УДК 517.95

С. П. Лавренюк, Н. П. Процах

ВАРІАЦІЙНІ УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНІ НЕРІВНОСТІ БЕЗ ПОЧАТКОВИХ УМОВ

S. P. Lavrenyuk, N. P. Protsakh. *Variational ultraparabolic inequalities without initial data*, Matematychni Studii, **23** (2005) 57–67.

Nonlinear ultraparabolic inequalities are considered in an unbounded domain with respect to the time variable. The definitions of the strong and weak solution of the problem without initial data for variational inequalities are given. The solvability of such problems without any assumptions at $t \to -\infty$ is obtained.

С. П. Лавренюк, Н. П. Процах. *Вариационные ультрапараболические неравенства без начальных условий* // Математичні Студії. – 2005. – Т.23, №1. – С.57–67.

В неограниченной области по временной переменной исследовано нелинейные ультрапараболические неравенства. Введено понятия сильного и слабого решения задачи без начальных условий для вариационных неравенств. Получена разрешимость этих задач без ограничений на поведение решения при $t \to -\infty$.

Задачі для ультрапараболічних рівнянь та нерівностей виникають при дослідженні деяких явищ фізики (дифузійних процесів, теорії бінарних електролітів, розсіюванні електронів), в теорії ймовірностей та інших областях науки (див., наприклад, [1-7]).

Розв'язність задачі Коші у класах функцій з обмеженим зростанням та у класах Гельдера встановлено у [8-10], мішаних задач для лінійних ультрапараболічних рівнянь у обмежених чи необмежених за просторовими змінними областях — у [11-13], для нелінійних ультрапараболічних рівнянь в обмежених областях — у [14, 15], задач без початкових умов — у [16-17], причому в [17] розв'язність доведено без припущень стосовно поведінки розв'язку на нескінченності. Дослідженню задач без початкових умов для нелінійних параболічних нерівностей присвячено праці [18-22]. У працях [18-20] вивчено існування та єдиність розв'язку нерівностей у класах функцій, які можуть зростати при $t \to -\infty$ не швидше за $e^{-\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, у [21, 22] знайдено класи нелінійних параболічних нерівностей, існування та єдиність розв'язку яких не залежить від зростання вихідних даних на нескінченності і без обмежень на поведінку розв'язку на нескінченності. Задачі для нелінійних ультрапараболічних нерівностей в обмежених областях досліджено в [23], [24].

У цій статті в необмеженій за часовою змінною області досліджено нелінійні ультрапараболічні нерівності. Аналогічно, як у статті [26], яка присвячена гіперболічним системам першого порядку, введено поняття сильного і слабкого розв'язку задачі без

2000 *Mathematics Subject Classification:* 35K65, 35K70.

початкових умов для ультрапараболічних нерівностей. Розв'язність таких задач одержано без припущень на поведінку розв'язку на нескінченності. При цьому використано методи для параболічних нерівностей з [21, 22] та гіперболічних [26] і параболічних [23] рівнянь.

Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – обмежена область з межею Γ; $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\operatorname{mes}(\Gamma_1 \cap \Gamma_2) = 0$, $\operatorname{mes}\Gamma_1 \neq 0$, $\Gamma \in C^1$; $D = \Omega \times (0, y_0)$, $Q_T = D \times (-\infty, T)$, де $y_0 < +\infty$, $T < +\infty$; $Q_{t_1,t_2} = D \times (t_1, t_2)$; $D_\tau = \{(x, y, \tau) : (x, y) \in D\} = Q_T \bigcap \{t = \tau\}$, $\Pi_T = (0, y_0) \times (-\infty, T)$; $S = \Gamma \times (0, y_0) \times (-\infty, T)$; $S_1 = \Gamma_1 \times (0, y_0) \times (-\infty, T)$; $S_2 = \Gamma_2 \times (0, y_0) \times (-\infty, T)$; $S_{t_1,t_2} = \Gamma \times (0, y_0) \times (t_1, t_2)$, $S^1_{t_1,t_2} = \Gamma_1 \times (0, y_0) \times (t_1, t_2)$, $S^2_{t_1,t_2} = \Gamma_2 \times (0, y_0) \times (t_1, t_2)$, де $t_1 < t_2 \leqslant T$.

Введемо простори $W_0(\Omega) = W_0^{1,p}(\Omega)$, $W_1(\Omega) = \{v : \ v \in L^2(\Omega),\ v_{x_i} \in L^p(\Omega),\ i \in \{1, 2, \dots, n\};\ v|_{\Gamma_1} = 0\}$ з нормою $\|v; W_1(\Omega)\| = \|v; L^2(\Omega)\| + \sum\limits_{i=1}^{n} \|v_{x_i}; L^p(\Omega)\|$, де $p > 2$. Нехай $W(\Omega)$ — замкнений підпростір простору $W_1(\Omega)$ такий, що $W_0(\Omega) \subset W(\Omega)$. Простір $U(\Omega)$ є підпростором $H^1(\Omega) \cap W_1^p(\Omega)$ таким, що вкладення $W(\Omega) \subset U(\Omega)$ є щільним і неперервним, K є опуклою і замкненою підмножиною в $W(\Omega)$ і $U(\Omega)$, яка містить нульовий елемент; $V_0(Q_{t_1,t_2}) = \{v(x, y, t), (x, y, t) \in Q_{t_1,t_2} : v \in L^2(Q_{t_1,t_2});\ v_{x_i} \in L^p(Q_{t_1,t_2}), 1 \leqslant i \leqslant n; v|_{S^1_{t_1,t_2}} = 0\}$, $V_1(Q_{t_1,t_2}) = \{v(x, y, t), (x, y, t) \in Q_{t_1,t_2} : v, v_t, v_y \in L^2(Q_{t_1,t_2});\ v_{x_i} \in L^p(Q_{t_1,t_2}),\ 1 \leqslant i \leqslant n;\ v|_{y=y_0} = 0;\ v|_{S^1_{t_1,t_2}} = 0\}$ відповідно з нормами $\sum\limits_{i=1}^{n} \|v_{x_i}; L^p(Q_{t_1,t_2})\| + \|v; L^2(Q_{t_1,t_2})\|$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \|v_{x_i}; L^p(Q_{t_1,t_2})\| + \|v; L^2(Q_{t_1,t_2})\| + \|v_y; L^2(Q_{t_1,t_2})\| + \|v_t; L^2(Q_{t_1,t_2})\|$; $V_{0,\mathrm{loc}}(\overline{Q}_T) = \{v : v \in V_0(Q_{t_1,T})\ \forall t_1 < T\}$, $V_{1,\mathrm{loc}}(\overline{Q}_T) = \{v : v \in V_1(Q_{t_1,T})\ \forall t_1 < T\}$.

У просторі $V_{1,\mathrm{loc}}(\overline{Q}_T)$ розглянемо варіаційну нерівність

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \Big[u_t(v-u) - \lambda(x,y,t)u_y(v-u) + \\ + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)|u_{x_i}|^{p-2}u_{x_i}(v_{x_i} - u_{x_i}) - f(x,y,t)(v-u)\Big]\,dx\,dy\,dt \geqslant 0, \tag{1}$$

де $v \in V_{0,\mathrm{loc}}(\overline{Q}_T)$, $t_1,\ t_2 \in (-\infty, T]$, $t_1 < t_2$.

Припустимо, що для коефіцієнтів нерівності (1) виконуються такі умови:

$$a_i \in C(\overline{\Omega}),\ a_i(x) \geqslant a_0 > 0\ \forall x \in \Omega,\ i \in \{1, 2, \dots, n\}; \tag{$\mathbf{A}$}$$

$$\lambda \in C((-\infty, T]; L^\infty(D)),\ \lambda_y \in L^\infty_{\mathrm{loc}}((-\infty, T]; L^\infty(D)); \lambda(x,y,t) \not\equiv 0; \tag{$\mathbf{L}$}$$
$$\lambda(x,y,t) \geqslant 0, \lambda_y(x,y,t) \geqslant 0 \text{ для майже всіх } (x,y,t) \in Q_T;$$

$$f \in L^{p'}_{\mathrm{loc}}((-\infty, T]; L^{p'}(D)),\ \ \frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1. \tag{$\mathbf{F}$}$$

Означення 1. Функцію $u \in V_{1,\mathrm{loc}}(\overline{Q}_T) \cap C((-\infty; T]; L^2(D))$, $u(\cdot, y, t) \in K$ для майже всіх $(y, t) \in \Pi_T$, яка задовольняє (1) для всіх $t_1,\ t_2 \in (-\infty, T]$, $t_1 < t_2$ і будь-яких функцій $v \in V_{0,\mathrm{loc}}(\overline{Q}_T)$ таких, що $v(\cdot, y, t) \in K$ для майже всіх $(y, t) \in \Pi_T$, називатимемо *сильним розв'язком* цієї нерівності.

Означення 2. Функцію u називатимемо *слабким розв'язком* нерівності (1), якщо вона є границею в просторі $V_{0,\mathrm{loc}}(\overline{Q}_T) \cap C((-\infty; T]; L^2(D))$ послідовності функцій $\{u^k\}_{k=1}^{\infty}$

таких, що для кожного $k \in \mathbb{N}$ функція u^k є сильним розв'язком варіаційної нерівності

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \Big[u_t(v-u) - \lambda(x,y,t)u_y(v-u)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n} a_i(x)|u_{x_i}|^{p-2}u_{x_i}(v_{x_i}-u_{x_i}) - f^k(x,y,t)(v-u)\Big]\,dx\,dy\,dt \geqslant 0, \qquad (2)$$

де послідовність $\{f^k\}_{k=1}^{+\infty}$ є збіжною до функції f у просторі $L^{p'}_{\text{loc}}((-\infty,T];L^{p'}(D))$.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* (**A**), (**L**), (**F**), $p>2$, $\lambda_t \in L^{\infty}_{\text{loc}}((-\infty,T];L^{\infty}(D))$. *Тоді існує слабкий розв'язок нерівності (1).*

Доведення. Розглянемо послідовність функцій $\{f^k\}_{k=1}^{+\infty}$, збіжну до f у просторі $L^{p'}_{\text{loc}}((-\infty,T];L^{p'}(D))$, таких, що f^k, f^k_y, $f^k_t \in L^2_{\text{loc}}((-\infty,T];L^2(D))$ і $f^k|_{y=y_0}=0$ для всіх натуральних k. Введемо функції

$$F^k(x,y,t) = \begin{cases} f^k(x,y,t)\xi(t), & (x,y,t) \in Q_{T-k,T}, \\ 0, & (x,y,t) \in Q_{T-k}, \end{cases}$$

де $\xi \in C^1(\mathbb{R})$, $0 \leqslant \xi(t) \leqslant 1$, $\xi(t)=1$ при $t \geqslant T-k+1$, $\xi(t)=0$ при $t \leqslant T-k$. Зазначимо, що $F^k \to f$ у просторі $L^{p'}_{\text{loc}}((-\infty,T];L^{p'}(D))$ при $k \to +\infty$.

Розглянемо в області $Q_{T-k,T}$ варіаційну нерівність

$$\int\limits_{Q_{T-k,t_2}} \Big[u_t(v-u) - \lambda(x,y,t)u_y(v-u) +$$

$$+\sum_{i=1}^{n} a_i(x)|u_{x_i}|^{p-2}u_{x_i}(v_{x_i}-u_{x_i}) - F^k(x,y,t)(v-u)\Big]\,dx\,dy\,dt \geqslant 0, \qquad (3)$$

де $t_2 \in (T-k,T]$, з початковою умовою

$$u(x,y,T-k)=0.$$

У праці [24] доведено існування розв'язку цієї нерівності: існує функція $u^k \in V_1(Q_{T-k,T})$, $u^k \in K$ майже для всіх $(y,t) \in \Pi_{T-k,T}$, яка задовольняє (3) для всіх $t_2 \in (T-k,T]$ і всіх $v \in V_0(Q_{T-k,T})$ таких, що $v(\cdot,y,t) \in K$ майже для всіх $(y,t) \in \Pi_{T-k,T}$. Продовжимо кожну з функцій u^k нулем в область Q_{T-k} і збережемо для неї те саме позначення. Очевидно, що функція u^k задовольняє нерівність

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \Big[u^k_t(v-u^k) - \lambda(x,y,t)u^k_y(v-u^k)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n} a_i(x)|u^k_{x_i}|^{p-2}u^k_{x_i}(v_{x_i}-u^k_{x_i}) - F^k(x,y,t)(v-u^k)\Big]\,dx\,dy\,dt \geqslant 0 \qquad (4)$$

для всіх $v \in V_{0,\text{loc}}(\overline{Q}_T)$, $v(\cdot,y,t) \in K$ для майже всіх $(y,t) \in \Pi_T$ та всіх $t_1 < t_2 \leqslant T$, тобто є сильним розв'язком цієї нерівності.

Виберемо функцію $\theta_1(t)$, $t \in \mathbb{R}$ ([25, с. 24]) таку, що $\theta_1 \in C^1(\mathbb{R})$, $\theta_1'(t) \geqslant 0$ на $\mathbb{R}$, $0 \leqslant \theta_1(t) \leqslant 1$; $\theta_1(t) = 0$, якщо $t \in (-\infty; -1]$, $\theta_1(t) = \exp\{-1/(t+1)\}$, якщо $t \in (-1; -1/2]$, $\theta_1(t) \geqslant \exp\{-2\}$, якщо $t \in (-1/2; 0)$, $\theta_1(t) = 1$, якщо $t \in [0; +\infty)$. Зазначимо, що $\sup\{\theta_1'(t)\theta_1^{-\varkappa}(t) : t \in \mathbb{R}\} \leqslant C$, де $0 < \varkappa < 1$, C — стала, яка залежить тільки від $\varkappa$.

Нехай $v \in V_{1,\mathrm{loc}}(\overline{Q}_T)$. Запишемо нерівність (4) у такому вигляді

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \Bigg[v_t(v-u^k) - \lambda(x,y,t)v_y(v-u^k) - \frac{\lambda_y(x,y,t)}{2}(v-u^k)^2 + \\ + \sum_{i=1}^n a_i(x)|u^k_{x_i}|^{p-2}u^k_{x_i}(v_{x_i} - u^k_{x_i}) - F^k(x,y,t)(v-u^k) \Bigg]\, dx\,dy\,dt \geqslant \\ \geqslant \frac{1}{2}\int\limits_D (v-u^k)^2 \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} dx\,dy + \frac{1}{2}\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Omega \lambda(x,0,t)(v-u^k)^2\Big|_{y=0} dx\,dt.$$

Позначимо $\theta(t) = \theta_1\left(\frac{t-t_1}{\delta}\right)$, $\delta > 0$.

Доведемо фундаментальність послідовності $\{u^k\}_{k=1}^\infty$ у просторах $C((-\infty,T]; L^2(D))$, $V_{0,\mathrm{loc}}(\overline{Q}_T)$. Позначимо $\omega^{k,m} = (u^k + u^m)/2$. Подібно, як в [22, с. 60] доводимо, що функції u^s, $s \in \{k,m\}$, задовольняють нерівність

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \Bigg\{ (v-u^s)^2\theta'(t) + \Bigg[v_t(v-u^s) - \lambda(x,y,t)v_y(v-u^s) - \frac{\lambda_y(x,y,t)}{2}(v-u^s)^2 + \\ + \sum_{i=1}^n a_i(x)|u^s_{x_i}|^{p-2}u^s_{x_i}(v_{x_i} - u^s_{x_i}) - F^s(v-u^s) \Bigg]\theta(t) \Bigg\}\, dx\,dy\,dt \geqslant \\ \geqslant \frac{1}{2}\int\limits_D (v-u^s)^2\theta(t) \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} dx\,dy + \frac{1}{2}\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Omega \lambda(x,0,t)(v-u^s)^2\theta(t)\Big|_{y=0} dx\,dt$$

для всіх $v \in V_{1,\mathrm{loc}}(\overline{Q}_T)$, $v(\cdot,y,t) \in K$, для майже всіх $(y,t) \in \Pi_T$ та всіх t_1, t_2 $(t_1 < t_2 \leqslant T)$.

Додамо одержані нерівності для $s = k$ і $s = m$ та виберемо в отриманій нерівності $t_1 - \delta$ та ζ замість відповідно t_1 і t_2, де ζ — довільне число з проміжку $[t_1, t_2]$, а функцію $v = \omega^{k,m}$. Матимемо

$$\int\limits_{Q_{t_1-\delta,\zeta}} \Bigg\{ \frac{1}{2}(u^m-u^k)^2\theta'(t) + \Bigg[-\frac{\lambda_y(x,y,t)}{4}(u^m-u^k)^2 + \\ + \sum_{i=1}^n a_i(x)(|u^k_{x_i}|^{p-2}u^k_{x_i} - |u^m_{x_i}|^{p-2}u^m_{x_i})(u^k_{x_i} - u^m_{x_i}) - (F^k - F^m)(u^k - u^m) \Bigg]\theta(t) \Bigg\}\, dx\,dy\,dt \geqslant \\ \geqslant \frac{1}{4}\int\limits_D (u^m-u^k)^2 \Big|_{t=\zeta} dx\,dy + \frac{1}{4}\int\limits_{t_1-\delta}^{\zeta}\int\limits_\Omega \lambda(x,0,t)(u^m-u^k)^2\theta(t)\Big|_{y=0} dx\,dt. \qquad (5)$$

Виберемо $T - k < t_1 - \delta$, $T - m < t_1 - \delta$. Тоді $F^k - F^m \equiv 0$ при $t \in [t_1 - \delta, t_2]$ Перетворимо та оцінимо кожний доданок нерівності (5). Як і в [22], одержуємо оцінку

$$\mathcal{I}_1 := \frac{1}{2}\int\limits_{Q_{t_1-\delta,\zeta}} (u^m-u^k)^2\theta'(t)\,dx\,dy\,dt \leqslant \frac{\delta_1}{p}\int\limits_{Q_{t_1-\delta,\zeta}} |u^m-u^k|^p\theta(t)\,dx\,dy\,dt + C_1[\delta_1\delta]^{-2/(p-2)},$$

де $\delta_1>0$. Враховуючи умову **(A)** і нерівність Фрідріхса ([27, с. 50]), матимемо

$$\mathcal{I}_2 := \int\limits_{Q_{t_1-\delta,\zeta}} \sum_{i=1}^{n} a_i(x)(|u^k_{x_i}|^{p-2}u^k_{x_i} - |u^k_{x_i}|^{p-2}u^k_{x_i})(u^k_{x_i}-u^m_{x_i})\theta(t)\,dx\,dy\,dt \geqslant$$

$$\geqslant a_0\int\limits_{Q_{t_1-\delta,\zeta}} \sum_{i=1}^{n}|u^m_{x_i}-u^k_{x_i}|^p\theta(t)\,dx\,dy\,dt \geqslant a_0C_2\int\limits_{Q_{t_1-\delta,\zeta}} \sum_{i=1}^{n}|u^m-u^k|^p\theta(t)\,dx\,dy\,dt+$$

$$+\frac{a_0}{2}\int\limits_{Q_{t_1-\delta,\zeta}} \sum_{i=1}^{n}|u^m_{x_i}-u^k_{x_i}|^p\theta(t)\,dx\,dy\,dt,$$

де $C_2=C_2(n,p,\Gamma_1)$. Після цих перетворень отримаємо нерівність

$$\frac{1}{4}\int\limits_{D_\zeta}(u^k-u^m)^2\,dx\,dy + \frac{1}{4}\int\limits_{t_1-\delta}^{\zeta}\int\limits_{\Omega}\lambda(u^k(x,0,t)-u^m(x,0,t))^2\theta(t)\,dx\,dt + \int\limits_{Q_{t_1-\delta,\zeta}}\left[\frac{\lambda_y(x,y,t)}{4}\times\right.$$

$$\left.\times(u^k-u^m)^2 + \left(\frac{-\delta_1}{p}+a_0C_2\right)|u^k-u^m|^p + \frac{a_0}{2}\sum_{i=1}^{n}|u^k_{x_i}-u^m_{x_i}|^p\right]\theta(t)\,dx\,dy\,dt \leqslant \qquad (6)$$

$$\leqslant C_1[\delta\delta_1]^{-2/(p-2)}.$$

Виберемо $\delta_1 = a_0pC_2/2$. Нехай $\varepsilon>0$ — довільне фіксоване число. Виберемо δ таким, щоб права частина нерівності (6) була менша за ε. Тоді для довільного фіксованого t_1, $t_1<T$ послідовність $\{u^k\}_{k=1}^{\infty}$ є фундаментальною у просторах $C([t_1,T];L^2(D))$ та $V_0(Q_{t_1,T})$. Звідси одержуємо збіжності

$$u^k\to u \text{ в } C((-\infty,T];L^2(D)); \quad u^k\to u \text{ в } V_{0,\mathrm{loc}}(\overline{Q}_T).$$

Оскільки F^k збігається до f в $L^{p'}_{\mathrm{loc}}((-\infty;T];L^{p'}(D))$, то за означенням 2 функція u є слабким розв'язком варіаційної нерівності (1). □

Теорема 2. *Нехай виконуються умови (A), (L) і $p>2$. Тоді нерівність (1) не може мати більше одного слабкого розв'язку.*

Доведення. Нехай існує два слабкі розв'язки u_1 і u_2 варіаційної нерівності (1). За означенням слабкого розв'язку існують послідовності $\{u^k_l\}_{k=1}^{+\infty}, l\in\{1;2\}$, які збігаються до u_l у просторі $V_{0,\mathrm{loc}}(\overline{Q}_T)\cap C((-\infty,T];L^2(D))$ при $k\to\infty$, де u^k_l задовольняє нерівність

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}}\left[u^k_{lt}(w-u^k_l) - \lambda(x,y,t)u^k_{ly}(w-u^k_l) + \sum_{i=1}^{n}a_i(x)|u^k_{lx_i}|^{p-2}u^k_{lx_i}(w_{x_i}-u^k_{lx_i}) - f^l_k(x,y,t)\times\right.$$

$$\left.\times(w-u^k_l)\right]\,dx\,dy\,dt \geqslant 0,\ l\in\{1,2\},$$

$w \in V_{0,\mathrm{loc}}(\overline{Q}_T)$, $w(\cdot, y, t) \in K$ для майже всіх $(y,t) \in \Pi_T$, а послідовності $\{f_l^k\}_{k=1}^{+\infty}$ збігаються до f у просторі $L^{p'}_{\mathrm{loc}}((-\infty;T];L^{p'}(D))$. Додавши ці нерівності, матимемо

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \big[u_{1t}^k(w-u_1^k) + u_{2t}^k(w-u_2^k) - \lambda(x,y,t)u_{1y}^k(w-u_1^k) - \lambda(x,y,t)u_{2y}^k(w-u_2^k) +$$
$$+\sum_{i=1}^n a_i(x)|u_{1x_i}^k|^{p-2}u_{1x_i}^k(w_{x_i}-u_{1x_i}^k) + \sum_{i=1}^n a_i(x)|u_{2x_i}^k|^{p-2}u_{2x_i}^k(w_{x_i}-u_{2x_i}^k) -$$
$$-f_1^k(w-u_1^k) + f_2^k(w-u_2^k)\big]\, dx\,dy\,dt \geqslant 0.$$

Як і в [22, с. 60], доводимо, що u_s^k задовольняє нерівність

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \Bigg\{(w-u_s^k)^2\theta'(t) + \Bigg[w_t(w-u_s^k) - \lambda(x,y,t)w_y(w-u_s^k) - \frac{\lambda_y(x,y,t)}{2}(w-u_s^k)^2 +$$
$$+\sum_{i=1}^n a_i(x)|u_{sx_i}^k|^{p-2}u_{sx_i}^k(w_{x_i}-u_{sx_i}^k) - f_s^k(w-u_s^k)\Bigg]\theta(t)\Bigg\}\, dx\,dy\,dt \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{2}\int\limits_D (w-u_s^k)^2\theta(t)\Big|_{t=t_1}^{t=t_2} dx\,dy + \frac{1}{2}\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Omega \lambda(x,0,t)(w-u_s^k)^2\theta(t)\Big|_{y=0} dx\,dt,\ \ s \in \{1,2\}.$$

Позначимо $\omega^{1,2} = (u_1+u_2)/2$. Додамо одержані нерівності та виберемо $t_2 = \tau$, $w = \omega^{1,2}$, $t_2 \in (t_1, T]$. Матимемо

$$\int\limits_{Q_{t_1-\delta,\zeta}} \Bigg\{\frac{1}{2}(u_1^k-u_2^k)^2\theta'(t) + \Bigg[-\frac{\lambda_y(x,y,t)}{4}(u_1^k-u_2^k)^2 +$$
$$+\sum_{i=1}^n a_i(x)(|u_{2x_i}^k|^{p-2}u_{2x_i}^k - |u_{1x_i}^k|^{p-2}u_{1x_i}^k)(u_{2x_i}^k-u_{1x_i}^k) - (f_1^k-f_2^k)(u_2^k-u_1^k)\Bigg]\theta(t)\Bigg\}\, dx\,dy\,dt \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{4}\int\limits_D (u_1^k-u_2^k)^2\Big|_{t=\zeta} dx\,dy + \frac{1}{4}\int\limits_{t_1-\delta}^{\zeta}\int\limits_\Omega \lambda(x,0,t)(u_1^k-u_2^k)^2\theta(t)\Big|_{y=0} dx\,dt.$$

Подібно, як з (5), отримуємо нерівність

$$\frac{1}{4}\int\limits_{D_\zeta}(u_1^k-u_2^k)^2\,dx\,dy + \frac{1}{4}\int\limits_{t_1-\delta}^{\zeta}\int\limits_\Omega \lambda(u_1^k(x,0,t)-u_2^k(x,0,t))^2\theta(t)\,dx\,dt +$$
$$+\int\limits_{Q_{t_1-\delta,\zeta}} \Bigg[\frac{\lambda_y(x,y,t)}{4}(u_1^k-u_2^k)^2 + \left(\frac{-\delta_1}{p} + a_0C_2\right)|u_1^k-u_2^k|^p +$$
$$+\frac{a_0}{2}\sum_{i=1}^n |u_{1x_i}^k - u_{2x_i}^k|^p\Bigg]\theta(t)\,dx\,dy\,dt \leqslant C_1[\delta\delta_1]^{-2/(p-2)} + \int\limits_{Q_{t_1-\delta,\zeta}} |f_1^k-f_2^k|^{p'}\,dx\,dy\,dt. \qquad (7)$$

Нехай t_0 — довільне фіксоване з проміжка $(-\infty, T)$ і $t_1 < t_0$. За нерівністю трикутника

$$\|f_2^k - f_1^k\|_{L^{p'}(Q_{t_1-\delta,\zeta})} \leqslant \|f_2^k - f\|_{L^{p'}(Q_{t_1-\delta,\zeta})} + \|f_1^k - f\|_{L^{p'}(Q_{t_1-\delta,\zeta})}.$$

Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ та виберемо δ з умови: $C_1[\delta\delta_1]^{-2/(p-2)} < \varepsilon^2/8$. Оскільки кожна з послідовностей $\{f_l^k\}_{k=l}^{\infty}$, $l \in \{1,2\}$ є збіжна до функції f у просторі $L^{p'}_{\mathrm{loc}}((-\infty,T);L^{p'}(D))$, то існує таке натуральне $k_0(\varepsilon)$, що для всіх $k > k_0$

$$\|f_l^k - f\|_{L^{p'}(Q_{t_1-\delta,\zeta})} < \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{8}\right)^{2/p'}, \;\; l \in \{1,2\}.$$

Тоді з (7) отримуємо $\|u_2^k - u_1^k\|_{C([t_0,T];L^2(D))} < \varepsilon$. Оскільки $\|u_2 - u_1\|_{C([t_0,T];L^2(D))} \leqslant \|u_2^k - u_2\|_{C([t_0,T];L^2(D))} + \|u_2^k - u_1^k\|_{C([t_0,T];L^2(D))} + \|u_1^k - u_1\|_{C([t_0,T];L^2(D))}$ і $\|u_l^k - u_l\|_{C([t_0,T];L^2(D))} \to 0$, $l \in \{1,2\}$, при $k \to +\infty$, то існує таке натуральне $k_1 \geqslant k_0$, що $\|u_2 - u_1\|_{C([t_0,T];L^2(D))} \leqslant 3\varepsilon$ для всіх $k > k_1$. Оскільки t_0 і ε довільні, то $u_2(x,y,t) = u_1(x,y,t)$ майже скрізь в Q_T. Теорему доведено. □

Теорема 3. *Нехай виконуються умови* (**A**), (**L**), (**F**), $p > 2$, $\lambda_t \in L^{+\infty}_{loc}((-\infty,T];L^{+\infty}(D))$,

$$(\forall\, t \in (-\infty, T-1]) : \quad \int\limits_{Q_{t,t+1}} |f(x,y,\tau)|^{p'}\,dx\,dy\,d\tau \leqslant M_0. \tag{8}$$

Тоді існує така стала M, що слабкий розв'язок нерівності (1) задовольняє оцінки

$$\int\limits_{Q_{t,t+1}} \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^p\,dx\,dy\,d\tau \leqslant M \quad (t \in (-\infty, T-1]), \qquad \int\limits_{D_t} |u|^2\,dx\,dy \leqslant M \quad (t \in (-\infty,T]).$$

Доведення. Розглянемо послідовність функцій $\{u^k\}_{k=1}^{+\infty}$, яка є фундаментальною у просторі $V_{0,\mathrm{loc}}(\overline{Q}_T) \cap C((-\infty,T];L^2(D))$ та задовольняє означення 2. Розіб'ємо $(-\infty;T]$ на інтервали $[T-j-1, T-j]$, де j приймає значення $0,1,2,\ldots$.

Позначимо через $t_j \in [T-j-1, T-j]$ таке значення t, що

$$\sup\left\{\int\limits_{D_t} |u^k|^2\,dx\,dy : t \in [T-j-1, T-j]\right\} = \int\limits_{D_{t_j}} |u^k|^2\,dx\,dy.$$

В нерівності (2) виберемо $v \equiv 0$ і для довільних s і t, $s < t$ одержимо

$$\int\limits_{Q_{s,t}} \left[u_t^k u^k - \lambda(x,y,t)u_y^k u^k + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)|u_{x_i}^k|^p - f^k(x,y,t)u^k\right] dx\,dy\,dt \leqslant 0.$$

Оцінивши кожний доданок, звідси матимемо нерівність

$$\int\limits_{D_t} |u^k|^2\,dx\,dy + \int\limits_{s}^{t}\int\limits_{\Omega} \lambda(x,0,t)|u^k|^2\,dx\,dy + \left(2a_0 - \delta_2\frac{C_2}{p}\right)\int\limits_{Q_{s,t}} \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}^k|^p\,dx\,dy\,dt +$$
$$+ \int\limits_{Q_{s,t}} \lambda_y(x,y,t)|u^k|^2\,dx\,dy\,dt \leqslant \int\limits_{D_s} |u^k|^2\,dx\,dy + C_3(\delta_2,p)\int\limits_{Q_{s,t}} |f^k(x,y,t)|^{p'}\,dx\,dy\,dt,$$

де $\delta_2 > 0$. Вибравши $\delta_2 = a_0p/C_2$, отримаємо

$$\int\limits_{D_t} |u^k|^2\,dx\,dy + a_0\int\limits_{Q_{s,t}} \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}^k|^p\,dx\,dy\,dt \leqslant \int\limits_{D_s} |u^k|^2\,dx\,dy + {}_3\int\limits_{Q_{s,t}} |f^k(x,y,t)|^{p'}\,dx\,dy\,dt. \tag{9}$$

Позначимо через $M_1 = C_2 \cdot \left(\frac{3C_3M_0}{a_0}\right)^{2/p} \cdot (\operatorname{mes}\Omega \cdot y_0)^{\frac{p-2}{p}} + \frac{3C_3M_0}{a_0}$.

Покажемо, що
$$\int\limits_{D_{t_j}} |u^k|^2\,dx\,dy \leqslant \max\Bigg\{M_1, \int\limits_{D_{t_{j+2}}} |u^k|^2\,dx\,dy\Bigg\}. \tag{10}$$

Нехай
$$\int\limits_{D_{t_j}} |u^k|^2\,dx\,dy > \int\limits_{D_{t_{j+2}}} |u^k|^2\,dx\,dy \tag{11}$$
(в іншому випадку нерівність (10) виконується). Запишемо (9) для $t = t_j,\ s = t_{j+2}$, врахувавши умову (8),

$$\int\limits_{D_{t_j}} |u^k|^2\,dx\,dy + a_0 \int\limits_{Q_{t_{j+2},t_j}} \sum_{i=1}^{n} |u^k_{x_i}|^p\,dx\,dy\,dt \leqslant \int\limits_{D_{t_{j+2}}} |u^k|^2\,dx\,dy + 3C_3M_0. \tag{12}$$

Згідно з припущенням (11), з (12) випливає нерівність
$$\int\limits_{Q_{t_{j+2},t_j}} \sum_{i=1}^{n} |u^k_{x_i}|^p\,dx\,dy\,dt \leqslant \frac{3C_3M_0}{a_0}.$$

Звідси, врахувавши нерівність $t_j - t_{j+2} \geqslant 1$, отримаємо існування такого $\tau \in [t_{j+2}, t_j]$, що
$$\int\limits_{D_\tau} \sum_{i=1}^{n} |u^k_{x_i}|^p\,dx\,dy \leqslant \frac{3C_3M_0}{a_0}.$$

Оскільки
$$\int\limits_{D_\tau} |u^k|^2\,dx\,dy \leqslant C_2 \int\limits_{D_\tau} \sum_{i=1}^{n} |u^k_{x_i}|^2\,dx\,dy \leqslant C_2 \left(\int\limits_{D_\tau} \sum_{i=1}^{n} |u^k_{x_i}|^p\,dxdy\right)^{2/p} \left(\int\limits_{D_\tau} dx\,dy\right)^{\frac{p-2}{p}} \leqslant$$
$$\leqslant C_2 \left(\frac{3C_3M_0}{a_0}\right)^{\frac{2}{p}} (\operatorname{mes}\,\Omega \cdot y_0)^{\frac{p-2}{p}} \equiv C_4,$$
то, записавши (9) для $t = t_j,\ s = \tau$, отримаємо
$$\int\limits_{D_{t_j}} |u^k|^2\,dx\,dy \leqslant C_4 + \frac{3C_3M_0}{a_0} \equiv M_1, \quad j \in \{0, 1, 2, 3 \ldots\}.$$

Тому з (9) випливає, що $\int_{D_t} |u^k|^2\,dx\,dy \leqslant C_5$ для довільного $t \in [T-j-1, T-j]$, де стала C_5 не залежить від k і j. Записавши (9) для проміжку $[t, t+1]$, матимемо
$$\int\limits_{Q_{t,t+1}} \sum_{i=1}^{n} |u^k_{x_i}|^p\,dx\,dy\,d\tau \leqslant C_6,$$
де стала C_6 не залежить від k.

Оскільки послідовність $\{u^k\}_{k=1}^{\infty}$ є збіжною у просторі $V_{0,\mathrm{loc}}(\overline{Q}_T)\cap C((-\infty,T];L^2(D))$, то

$$\int\limits_{Q_{t,t+1}} \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^p\,dx\,dy\,d\tau \leqslant M \quad (t\in(-\infty,T-1])\,, \qquad \int\limits_{D_t} |u|^2\,dx\,dy \leqslant M \quad (t\in(-\infty,T])\,,$$

де $M=\max\{C_5,C_6\}$. Теорему доведено. $\square$

Приклад. Виберемо $W(\Omega)=W_1(\Omega)$, $K=\{v\in W_1(\Omega),\ \ v\geqslant 0 \text{ на } \Gamma_2\}$. Тоді $C_0^{\infty}(\Omega)\subset K$. Нехай функція u – сильний розв'язок нерівності (1) і виконуються умови **(A)**, **(L)**, **(F)**. Виберемо в (1) $v(x,y,t)=u(x,y,t)\pm\varphi(x,y,t)$, де φ є довільною функцією з простору $C^1(\overline{\Pi}_T;C_0^{\infty}(\Omega))$. Тоді функція u задовольняє інтегральну рівність

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \left[u_t\varphi-\lambda(x,y,t)u_y\varphi-\sum_{i=1}^{n}\left(a_i(x)|u_{x_i}|^{p-2}u_{x_i}\right)_{x_i}\varphi-f(x,y,t)\varphi\right]dx\,dy\,dt=0$$

для довільних $t_1<t_2\leqslant T$ і довільної $\varphi\in C^1(\overline{\Pi}_T;C_0^{\infty}(\Omega))$. Таку функцію називатимемо сильним розв'язком рівняння

$$u_t-\lambda(x,y,t)u_y-\sum_{i=1}^{n}\left(a_i(x)|u_{x_i}|^{p-2}u_{x_i}\right)_{x_i}=f(x,y,t). \tag{13}$$

Із (13), зокрема, випливає, що $\sum_{i=1}^{n}\left(a_i(x)|u_{x_i}|^{p-2}u_{x_i}\right)_{x_i}\in L^{p'}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}_T)$.

Позначимо $\frac{\partial u}{\partial\nu_A}=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i(x)|u_{x_i}|^{p-2}u_{x_i}\nu_i$, де $\nu=(\nu_1,\ldots,\nu_n)$ — зовнішня нормаль до S. Подібно, як і в [23, с. 216], можна довести, що функція $u(\cdot,y,t)$ однозначно визначає розподіл $\mathcal{U}$ на Γ майже для всіх $(y,t)\in\Pi_T$, причому $\frac{\partial u}{\partial\nu_A}=\mathcal{U}$ для функцій з простору $C^2(\overline{\Omega})$. Зокрема, $\mathcal{U}\in L^{p'}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Pi}_T;W^{-1/p',p'}(\Gamma))$. Крім того, з нерівності (1) для функції u одержуємо систему

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{0}^{y_0}\langle\mathcal{U},v\rangle dydt\geqslant 0,\ \ \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{0}^{y_0}\langle\mathcal{U},u\rangle dydt=0$$

для всіх $t_1<t_2\leqslant T$ і всіх $v(\cdot,y,t)$, які належать до K майже для всіх $(y,t)\in\Pi_T$. Тут через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ позначено скалярний добуток між просторами $W^{-1/p',p'}(\Gamma)$ і $W^{1/p',p}(\Gamma)$.

Отже, функція u є сильним розв'язком задачі

$$A(u)\equiv u_t-\lambda(x,y,t)u_y-\sum_{i=1}^{n}\left(a_i(x)|u_{x_i}|^{p-2}u_{x_i}\right)_{x_i}=f(x,y,t), \tag{14}$$

$$u\geqslant 0 \text{ на } S_2,\ \ \frac{\partial u}{\partial\nu_A}\geqslant 0 \text{ на } S_2,\ \ u\frac{\partial u}{\partial\nu_A}=0 \text{ на } S_2,\ \ u|_{S_1}=0, \tag{15}$$

де $\frac{\partial u}{\partial\nu_A}$ розуміємо у вказаному вище сенсі.

Означення 3. *Слабким розв'язком* задачі (14), (15) називаємо функцію u, яка є границею у просторі $V_{0,\mathrm{loc}}(\overline{Q}_T)\cap C((-\infty;T];L^2(D))$ функцій $\{u^k\}_{k=1}^{\infty}$ таких, що $u^k\in V_{1,\mathrm{loc}}(\overline{Q}_T)$, u^k є сильним розв'язком рівняння $A(u)=f^k(x,y,t)$ і задовольняє умови (15) для всіх $k\in\mathbb{N}$. Тут послідовність $\{f^k\}_{k=1}^{\infty}$ є збіжною до функції f у просторі $L^{p'}_{\mathrm{loc}}((-\infty,T];L^{p'}(D))$.

Отже, якщо виконуються умови теореми 1, то існує єдиний слабкий розв'язок задачі (14), (15).

Зауваження. Теореми існування і єдиності слабкого розв'язку нерівності

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \Bigg[u_t(v-u) - \lambda(x,y,t)u_y(v-u) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)|u_{x_i}|^{p-2}u_{x_i}(v_{x_i} - u_{x_i}) + \\ + c(x,y,t)|u|^{p-2}u(v-u) - f(x,y,t)(v-u)\Bigg]\,dx\,dy\,dt \geqslant 0,$$

в якій $c \in L^\infty(Q_T)$, $c(x,y,t) \geqslant c_0 > 0$ для майже всіх $(x,y,t) \in Q_T$, а $v \in V_{0,\mathrm{loc}}(\overline{Q}_T)$, $v \in K$ для майже всіх $(y,t) \in \Pi_T$, t_1, $t_2 \in (-\infty, T]$, $t_1 < t_2$, можна отримати без припущення, що $\operatorname{mes}\Gamma_1 \neq 0$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Генчев Т. Г. Об ультрапараболических уравнениях // Докл. АН СССР. – 1963. – Т. 151, №2. – С. 265–268.
2. Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. – М.: Наука. – 1977. – 568 с.
3. Ильин А. М., Хасьминский Р. З. *Об уравнениях броуновского движения* // Теория вероятн. и ее примен.– 1964. – Т. 9, №3. – С. 466–491.
4. Баруча–Рид А. Т. Элементы теории марковских процессов и их приложения. – М.: Наука. – 1969. – 511 с.
5. Kolmogorov A.N. *Zufällige Bewegungen (Zur Theorie der Brownschen Bewegung)* // Ann. Math. – 1934. – V. 35. – P. 116–117.
6. Marshak R. M. *Theory of the slowing down of neutrons by elastic colision with atomic nuclei* // Reviews of modern physics. – 1947. – V. 19, №3 (July). – P. 185–238.
7. Сонин И. М. *Об одном классе вырождающихся диффузионных процессов* // Теория вероятн. и ее примен. – 1967. – Т. 12, №3.– С. 540–547.
8. Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Malytska H. P. *The modified Levi method of construction and study of the fundamental solutions of the Cauchy problem for degenerate parabolic equations of Kolmogorov type* // Нелинейные граничные задачи. – 1998. – Вып. 8. – С. 101–107.
9. Дронь В. С., Івасишен С. Д. *Властивості фундаментальних розв'язків і теореми єдиності розв'язків задачі Коші для одного класу ультрапараболічних рівнянь* // Укр. мат. журн. – 1998. – Т. 50, №11. – С. 1482–1496.
10. Ивасишен С. Д., Эйдельман С. Д. *Об интегральном представлении решений вырожденных уравнений типа Колмогорова с $2\vec{b}$-параболической частью по основной группе переменных* // Дифф. уравн. – 2000. – Т. 36, №5. – С. 647–655.
11. Орлова С. А. *О первой краевой задаче для прямо и обратно ультрапараболического уравнения* // Сиб. мат. журн. – 1990. – Т. 31, В6. – С. 211–215.
12. Терсенов С. А. *О краевых задачах для одного класса ультрапараболических уравнений и их приложения* // Мат. сб. – 1987. – Т. 133 (175), №4 (8). – С. 539–555.
13. Терсенов С. А. *О предельных значениях решений ультрапараболических уравнений на многообразиях вырождения* // Докл. АН СССР. – 1988. – Т. 299, №5. – С. 1070–1075.

14. Suvorov S. G. *Nonlinear ultraparabolic equations in general domains* // Нелинейные граничные задачи. – 1997. – Вып. 7. – С. 180–188.

15. Процах Н. П. Мішана задача для нелінійного ультрапараболічного рівняння // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр.– Вип. 134. Матем., 2002. – С. 97–103.

16. Балабушенко Т. М., Івасишен С. Д. *Крайові задачі Фур'є для рівняння Колмогорова дифузійного процесу Уленбека - Орнштейна з виродженням* // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. – Вип. 46. Матем., 1999. – С. 5–12.

17. Лавренюк С. П., Процах Н. П. *Задача Фур'є для ультрапараболічного рівняння* // Нелинейные граничные задачи. – 2002. – Вып. 12. – С. 128–139.

18. Лавренюк С. П. *Параболические вариационные неравенства без начальних условий* // Дифф. уравн. – 1996. – Т. 32, №10. – С. 1–5.

19. Лавренюк С. П. *Системи параболічних варіаційних нерівностей без початкових умов* // Укр. мат. журн. – 1997. – Т. 49, №4. – С. 540–547.

20. Бугрій О. М., Лавренюк С. П. *Параболічна варіаційна нерівність, що узагальнює рівняння політропної фільтрації* // Укр. мат. журн. – 2001. – Т. 53, №7. – С. 867–878.

21. Lavrenyuk S. P. *Parabolic variational inequalities without initial data* // Нелинейные граничные задачи. – 1998. – Вып. 8. – С. 173–178.

22. Bokalo M. M. *Well-posedness of problems without initial conditions for nonlinear parabolic variational inequalities without initial data* // Нелинейные граничные задачи. – 1998. – Вып 8. – С. 58–63.

23. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир. – 1972. – 587 с.

24. Лавренюк С. П., Процах Н. П. *Варіаційні ультрапараболічні нерівності* // Укр. мат. журн.– 2004.– Т. 56, №12.– С. 1616–1628.

25. Бокало Н. М. *О задаче без начальных условий для некоторых классов нелинейных параболических уравнений* // Труды семинара им. И. Г. Петровского. – М.: Из-во Моск. ун-та. – 1989. – Вып. 14. – С. 3–44.

26. Lax P.D., Phillips R.S. *Local boundary conditions for dissipative symmetric linear differential operators* // Comm. Pure and Appl. Math. – 1960. – Vol. 13.– P. 427–455.

27. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: – Мир, 1978.– 336 с.

Львівський національний університет імені Івана Франка; Краківська Політехніка, Польща;
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України

Надійшло 26.11.2003
Після переробки 19.05.2004
Після переробки 07.09.2004