu_{k_2}}a_i^2 \quad (15)$$

и для невозрастающей последовательности $F_{k_2}(x)=\sum_{k_1\ge 0}\lambda_1^2(\nu_{k_1})\nu_{k_1}^{2\alpha}\psi_k(x)$

$$\int_X F_{k_2}(x)\,d\mu(x)\le C_3(\alpha)\sum_{k_1=0}^{+\infty}\lambda_1^2(\nu_{k_1})\sum_{i_1=\nu_{k_1}+1}^{\nu_{k_1+1}}\sum_{i_2=1}^{\nu_{k_2}}a_i^2\le C_3(\alpha)\sum_{i\ge 0}a_i^2\lambda^2(i)<+\infty.$$

Тогда по теореме Леви и признаку Вейерштрасса (см. также (10), (11))

$$r_n^{(1)}(x)=o_x\left\{\frac{\nu_{k_1}^{-\alpha}}{\lambda_1(\nu_{k_1})}\right\}=o_x\left\{\frac{(n_1+1)^{-\alpha}}{\lambda_1(n_1)}\right\}\ \text{при } n_1\to+\infty \text{ равномерно по } n_2.$$

Для оценки $r_n^{(3)}(x)$, как и ранее, приходим к равенству

$$r_n^{(3)}(x)\equiv r_n^{(3)}(x;a_i)=(A_{n_1}^{\alpha})^{-1}\sum_{\nu_{k_1}<j\le n_1}A_{n_1-j}^{\delta}A_j^{\delta}\bar\sigma_{j,n_2}(x),$$

где

$$\bar\sigma_{j,n_2}(x)\equiv\bar\sigma_{j,n_2}(x;a_i)=\frac{1}{A_j^{\delta}}\sum_{\nu_{k_1}<i_1\le j}A_{j-i_1}^{\delta}\sum_{\nu_{k_2}<i_2\le n_2}a_i\phi_i(x),$$

откуда следует оценка

$$|r_n^{(3)}(x)|^2\le C_1(\alpha)\nu_{k_1}^{-1-\alpha}\sum_{\nu_{k_1}<j<\nu_{k_1+1}}\left\{\sup_{\nu_{k_2}<n_2<\nu_{k_2+1}}|\bar\sigma_{j,n_2}(x)|\right\}^2. \quad (16)$$

Пусть

$$B_{i_2}=\frac{1}{\log(i_2-\nu_{k_2}+2)}\left\{\sum_{i_1=\nu_{k_1}+1}^{j}\left(\frac{A_{j-i_1}^{\delta}}{A_j^{\delta}}\right)^2a_i^2\right\}^{1/2},$$

$$\Phi_{i_2}(x)=\begin{cases}B_{i_2}^{-1}\sum_{i_1=\nu_{k_1}+1}^{j}\frac{A_{j-i_1}^{\delta}}{A_j^{\delta}}a_i\phi_i(x), \text{ если } B_{i_2}\ne 0 \quad (\nu_{k_2}<i_2\le\nu_{k_2+1}),\\ \phi_{\nu_{k_1+1},i_2}(x), \text{ если } B_{i_2}=0.\end{cases}$$

Очевидно, что функции $\Phi_{i_2}(x)$ ортогональны и нормированы на X. Применим к частной сумме $\sum_{i_2=\nu_{k_2}+1}^{n_2}B_{i_2}\Phi_{i_2}(x)$ теорему 7 из [8]. Имеем

$$\int_X\left\{\sup_{\nu_{k_2}<n_2\le\nu_{k_2+1}}\left|\tilde\sigma_{j,n_2}(x;\frac{a_i}{\log(i_2-\nu_{k_2}+2)})\right|\right\}^2dx=$$

$$=\int_X\left\{\sup_{\nu_{k_2}<n_2\le\nu_{k_2+1}}\left|\sum_{i_2=\nu_{k_2}+1}^{n_2}\frac{B_{i_2}}{\log(i_2-\nu_{k_2}+2)}\Phi_{i_2}(x)\right|\right\}^2dx\le$$

$$\le C_2(\alpha)(j+1)^{1-\alpha}\sum_{i_2=\nu_{k_2}+1}^{\nu_{k_2+1}}\sum_{i_1=\nu_{k_1}+1}^{j}(j+1-i_1)^{\alpha-1}a_i^2 \quad (17)$$

и (см. (16), (17) и (15))

$$\sum_{k\geq 0}\lambda^2(\nu_k)\nu_{k_1}^{2\alpha}\int\limits_X \sup_{\nu_k<n<\nu_{k+1}}\left|r_n^{(3)}\left(x;\frac{a_i}{\log(i_2-\nu_{k_2}+2)}\right)\right|^2 dx \leq C_3(\alpha)\sum_{k\geq 0}\lambda^2(\nu_k)\sum_{\nu_k<i\leq\nu_{k+1}}a_i^2\leq$$

$$\leq C_3(\alpha)\sum_{i\geq 0}a_i^2\lambda^2(i)<+\infty.$$

По теореме Леви (см. также (11)), $r_n^{(3)}(x;a_i/\log(i_2-\nu_{k_2}+2)) = o_x(\nu_{k_1}^{-\alpha}/\lambda(\nu_k)) = o_x(1/\lambda_2(\nu_{k_2}))$ при $n_2\to+\infty$ равномерно по n_1. Отсюда по теореме Кронекера, учитывая (9), получаем

$$r_n^{(3)}(x;a_i)=o_x\left(\frac{\log(n_2-\nu_{k_2}+2)}{\lambda_2(\nu_{k_2+1}-1)}\right)=o_x\left(\frac{\log(n_2-\nu_{k_2}+2)}{\lambda_2(n_2)}\right) \tag{18}$$

при $n_2\to+\infty$ равномерно по n_1.

Оценим теперь порядок величины $r_n^{(2)}(x)$. Заметим, что

$$r_n^{(2)}(x)=\frac{1}{A_{n_1}^{\alpha}}\sum_{i\in P_2}A_{n_1-i_1}^{\alpha_1}a_i\phi_i(x)=\frac{1}{A_{n_1}^{\alpha}}\sum_{i_1=0}^{\nu_{k_1-1}}\sum_{i_2=\nu_{k_2}+1}^{n_2}A_{n_1-i_1}^{\alpha}a_i\phi_i(x)+$$

$$+\frac{1}{A_{n_1}^{\alpha}}\sum_{i_1=\nu_{k_1-1}+1}^{\nu_{k_1}}\sum_{i_2=\nu_{k_2}+1}^{n_2}A_{n_1-i_1}^{\alpha}a_i\phi_i(x)=b_n^{(1)}(x)+b_n^{(2)}(x).$$

Для $b_n^{(2)}(x)$ при $n_2\to+\infty$ равномерно по n_1 справедлива оценка вида (18)

$$b_n^{(2)}(x)=o_x\left\{\frac{\log(n_2-\nu_{k_2}+2)}{\lambda_2(n_2)}\right\}.$$

Чтобы оценить $b_n^{(1)}(x)$, применим преобразование Абеля по i_1

$$b_n^{(1)}(x)=\frac{1}{A_{n_1}^{\alpha}}\left(\sum_{i_1=1}^{\nu_{k_1-1}-1}\Delta A_{n_1-i_1}^{\alpha}\sum_{j=1}^{i_1}\sum_{i_2=\nu_{k_2}+1}^{n_2}a_{ji_2}\phi_{ji_2}(x)+A_{n_1-\nu_{k_1}-1}^{\alpha}\sum_{i_1=1}^{\nu_{k_1-1}}\sum_{i_2=\nu_{k_2}+1}^{n_2}a_i\phi_i(x)\right).$$

Поскольку $\Delta A_{n_1-i_1}^{\alpha}=A_{n_1-i_1}^{\alpha_1}-A_{n_1-i_1-1}^{\alpha}=A_{n_1-i_1}^{\alpha-1}<0$, то

$$\sum_{i_1=0}^{m_{k_1-1}-1}|\Delta A_{n_1-i_1}^{\alpha}|=|A_{n_1}^{\alpha_1}-A_{n_1-m_{k_1-1}}^{\alpha}|<A_{n_1-m_{k_1-1}}^{\alpha}.$$

Последнее неравенство имеет место, т.к. $\{A_{n_1}^{\alpha}\}\downarrow$ по n_1. Заметим также, что, в силу (10),

$$\frac{1}{A_{n_1}^{\alpha}}\sum_{i_1=0}^{m_{k_1-1}-1}|\Delta A_{n_1-i_1}^{\alpha}|<\frac{A_{n_1-m_{k_1-1}}^{\alpha}}{A_{n_1}^{\alpha_1}}\leq C_1(\alpha)\frac{(n_1-m_{k_1-1})^{\alpha}}{n_1^{\alpha}}\leq C_2(\alpha),$$

$$\frac{|\Delta A_{n_1-i_1}^{\alpha}|}{A_{n_1}^{\alpha_1}}=\frac{|A_{n_1-i_1}^{\alpha-1}|}{A_{n_1}^{\alpha}}\leq C_1(\alpha_1)\frac{(n_1-i_1)^{\alpha-1}}{n_1^{\alpha}}\leq\frac{C_5(\alpha)}{m_{k_1-1}}$$

для всех $0 \le i_1 \le m_{k_1-1}$. Отсюда на основании неравенства Коши-Буняковского

$$|b_n^{(1)}(x)|^2 \le C_3(\alpha) \left\{ \nu_{k_1-1}^{-1} \sum_{i_1=1}^{\nu_{k_1-1}-1} \left| \sum_{j=1}^{i_1} \sum_{i_2=\nu_{k_2}+1}^{n_2} a_{ji_2}\phi_{ji_2}(x) \right|^2 + \left| \sum_{i_1=1}^{\nu_{k_1-1}} \sum_{i_2=\nu_{k_2}+1}^{n_2} a_i\phi_i(x) \right|^2 \right\}.$$

Полагая $\psi_k(x) = \sup\{b_n^{(1)}(x)|^2 : n_1 \ge \nu_{k_1}, \nu_{k_2} < n_2 < \nu_{k_2+1}\}$, легко видеть, что последовательность функций $F_{k_1}(x) = \sum_{k_2 \ge 0} \lambda_2(\nu_{k_2})\psi_k(x)$ не возрастает и

$$\int_X F_{k_1}(x)\,dx \le C_4(\alpha) \sum_{k_2=0}^{+\infty} \sum_{i_1=1}^{\nu_{k_1-1}} \sum_{i_2=\nu_{k_2}+1}^{\nu_{k_2+1}} a_i^2 \lambda_2^2(i_2) \le C_4(\alpha) \sum_{i \ge 0} a_i^2 \lambda^2(i) < +\infty.$$

По теореме Леви и признаку Вейерштрасса $b_n^{(1)}(x) = o_x\{1/\lambda_2(\nu_{k_2})\} = o_x\{1/\lambda_2(n_2)\}$ при $n_2 \to +\infty$ равномерно по n_1, что и завершает доказательство. □

Замечание 1. В соответствии с нашими обозначениями, оценка остатка (13) предполагает не только порядок приближения п.в., но и наличие мажоранты $F \in L^2$ (см., например, замечание 2 из [2]).

Для доказательства теоремы 1 нам понадобится также некоторая вариация теоремы 1 из [4] в виде вспомогательной леммы 2.

Лемма 2. *Пусть последовательности $\lambda(n_1, n_2) > 0$, $\nu_k = (\nu_{k_1}, \nu_{k_2}) \in \mathbb{Z}_+^2$, $\theta_1(k_1)$ и $\theta_2(k_2)$ таковы, что*

$$\frac{\lambda(\nu_k)}{\theta_1(k_1)\theta_2(k_2)} \downarrow 0 \ (k_* \to +\infty), \quad \log k_j = O(\theta_j(k_j)),\ j \in \{1, 2\}.$$

Тогда условие (3) влечет для любой ОНС $\phi \in \Phi$ п.в. на X оценку

$$S_{\nu_k}(x) = o_x\{\theta_1(k_1)\theta_2(k_2)/\lambda(\nu_k)\}, \quad k_* \to +\infty. \tag{19}$$

Кроме того, если $\lambda(\nu_k)/(\theta_1(k_1)\theta_2(k_2))$ — последовательность одного индекса k_1 (или k_2) и

$$\frac{\lambda(\nu_k)}{\theta_1(k_1)\theta_2(k_2)} \downarrow 0 \ (k_1 \to +\infty) \quad \text{или } (k_2 \to +\infty), \tag{20}$$

то при условии (3) для любой ОНС ϕ

$$S_{\nu_k}(x) = o_x\{\theta_1(k_1)\theta_2(k_2)/\lambda(\nu_k)\} \quad \text{при } k_1 \to +\infty \text{ равномерно по } k_2 \tag{21}$$

(или, соответственно, при $k_2 \to +\infty$ равномерно по k_1) п.в. на X.

Доказательство. Ограничимся доказательством справедливости оценки (21) в предположении (20) для $\nu_k = k$. Общий случай и утверждение (19) исчерпывается аналогично доказательству теоремы 1 из [4].

Предположим, для определенности, что $\lambda(k)/(\theta_1(k_1)\theta_2(k_2)) \equiv l(k_1)$. Построим последовательность $\{\Lambda(k) = \Lambda(k_1, k_2) > 0\}$ такую, что

$$\frac{\Lambda(k)}{\lambda(k)} \uparrow +\infty \quad \text{при } k_1 \to +\infty \text{ равномерно по } k_2, \tag{22}$$

$$\sum_{k\geq 0} a_k^2\Lambda^2(k) < +\infty, \tag{23}$$

$$\frac{\theta_1(k_1)\theta_2(k_2)}{\Lambda(k)} \equiv \beta(k_1)\uparrow +\infty \quad (k_1\to+\infty). \tag{24}$$

По теореме Дини, найдется такая положительная последовательность $\{\mu(k_1)\uparrow+\infty\}$, что $\sum_{k\geq 0} a_k^2\lambda^2(k)\mu^2(k_1) < +\infty$. Определим класс функций Ψ, заданных на $[0,+\infty)$,

$$\Psi = \{\psi(t) : \psi(t) > 0, \psi(t)\uparrow+\infty, \psi(t)/t\downarrow 0 \text{ при } t\to+\infty\}$$

и его подкласс

$$\Psi_0 = \{\psi\in\Psi : \psi(l^{-1}(k_1)) = l^{-1}(k_1)\delta(k_1);\ 0<\delta(k_1)\downarrow\ 0;\ \delta(k_1)\leq l(k_1)\mu(k_1)\}.$$

Полагая $\Lambda(k) = \lambda(k)\psi(l^{-1}(k_1))$, заметим, что условия (22)–(24) выполняются. В самом деле, $\Lambda(k)/\lambda(k) = \psi(l^{-1}(k_1))\uparrow+\infty$ при $k_1\to\infty$ равномерно по k_2 и

$$\sum_{k\geq 0} a_k^2\Lambda^2(k) \leq \sum_{k\geq 0} a_k\lambda^2(k)\mu(k_1) < +\infty, \quad \theta_1(k_1)\theta_2(k_2)/\Lambda(k) = \delta^{-1}(k_1)\equiv\beta(k_1)\uparrow+\infty.$$

Ряд

$$\sum_{i\geq 0}\beta^{-1}(i_1)a_i\phi_i(x) \equiv \sum_{i\geq 0} u_i(x) \tag{25}$$

сходится регулярно на основании теоремы 2 из [7] (см. также следствие 2 из [7]), так как

$$\sum_{i\geq 0} a_i^2\Lambda^2(i)\prod_{j=1,2}\log(i_j+2)^2/\theta_j^2(i_j) = O(1)\sum_{i\geq 0} a_i^2\Lambda^2(i) < \infty.$$

В силу регулярной сходимости ряда (25), по лемме 1.2 из [9, с. 8],

$$(\forall\varepsilon>0)\ (\exists N(\varepsilon)) : \quad \left|\sum_{i_1=n_1+1}^{p}\sum_{i_2=n_2+1}^{q} u_i\right| < \varepsilon \tag{26}$$

для всех $p>n_1$, $q>n_2$ и $n_1\geq N$ либо $n_2\geq N$.

Для произвольного фиксированного $\varepsilon>0$ найдем номер $n_1^0\geq N$, обладающий свойством (26) и рассмотрим разность

$$S_{k_1k_2} - S_{n_1^0k_2} = \sum_{i_1=n_1^0+1}^{k_1}\sum_{i_2=0}^{k_2}\beta(i_1)u_i(x), \quad k_1>n_1^0.$$

На основании преобразования Абеля,

$$|S_{k_1k_2}(x) - S_{n_1^0k_2}(x)| \leq \sum_{i_1=n_1^0+2}^{k_1}(\beta(i_1)-\beta(i_1-1))\left|\sum_{l=i_1}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{k_2} u_{li_2}\right| +$$

$$+\beta(n_1^0+1)\left|\sum_{i_1=n_1^0+1}^{+\infty}\sum_{i_2=0}^{k_2} u_i\right| + \beta(k_1)\left|\sum_{i_1=k_1+1}^{+\infty}\sum_{i_2=0}^{k_2} u_i\right|.$$

Поэтому $|S_{k_1k_2}(x) - S_{n_1^0k_2}(x)| \le \beta(k_1)\varepsilon$ п.в. на X при любом k_2. Так как, кроме того, из регулярной сходимости ряда (25) следует ограниченность частных сумм этого ряда, то п.в. на X

$$|S_{k_1k_2}(x)| \le |S_{k_1k_2}(x) - S_{n_1^0k_2}(x)| + |S_{n_1^0k_2}(x)| = o(\beta(k_1)) \tag{27}$$

при $k_1 \to +\infty$ равномерно по k_2.

Теперь (21) следует из (27), (24) и (22). $\square$

В отличие от двух предыдущих вспомогательных утверждений, в следующей лемме 3 рассматриваются обычные однократные ортогональные ряды и их средние Чезаро порядка $-1 < \alpha < 0$. В рамках формулировки и доказательства этой леммы $i, n \in \mathbb{Z}^+$. Нам понадобится тождество

$$S_p(x) - \sigma_p^\alpha(x) = \sum_{r=1}^{p} \left(\sum_{j=0}^{r-1} \frac{A_{p-j}^{\alpha-1}}{A_p^\alpha} \right) c_r\phi_r(x),\ \ \alpha \notin \{0, -1, -2, \dots\} \tag{28}$$

и оценка из [5, стр. 147, 148]

$$\sum_{j=0}^{r-1} \frac{A_{p-j}^{\alpha-1}}{A_p^\alpha} \le C(\alpha)\frac{r}{p+1}, \quad r \le p+1, \alpha > 0. \tag{29}$$

Лемма 3. *Пусть $-1 < \alpha < 0$ и положительная последовательность $\lambda(n) \uparrow +\infty$ удовлетворяет условиям*

$$\lambda(n)n^\alpha \uparrow, \quad \lambda(n)n^{\alpha-1} \downarrow 0. \tag{30}$$

Тогда найдется ортогональный ряд $\sum_{i\ge0} c_i\phi_i(x)$, коэффициенты которого удовлетворяют соотношению $\sum_{i\ge0} c_i^2\lambda^2(i) = +\infty$ и $\overline{\lim}_{n\to+\infty}\lambda(n)n^\alpha|f(x) - \sigma_n^\alpha(x)| = +\infty$ всюду на $[0,1]$.

Доказательство. Выберем последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{+\infty}$ так, чтобы выполнялись условия

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \ge p > 1, \quad \frac{\lambda(n_k)}{\lambda(n_{k+1})} \le q < 1, \quad \frac{\lambda(n_{k+1})}{n_{k+1}^{1-\alpha}} \le \frac{1}{k^2}\frac{\lambda(n_k)}{n_k^{1-\alpha}}. \tag{31}$$

Легко видеть, что, т.к. последовательность $\lambda(n)$ возрастает и удовлетворяет второму условию (30), это возможно. Пусть $c_{n_k} = k/\lambda(n_k)$ и $c_i = 0$, если $i \ne n_k$. Очевидно, что $\sum_{i\ge0} c_i^2\lambda^2(i) = +\infty$ и, в силу второго неравенства в (31), $\sum_{i\ge0} c_i^2 < +\infty$.

Рассмотрим ряд $\sum_{i\ge0} c_i r_i(x)$ по системе Радемахера $r_i(x)$. Обозначая через $f(x)$ его L^2–сумму, запишем

$$|f(x) - \sigma_{n_k}^\alpha(x)| \ge |\sigma_{n_k}^{1+\alpha}(x) - \sigma_{n_k}^\alpha(x)| - |f(x) - \sigma_{n_k}^{1+\alpha}(x)|.$$

Из определения $\sigma_n^\alpha(x)$, $r_n(x)$, коэффициентов c_{n_k}, второго условия (30), первого и третьего условия (31) получаем, что п.в. на $[0,1]$ выполняется неравенство

$$|\sigma_{n_k}^{1+\alpha}(x) - \sigma_{n_k}^\alpha(x)| = \frac{A_{n_k}^{-1-\alpha}}{1+\alpha}\left|\sum_{i=1}^{n_k} ic_iA_{n_k-i}^\alpha r_i(x)\right| = \frac{A_{n_k}^{-1-\alpha}}{1+\alpha}\left|\sum_{i=1}^{k} A_{n_k-n_i}^\alpha n_ic_{n_i}r_{n_i}(x)\right| \ge$$

$$\geq C_1(\alpha) n_k^{-1-\alpha}\left\{ n_k c_{n_k} - C_2(\alpha)\sum_{i=1}^{k-1}\frac{n_i c_{n_i}}{(n_k-n_i+1)^{-\alpha}}\right\} \geq C_1(\alpha) n_k^{-\alpha} c_{n_k} - C_3(\alpha) n_k^{-1}\sum_{i=1}^{k-1} n_i c_{n_i} \geq$$

$$\geq \frac{C_1(\alpha)k}{n_k^\alpha \lambda(n_k)} - \frac{C_3(\alpha)}{n_k}\sum_{i=1}^{k-1}\frac{i}{n_i^\alpha}\frac{n_i^{1-\alpha}}{\lambda(n_i)} \geq \frac{C_1(\alpha)k}{n_k^\alpha \lambda(n_k)} - \frac{C_4(\alpha) n_{k-1}^{1-\alpha}}{n_k \lambda(n_{k-1})} \geq$$

$$\geq \frac{C_1(\alpha)k}{n_k^\alpha \lambda(n_k)} - \frac{C_4(\alpha)}{(k-1)^2 n_k^\alpha \lambda(n_k)}, \quad k \geq 2.$$

Остается доказать, что $|f(x)-\sigma_{n_k}^{1+\alpha}(x)| = o_x\left\{n_k^{-\alpha}\lambda^{-1}(n_k)\right\}$. С этой целью воспользуемся равенством $f(x)-\sigma_{n_k}^{1+\alpha}(x) = f(x)-S_{n_k}(x)+S_{n_k}(x)-\sigma_{n_k}^{1+\alpha}(x)$. Полагая $\Lambda(k) = \lambda(n_k) n_k^\alpha \log k$, легко видеть, что

$$S_{n_k}(x) = \sum_{i\leq n_k} c_i r_i(x) = \sum_{i\leq k} c_{n_i} r_{n_i}(x) = s_k(x) \ \text{ и } \ \sum_{k\geq 0} c_k^2 \Lambda^2(k) < +\infty.$$

Тогда по теореме 1 из [6] получаем, что $f(x)-S_{n_k}(x) = o_x\left\{n_{k+1}^{-\alpha}\lambda^{-1}(n_{k+1})\right\}$. Далее, на основании тождества (28) и оценки (29) с учетом первого и третьего условия (31), выводим

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda^2(n_k) n_k^{2\alpha}\int_X |S_{n_k}(x)-\sigma_{n_k}^{1+\alpha}(x)|^2\, d\mu(x) \leq C_1(\alpha)\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^2(n_k)}{n_k^{2-2\alpha}}\sum_{i=1}^{n_k} i^2 c_i^2 =$$

$$= C_1(\alpha)\sum_{i=1}^{+\infty} i^2 c_i^2 \sum_{n_k\geq i}\frac{\lambda^2(n_k)}{n_k^{2-2\alpha}} \leq C_2(\alpha)\sum_{i\geq 1} c_i^2 \lambda^2(i) i^{2\alpha} = C_2(\alpha)\sum_{i\geq 1}\frac{k^2}{n_k^{-2\alpha}} < +\infty.$$

Следовательно, $\overline{\lim}_{k\to\infty}\lambda(n_k) n_k^\alpha |f(x)-\sigma_{n_k}^\alpha(x)| = +\infty$ п.в. на X. Изменяя при необходимости значения функций $r_n(x)$ на множестве меры нуль, приходим к требуему соотношению всюду на X. $\square$

Доказательство теоремы 1. (i) Пусть $\{\nu_k = (\nu_{k_1}, \nu_{k_2})\}$ — целочисленная решетка, удовлетворяющая условиям (9) и (10). Согласно лемме 1, для $\nu_k \leq n < \nu_{k+1}$ и $x \in X$ имеем равенство

$$f(x)-\sigma_n^{\alpha,0}(x) = f(x)-S_{\nu_k}(x)+\frac{\alpha}{n_1+1}S_{\nu_k}^{(1)}(x)+o_x\left\{\frac{(n_1+1)^{-\alpha}}{\lambda_1(n_1)}+\frac{\log(n_2-\nu_{k_2}+2)}{\lambda_2(n_2)}\right\}. \quad (32)$$

Поскольку, в силу леммы 3 из [6], для $\nu_{k_1} \leq n_1 < \nu_{k_1+1}$ имеем $k_1 \sim \log n_1$, то на основании теоремы 3 из [3]

$$f(x)-S_{\nu_k}(x) = o_x\left\{\frac{\log\log(n_1+1)}{\lambda_1(n_1)}+\frac{\log(n_2-\nu_{k_2}+1)}{\lambda_2(n_2)}\right\}. \quad (33)$$

Сумму $S_{\nu_k}^{(1)}(x)$ оценим, применяя лемму 2 для последовательностей $\bar\lambda(n) = \lambda_1(n_1)\times$ $\times\log(n_2+2)/(n_1+1)$, $\theta_1(k_1) = (\nu_{k_1}+1)^{-\alpha}$ и $\theta_2(k_2) = \log(\nu_{k_2}+2)$. Из (7) следует, что

$$\frac{\bar\lambda(\nu_k)}{\theta_1(k_1)\theta_2(k_2)} = \frac{\lambda_1(\nu_{k_1})}{(\nu_{k_1}+1)^{-\alpha+1}} \downarrow 0 \quad (k_1 \to +\infty),$$

а из (6) нетрудно получить соотношение

$$\sum_{i\geq 0} i_1^2 a_i^2 \bar{\lambda}^2(i) \leq \sum_{i\geq 0} a_i^2 \lambda_1^2(i_1) \log^2(i_2+2) \leq \sum_{i\geq 0} a_i^2 \lambda^2(i) < +\infty.$$

Поэтому (см. еще (6))

$$S_{\nu_k}^{(1)}(x) = o_x\left\{\frac{(n_1+1)^{1-\alpha_1}}{\lambda_1(n_1)}\right\} \quad \text{при } n_1 \to +\infty \text{ равномерно по } n_2. \tag{34}$$

Из (32), (33) и (34) следует (8).

(ii) Докажем окончательность оценки (8). Предположим,

$$\max\left\{\frac{(n_1+1)^{-\alpha}}{\lambda_1(n_1)},\ \frac{\log(n_2-\nu_{k_2}+2)}{\lambda_2(n_2)}\right\} = \frac{\log(n_2-\nu_{k_2}+2)}{\lambda_2(n_2)} \equiv \gamma(n)$$

хотя бы для одной последовательности $\{(n_1, n_2) : n_* \to +\infty\}$. По теореме 2 из [6] для любой последовательности $\omega(n_2) \to +\infty$ существует ортогональный ряд по ОНС $\{\Phi_{i_2}(x_2)\}$, $x_2 \in [0,1]$

$$\sum_{i_2\geq 0} c_{i_2}\Phi_{i_2}(x_2) \tag{35}$$

с L^2-суммой $f(x_2)$ и частными суммами $S_{n_2}(x_2)$ такой, что

$$\sum_{i_2\geq 0} c_{i_2}^2 \lambda_2^2(i_2) < +\infty, \tag{36}$$

и для всех $x_2 \in [0,1]$

$$\overline{\lim_{n_2\to+\infty}} \frac{\lambda_2(n_2)\omega(n_2)}{\log(\nu_{q_{n_2}+1} - \nu_{q_{n_2}} + 2)} |f(x_2) - S_{n_2-1}(x_2)| = +\infty. \tag{37}$$

Отметим также, что по построению ОНС $\{\Phi_{i_2}(x_2)\}$ не является полной и существует ОНС $\{\Psi_j(x_2)\}$ кусочно-постоянных функций, ортогональная к функциям $\{\Phi_{i_2}(x_2)\}$ на $[0,1]$.

На основе ортогонального ряда (35) и ОНС $\{\Psi_j(x_2)\}$, $x \in [0,1]$ построим двойной ортогональный ряд

$$\sum_{i\geq 0} a_i\phi_i(x), \tag{38}$$

полагая

$$a_{0,0} = 0, \quad a_i = a_{i_1,i_2} = \begin{cases} c_{i_2-1}, & i_1 = 0, i_2 \geq 1 \\ 0, & i_1 > 0, \end{cases} \tag{39}$$

а ОНС $\{\phi_i(x) = \phi_{i_1 i_2}(x), x \in X\}$ определим так, чтобы $\phi_{i_1,i_2}(x) = \Phi_{i_2-1}(x_2)$, если $i_2 \in \{1, 2, \dots\}$. Например, представим функции $\{\Phi_{i_2}(x_2)\}$ и $\{\Psi_j(x_2)\}$ в виде бесконечной матрицы (ϕ_{n_1,n_2}), $(n_1, n_2 \in \{0, 1, 2, \dots\})$ так, чтобы в нулевом столбце этой матрицы располагались функции $\{\Phi_{n_1}(x_2) = \phi_{n_1+1,0}(x),\}$ и $\phi_{0,0}(x) = \Psi_0(x_2)$. Затем, начиная с первой строки, будем располагать функции $\Psi_j(x_2), j \in \{1, 2, \dots\}$, например, “квадратным способом”

$$\phi_{0,1}(x) = \Psi_1(x_2); \quad \phi_{1,1} = \Psi_2(x_2); \quad \phi_{0,2}(x) = \Psi_3(x_2);$$

$$\phi_{1,2}(x) = \Psi_4(x_2); \quad \phi_{2,2}(x) = \Psi_5(x_2); \quad \phi_{2,1}(x) = \Psi_6(x_2) \quad \text{и т.д.}$$

Тогда двойной ряд (38) совпадает с однократным рядом (35), совпадают их L^2–суммы и

$$\sigma_n^\alpha(x) = \frac{1}{A_{n_1}^\alpha} \sum_{i \le n} A_{n_1-i_1}^\alpha a_i \phi_i(x) = \frac{1}{A_{n_1}^\alpha} \sum_{i_2 \le n_2-1} A_{n_1}^\alpha c_{i_2} \phi_{i_2}(x_2) = S_{n_2-1}(x_2).$$

Кроме того, благодаря (36) и (39), коэффициенты ряда (38) удовлетворяют условию (3).

Пусть $0 < \upsilon(n) \uparrow +\infty$. Тогда $\upsilon(n) \ge \upsilon_2(n_2) \equiv \omega(n_2)$. В силу (37), всюду на X

$$\varlimsup_{n_* \to +\infty} |\Delta_n^\alpha(x)| \upsilon(n) \gamma^{-1}(n) \ge \varlimsup_{n_2 \to +\infty} |f(x_2) - S_{n_2-1}(x_2)| \frac{\omega(n_2)\lambda_2(n_2)}{\log(\nu_{q_{n_2}+1} - \nu_{q_{n_2}} + 2)} = +\infty.$$

Аналогичными рассуждениями на основе однократного ортогонального ряда теоремы 3 из [2] нетрудно установить и необходимость коэффициентного условия (3). Если же

$$\max\left\{ \frac{(n_1+1)^{-\alpha}}{\lambda_1(n_1)}, \ \frac{\log(n_2 - \nu_{k_2} + 2)}{\lambda_2(n_2)} \right\} = \frac{(n_1+1)^{-\alpha}}{\lambda_1(n_1)},$$

то искомый двойной ортогональный ряд построим на основе однократного ортогонального ряда теоремы 1 (п. 2)) из [1] при доказательстве точности оценки и на основе леммы 3 — при доказательстве необходимости условия (3). □

Замечание 2. При ряде ограничений на рост последовательности $\lambda_2(n_2)$ можно установить окончательный порядок величины $\log(n_2 - \nu_{k_2} + 1)/\lambda_2(n_2)$ в оценке (8):

1) если $\lambda_2(n_2) \exp\{-n_2^\Theta\} \downarrow$ при некотором $\Theta \in (0,1)$, то при очевидном соотношении $\log(n_2 - \nu_{k_2} + 1) = O(\log(n_2+1))$ соответствующая оценка теоремы 1 является окончательной (см. теорему 4 из [2] и схему доказательства окончательности теоремы 1);

2) если последовательность $\lambda_2(n_2)$ удовлетворяет условиям

$$(\exists\, \theta \in (0,1)) : \ \frac{\log \lambda_2(n_2)}{n_2^\theta} \uparrow, \quad \frac{\log \lambda_2(n_2)}{n_2} \downarrow,$$

то $\log(n_2 - \nu_{k_2} + 1) = O\left\{\log(n_2/\log \lambda_2(n_2) + 1)\right\}$ (см. теорему 4 из [6]) и соответствующая оценка теоремы 1 является окончательной на основании теоремы 5 из [2] по схеме доказательства окончательности теоремы 1);

3) если же $\log \lambda_2(n_2)/n_2 \uparrow$, то $\log(n_2 - \nu_{k_2} + 2) = O(1)$. Действительно, обозначим $\Delta u_k = u_{k+1} - u_k$. Т.к. $\log \lambda_2(n_2)/n_2 \uparrow$, то $\Delta \log \lambda_2(n_2)/n_2 \ge 0$. С другой стороны,

$$\Delta \frac{\log \lambda_2(n_2)}{n_2} = \frac{\Delta \log \lambda_2(n_2)}{n_2} - \frac{\log \lambda_2(n_2+1)}{n_2(n_2+1)}.$$

Следовательно, $\Delta \log \lambda_2(n_2) \ge \log \lambda_2(n_2+1)/(n_2+1)$ и

$$(\nu_{k_2+1} - \nu_{k_2} - 1) \frac{\log \lambda_2(\nu_{k_2}+1)}{\nu_{k_2}+1} \le \sum_{i=\nu_{k_2}}^{\nu_{k_2+1}-2} \Delta \log \lambda_2(i) = \log \lambda_2(\nu_{k_2+1} - 1) - \log \lambda_2(\nu_{k_2}).$$

Отсюда и в силу того, что $\nu_{k_2} < n_2 \le \nu_{k_2+1}$, а последовательность ν_{k_2} определена в (9), получаем

$$n_2 - \nu_{k_2} + 2 = O(1)(\nu_{k_2+1} - \nu_{k_2} - 1) = O(1) \log \frac{\lambda_2(\nu_{k_2+1} - 1)}{\lambda_2(\nu_{k_2})} = O(1).$$

При этом соответствующая оценка теоремы 1 также является окончательной.

Замечание 3. Теорема 1 сохраняет силу в случае произвольного пространства (X, F, μ) конечной, положительной меры и является окончательной, если, кроме того, мера μ неатомическая. Не вызовет затруднений и переход к d-кратному случаю $(d > 2)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андриенко В.А. *О суммируемости ортогональных рядов методами Чезаро отрицательного порядка* // Изв. вузов. Матем. – 1988. – №9. – С. 3–10.
2. Andrienko V.A. *Rate of approximation by rectangular partial sums of double orthogonal series* // Anal.Math. – 1996. – V. 22. – P. 243–266.
3. Андриенко В.А. *О скорости сходимости кратных ортогональных рядов* // Укр. мат. журн. – 1990. – Т.42, №10. – С. 1307–1314.
4. Андриенко В.А. *О порядке роста прямоугольных частных сумм двойных ортогональных рядов* // Укр. мат. журн. – 1999. – Т.51, №10. – С. 1299–1310.
5. Андриенко В.А., Гърневска Л.В. *О скорости суммируемости ортогональных рядов средними Чезаро* // Год. ВУЗ. Прилож. матем. – 1982. – Т.18, №4. – С. 167–174.
6. Коляда В.И. *О скорости сходимости ортогональных рядов* // Укр. мат. журн. – 1973. – Т.25, №1. – С. 25–38.
7. Móricz F. *On the convergence in a restricted sense of multiple series* // Anal.math. – 1979. – V.5, no 2. – P. 135–147.
8. Tandori K. *Über die Konvergenz der Orthogonalreihen II* // Acta Sci. Math. Szeged. – 1964. – B.25, no 3–4, S. 219–323.
9. Янушаускас А.И. Двойные ряды. – Новосибирск: Наука, 1980. – 224 с.

andrienko@paco.net, baier@ukr.net

Поступило 28.09.2004