УДК 517.928

Н. Плотникова

УСРЕДНЕНИЕ ИМПУЛЬСНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

N. Plotnikova. *The averaging of impulsive differential inclusions*, Matematychni Studii, **23** (2005) 52–56.

The paper deals with impulsive differential inclusions in the Euclidean space. The obtained results generalize the first Bogoljubov theorem for the method of averaging in the case of asymptotically small impulses.

Н. Плотникова. *Усреднение импульсных дифференциальных включений* // Математичні Студії. – 2005. – Т.23, №1. – С.52–56.

В статье рассматриваются импульсные дифференциальные включения в эвклидовом пространстве. Полученные результаты обобщают первую теорему Н.Н.Боголюбова об усреднении для случая асимптотически малых импульсов.

Пусть $comp(\mathbb{R}^n)$ $(conv(\mathbb{R}^n))$ — метрическое пространство непустых компактных (и выпуклых) подмножеств $\mathbb{R}^n$. Метрика в этих пространствах определяется с помощью расстояния по Хаусдорфу:

$$h(A,B)=\inf\{d\geq 0: S_d(A)\supset B,\quad S_d(B)\supset A\},$$

где $S_d(A)=\{x\in\mathbb{R}^n:\min\limits_{y\in A}\|x-y\|\leq d\}$ — замкнутая d-окрестность множества A.

Рассмотрим дифференциальное включение с импульсами

$$\begin{gathered}\dot{x}\in\varepsilon X(t,x),\ t\neq\tau_i,\\ \Delta x|_{t=\tau_i}\in\varepsilon I_i(x),\\ x(0)=x_0,\end{gathered}\tag{1}$$

где $x\in\mathbb{R}^n,\ \varepsilon>0$ — малый параметр, $X\colon\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^n\to conv(\mathbb{R}^n),\ I_i\colon\mathbb{R}^n\to conv(\mathbb{R}^n)$, $0\leq\tau_i<\tau_{i+1}$.

Если существует предел

$$\lim_{T\to\infty}h\left(\frac{1}{T}\int_t^{t+T}X(s,x)ds+\frac{1}{T}\sum_{t\leq\tau_i<t+T}I_i(x),\overline{X}(x)\right)=0,\tag{2}$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 34A37, 34A60, 34C29.

то поставим в соответствие включению (1) включение

$$\dot{y} \in \varepsilon\overline{X}(y),\ y(0) = x_0, \tag{3}$$

которое будем называть усредненным.

Интеграл от многозначного отображения в (2) понимается в смысле Аумана [1].

Обоснование данной схемы усреднения рассматривалось в работах [2], [3] в предположении, что функции $X(t,x)$ и $I_i(x)$ удовлетворяют условию Липшица по x. Ниже исследуется вопрос о близости решений систем (1), (3) при более слабых условиях.

Теорема 1. *Пусть в области $Q\{t \geq 0, x \in D \subset \mathbb{R}^n\}$ выполнены следующие условия:*

а) многозначные отображения $X(t,x), I_i(x)$ равномерно ограничены константой M; $X(t,x)$ непрерывно по t и равномерно непрерывно по x равномерно относительно t; $I_i(x)$ равностепенно непрерывны;

б) равномерно относительно $x \in D$ и $t \geq 0$ существует предел (2) и

$$\frac{1}{T} i(t, t+T) \leq d < \infty,$$

где $i(t,t+T)$ — количество точек последовательности τ_i на промежутке $[t,t+T]$;

в) решения включения (3) при $\varepsilon = 1$ определены при $t \in [0, L^*]$ и лежат вместе с некоторой ρ-окрестностью в D.

г) модуль непрерывности многозначного отображения $\overline{X}(x)$ является функцией Камке [1].

Тогда для любого $\eta > 0$ и любого $L \in (0, L^*]$ существует такое $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\eta, L) > 0$, что при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ для любого решения $x(t,\varepsilon)$ включения (1), удовлетворяющего условию $x(0,\varepsilon) = x_0$, существует решение включения (3) такое, что на промежутке $[0, L\varepsilon^{-1}]$ справедливо неравенство

$$\|x(t,\varepsilon) - y(t,\varepsilon)\| < \eta.$$

Доказательство. Зададим $L \in (0, L^*]$. Пусть $x(t) = x(t,\varepsilon)$ — произвольное решение включения (1). Разобъем сегмент $[0, \frac{L}{\varepsilon}]$ на частичные точками $t_k = kh(\varepsilon), k \in \{0, \ldots, m\}$, где $m = [\frac{L}{\varepsilon h(\varepsilon)}]$, $t_{m+1} = \frac{L}{\varepsilon}$. Шаг $h(\varepsilon)$ выберем так, чтобы $h(\varepsilon) \to \infty$, $\varepsilon h(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Так как $x(t)$−решение (1), то имеется измеримый селектор $v(t) \in X(t, x(t))$ [1] и импульсные векторы $p_i \in I_i(x(\tau_i))$, для которых

$$x(t) = x(t_k) + \varepsilon \int_{t_k}^{t} v(s)ds + \varepsilon \sum_{t_k \leq \tau_i < t} p_i,\ x(0) = x_0,\ t \in [t_k, t_{k+1}], k \in \{0, \ldots, m\}. \tag{4}$$

Для каждого $k \in \{0, \ldots, m\}$ определим квазиломаную Эйлера следующим образом:

$$x_1(t) = x_1(t_k) + \varepsilon \int_{t_k}^{t} w(s)ds + \varepsilon \sum_{t_k \leq \tau_i < t} r_i + \varepsilon \alpha_k (t - t_k),\ x_1(0) = x_0,\ t \in [t_k, t_{k+1}], \tag{5}$$

где

$$w(t) \in X(t, x_1(t_k))\ :\ \|w(t) - v(t)\| = \min_{u \in X(t, x_1(t_k))} \|u - v(t)\|,$$

$$r_i \in I_i(x_1(t_k))\ :\ \|r_i - p_i\| = \min_{r \in I_i(x_1(t_k))} \|r - p_i\|,$$

функция $w(t)$ измерима [1]; постоянные $\alpha_k \in \mathbb{R}^n$ выбираются из условия

$$x(t_{k+1}) = x_1(t_{k+1}),\ k \in \{0,\ldots,m\}.$$

Покажем, что такие α_k можно подобрать. Действительно, из равенств (4) и (5) при $t = t_{k+1}$ получаем, что

$$\varepsilon\alpha_k(t_{k+1}-t_k) = \varepsilon\int_{t_k}^{t_{k+1}}(v(s)-w(s))ds + \varepsilon\sum_{t_k\le\tau_i<t_{k+1}}(p_i - r_i).$$

Следовательно,

$$\varepsilon\|\alpha_k\|(t_{k+1}-t_k) \le \varepsilon\int_{t_k}^{t_{k+1}}\|v(s)-w(s)\|ds + \varepsilon\sum_{t_k\le\tau_i<t_{k+1}}\|p_i - r_i\| \le$$

$$\le \varepsilon\int_{t_k}^{t_{k+1}} h(X(s,x(s)),X(s,x(t_k)))ds + \varepsilon\sum_{t_k\le\tau_i<t_{k+1}} h(I_i(x(\tau_i)),I_i(x(t_k))).$$

В силу равномерной непрерывности функции $X(t,x)$ и равностепенной непрерывности функций $I_i(x)$ для любого $\eta_1 > 0$ можно подобрать $\delta > 0$ такое, что как только $\|x-y\| < \delta$, справедливы неравенства $h(X(t,x),X(t,y)) < \eta_1$ и $h(I_i(x),I_i(y)) < \eta_1$.

Оценим

$$\|x(t)-x(t_k)\| \le \varepsilon Mh(\varepsilon) + \varepsilon dMh(\varepsilon) = M\varepsilon h(\varepsilon)(1+d).$$

Выбирая ε_0 так, чтобы при $\varepsilon \le \varepsilon_0$ выполнялось неравенство $M\varepsilon h(\varepsilon)(1+d) < \delta$, получим, что

$$\varepsilon\|\alpha_k\|(t_{k+1}-t_k) \le \varepsilon\eta_1(t_{k+1}-t_k) + \varepsilon d\eta_1(t_{k+1}-t_k) = \eta_1\varepsilon(1+d)(t_{k+1}-t_k).$$

Тогда $\|\alpha_k\| \le \eta_1(1+d)$.

Покажем, что для любого $\eta > 0$ существует ε_0 такое, что при $\varepsilon \le \varepsilon_0$ справедлива оценка $\|x(t)-x_1(t)\| < \eta/3$ при $t \in [0,\frac{L}{\varepsilon}]$. При $t \in [t_k,t_{k+1}]$ оценим

$$\|x(t)-x_1(t)\| \le \|x(t)-x(t_k)\| + \|x(t_k)-x_1(t_k)\| + \|x_1(t_k)-x_1(t)\| \le \{M\varepsilon h(\varepsilon)+dM\varepsilon h(\varepsilon)\}+$$

$$+\{M\varepsilon h(\varepsilon) + dM\varepsilon h(\varepsilon) + \|\alpha_k\|\varepsilon h(\varepsilon)\} = (1+d)(2M+\eta_1)\varepsilon h(\varepsilon).$$

Выберем ε_0 так, чтобы при $\varepsilon \le \varepsilon_0$ выполнялось неравенство

$$(1+d)(2M+\eta_1)\varepsilon h(\varepsilon) < \eta/3.$$

Для каждого $k \in \{0,\ldots,m\}$ определим

$$y_1(t) = y_1(t_k) + \varepsilon\int_{t_k}^{t} z(s)ds + \varepsilon\alpha_k(t-t_k),\ y_1(0) = x_0,\ t \in [t_k,t_{k+1}],$$

где $z(s) \equiv z_k$ при $t \in [t_k,t_{k+1}]$ и

$$\left\|\int_{t_k}^{t_{k+1}} w(s)ds + \varepsilon\sum_{t_k\le\tau_i<t_{k+1}} r_i - z_k(t_{k+1}-t_k)\right\| =$$

$$= \min_{z\in\overline{X}(x_1(t_k))}\left\|\int_{t_k}^{t_{k+1}} w(s)ds + \varepsilon\sum_{t_k\le\tau_i<t_{k+1}} r_i - z(t_{k+1}-t_k)\right\|.$$

Покажем, что для любого $\eta > 0$ существует ε_0 такое, что при $\varepsilon \le \varepsilon_0$ справедлива оценка $\|y_1(t) - x_1(t)\| < \eta/3$ при $t \in [0, \frac{L}{\varepsilon}]$. Обозначим $\delta_k = \|y_1(t_k) - x_1(t_k)\|$. Тогда в силу равномерной сходимости в (2) существует такая монотонно убывающая функция $F(t) \to 0$ при $t \to \infty$, что

$$\delta_{k+1} \le \delta_k + \varepsilon \left\| \int_{t_k}^{t_{k+1}} w(s)ds + \varepsilon \sum_{t_k \le \tau_i < t_{k+1}} r_i - \int_{t_k}^{t_{k+1}} z(s)ds \right\| \le$$

$$\le \delta_k + \varepsilon h(\varepsilon) h \left(\frac{1}{h(\varepsilon)} \int_{t_k}^{t_{k+1}} X(s, x_1(t_k))ds + \frac{1}{h(\varepsilon)} \sum_{t_k \le \tau_i < t_{k+1}} I_i(x_1(t_k)), \overline{X}(x_1(t_k)) \right) \le$$

$$\le \delta_k + \varepsilon h(\varepsilon) F(h(\varepsilon)).$$

Таким образом, имеем следующую последовательность оценок

$$\delta_0 = 0, \ldots, \delta_{k+1} \le \delta_k + \varepsilon h(\varepsilon) F(h(\varepsilon)),$$

откуда получаем, что

$$\delta_{k+1} \le \sum_{i=0}^{k+1} \varepsilon h(\varepsilon) F(h(\varepsilon)) \le LF(h(\varepsilon)).$$

Тогда при $t \in [t_k, t_{k+1}]$

$$\|y_1(t) - x_1(t)\| \le \|y_1(t) - y_1(t_k)\| + \|y_1(t_k) - x_1(t_k)\| + \|x_1(t_k) - x_1(t)\| \le$$

$$\le 2[M\varepsilon h(\varepsilon) + \|\alpha_k\| \varepsilon h(\varepsilon)] + Md\varepsilon h(\varepsilon) + LF(h(\varepsilon)) = \varepsilon h(\varepsilon)[M(2+d) + 2\eta_1(1+d)] + LF(h(\varepsilon)).$$

Выберем ε_0 так, чтобы при $\varepsilon \le \varepsilon_0$ была справедлива оценка

$$\varepsilon h(\varepsilon)[M(2+d) + 2\eta_1(1+d)] + LF(h(\varepsilon)) < \eta/3.$$

При $t \in [t_k, t_{k+1}]$ имеем

$$\|x_1(t_k) - y_1(t)\| \le \|y_1(t) - y_1(t_k)\| + \|y_1(t_k) - x_1(t_k)\| \le$$

$$\le \varepsilon h(\varepsilon)[M + \eta_1(1+d)] + LF(h(\varepsilon)) \equiv \gamma(\varepsilon).$$

Тогда

$$\rho(\dot{y}_1(t), \varepsilon \overline{X}(y_1(t))) \le \rho(\dot{y}_1(t), \varepsilon \overline{X}(x_1(t_k))) + \varepsilon h(\overline{X}(x_1(t_k)), \overline{X}(y_1(t))) \le$$
$$\le \varepsilon \|\alpha_k\| + \varepsilon \omega(\gamma(\varepsilon)) \le \varepsilon \eta_1(1+d) + \varepsilon \omega(\gamma(\varepsilon)),$$

где $\omega-$ модуль непрерывности функции $\overline{X}(x)$.

По теореме Плиша [4] найдется решение $y(t) = y(t, \varepsilon)$ включения (3) такое, что $\|y_1(t) - y(t)\| \le r(\varepsilon t)$, где $r(\tau)$ — верхнее решение задачи Коши

$$\frac{dr}{d\tau} = \omega(r) + \beta(\varepsilon), \ r(0) = 0, \ 0 \le \tau \le L, \tag{6}$$

здесь $\beta(\varepsilon) = \eta_1(1+d) + \omega(\gamma(\varepsilon))$. Так как $\beta(\varepsilon)$ может быть сделано сколь угодно малым, а уравнение

$$\dot{r} = \omega(r), \ r(0) = 0$$

имеет только нулевое решение, то по теореме Хартмана [5] все решения (6) равномерно сходятся к решению предельной задачи, то есть $r(\tau)$ может быть сделано меньше $\eta/3$ за счет выбора ε_0. Таким образом, для любого решения $x(t)$ существует решение $y(t)$ такое, что при $\varepsilon \le \varepsilon_0$ справедлива оценка

$$\|x(t) - y(t)\| \le \|x(t) - x_1(t)\| + \|x_1(t) - y_1(t)\| + \|y_1(t) - y(t)\| < \eta.$$

Теорема доказана. $\square$

Замечание. Пусть $X(t, \varepsilon)$ — множество решений импульсного дифференциального включения (1), $X(t, 0)$ — множество решений дифференциального включения (3). Тогда в теореме доказана полунепрерывность сверху по включению многозначного отображения $X(t, \varepsilon)$ в точке $\varepsilon = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Благодатских В.И., Филиппов А.Ф. Дифференциальные включения и оптимальное управление / Топология, обыкновенные дифференциальные уравнения, динамические системы. – М.: Наука, 1985. – С. 194–252.
2. Плотников В.А., Плотникова Л.И. *Усреднение дифференциальных включений с многозначными импульсами* // Укр. мат. журн. – 1995. – Т.47, №11. – С.1526–1532.
3. Plotnikov V.A., Ivanov R.P., Kitanov N.M. *Method of averaging for impulsive differential inclusions* // Pliska Stud. Math. Bulgar. – 1998, №12. – P.43–55.
4. Plis A. *On trajectories of orientor fields* // Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. sci. math., astron. et phys. – 1965. – V.13, №8. – P.571–573.
5. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир , 1970. – 720 с.

Одесский национальный университет им. И.И. Мечникова,
27026, Одесса, Дворянская 2
talie@ukr.net

Поступило 14.04.2004