УДК 517.9

Ю. Ю. Беркела, Ю. М. Сидоренко

ВЕКТОРНО-МАТРИЧНІ УЗАГАЛЬНЕННЯ БІГАМІЛЬТОНОВИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ ТА ЇХ ІНТЕГРУВАННЯ

Yu. Yu. Berkela, Yu. M. Sydorenko. *Vector and matrix generalization of bi-hamiltonian dynamical systems and its integration*, Matematychni Studii, **23** (2005) 31–51.

We carry out integration by dressing method of integrable by Lax systems from $\mathcal{D}$HcmKP hierarchy. Availability of this method also for nonstandard (recursive) Lax presentation in construction of exact solutions of nonlinear bi-hamiltonian systems is shown.

Ю. Ю. Беркела, Ю. Н. Сидоренко. *Векторно-матричные обобщения бигамильтоновых динамических систем и их интегрирование* // Математичні Студії. – 2005. – Т.23, №1. – С.31–51.

Интегрирование проводится методом одевающих преобразований вполне интегрируемых по Лаксу систем из иерархии $\mathcal{D}$HcmKP. Продемонстрирована возможность использования этого метода и для нестандартных (рекурсионных) представлений Лакса при построении точных решений нелинейных бигамильтоновых систем.

1. Вступ. У статті [1] введено в розгляд так звану скалярну $\mathcal{D}$-ермітову редуковану модифіковану ієрархію Кадомцева–Петвіашвілі $\mathcal{D}$HcmKP ($\mathcal{D}$-Hermitian constrained modified Kadomtsev–Petviashvili hierarchy). Серед інтегровних систем в цій ієрархії міститься велика кількість як відомих раніше нелінійних моделей теорії солітонів, так і їхніх нових модифікацій і векторних (багатокомпонентних) узагальнень. Зауважимо також, що відповідні оператори в зображеннях Лакса–Захарова–Шабата для всіх систем, що розглядаються нами, є скалярними інтегродиференціальними символами на відміну від відомих раніше, які, як правило, були елементами матричних пучків диференціальних операторів з нетривіальним (часто раціональним) входженням "спектрального" параметра.

Уніфікована форма оператора Лакса (див. формули (10)–(12)) дозволяє розвинути загальний метод інтегрування відповідних лаксових потоків, описавши групу операторів перетворення (групу $\mathcal{D}$-унітарних операторів Вольтерри), яка відповідає алгебрі Лі інтегродиференціальних символів $\mathcal{D}$-косоермітових операторів.

В загальному інтегродиференціальному операторному пучку (10)–(12) як часткові випадки містяться, так звані, рекурсійні (рекурсійно-градієнтні) або породжуючі оператори для деяких нелінійних систем теорії солітонів. Як добре відомо, ці оператори відіграють важливу роль при дослідженні широкого кола проблем в теорії солітонів — від загальної проблеми інтегровності і бігамільтонового аналізу нелінійних динамічних

2000 *Mathematics Subject Classification:* 33Q58, 37K10, 37K15.

систем (див., наприклад, [2–10]) до важливих питань теорії збурень [2,11] і класифікації інтегровних рівнянь з частинними похідними [12–16] (див. також бібліографію в [16]) При $n = 2$ інтегродиференціальний оператор Лакса (10) після накладання додаткового обмеження (в'язі, редукції, тощо) стає породжуючим оператором для модифікованого рівняння Кортевега–де Вріза (mKdV) у дійсному випадку. Цей оператор допускає природне багатокомпонентне узагальнення в сенсі статей [17–20], що приводить нас до векторної моделі mKdV, яка, в свою чергу може бути редукована до звичайного рівняння KdV. Зауважимо також, що процедура отримання оператора Лакса для комплексної версії рівняння mKdV і його векторного узагальнення істотно відрізняється від дійсного випадку і потребує накладання нетривіального додаткового редукційного обмеження.

У цій статті ми продовжуємо інтегрування цілком інтегровних систем з $\mathcal{D}$HcmKP ієрархії методом одягаючих перетворень, запропонованим в [21, 1] і апробованим як для скалярних зображень Лакса (векторне нелінійне модифіковане рівняння Шредінгера [22, 1], див. також [23]), так і для (2×2)-матричних рівнянь Захарова–Шабата [24] (див. також [25]). Одна з першочергових цілей, яку ставили перед собою автори, — продемонструвати можливість застосування цього методу і для, так званих, нестандартних (рекурсійних) зображень Лакса при побудові точних розв'язків нелінійних бігамільтонових систем.

Стаття має наступну структуру. У п.2 стисло вводяться необхідні означення і поняття, пов'язані з алгеброю формальних символів псевдодиференціальних операторів та наведено необхідний нам мінімум понять з бігамільтонової теорії інтегровних систем. Сформульовано також декілька результатів (Леми 1, 2 та Теорема 1), отриманих нами раніше, які істотно використовуються в основній частині роботи (пп.4-6).

У п.3 вводиться нескінчена послідовність (ієрархія) нелінійних рівнянь з інтегродиференціальними зображеннями Лакса. Метод інтегрування систем рівнянь "загального положення" з цієї ієрархії запропоновано в [1]. Тут нас також цікавлять деякі нетривіальні редукції в системах загального положення, що дозволяють виділити рівняння з "нестандартними", так званими, рекурсійними зображеннями Лакса (модифіковане рівняння KdV і рівняння KdV). Отримано також декілька цікавих, на наш погляд, інтегровних моделей (див. формули (22)–(27)), які узагальнюють відомі раніше системи теорії солітонів.

У п.4 ми інтегруємо деякі системи загального положення, отримані в п.3. Ці результати є базовими при побудові в п.5 широких класів розв'язків для багатокомпонентної комплексної версії рівняння mKdV (40) (Теорема 3). Дійсна версія цього рівняння (20) досліджується в Теоремі 4. У п.6 ми демонструємо, як деякі класи багатопараметричних розв'язків класичного рівняння KdV можуть бути отримані за допомогою нестандартного (рекурсійного) операторного зображення Лакса. При цьому отримуємо нетривіальний зв'язок між розв'язками багатокомпонентного дійсного рівняння mKdV і скалярного рівняння KdV, відсутній в однокомпонентному випадку.

У п.7 наводимо матричні узагальнення деяких систем з п.3. Інтегрування цих систем вимагає тільки деяких технічних модифікацій методу з п. 4. Знаходження додаткових редукцій в матричній ієрархії $\mathcal{D}$HcmKP є справою подальших досліджень.

У заключному п.8 робимо деякі зауваження про результати, як отримані в цій роботі, так і ті, які нами з різних причин (в тому числі, щоб істотно не збільшити об'єм статті) не висвітлені в основному тексті. Розраховуємо в наступних публікаціях повернутися до цих питань.

2.Вихідні положення.

a. Алгебра мікродиференціальних операторів.

Розглядаємо рівняння Лакса–Захарова–Шабата вигляду

$$\beta U_{t_m} - \alpha V_y + UV - VU = 0 \Leftrightarrow [\alpha\partial_y - U,\ \beta\partial_{t_m} - V] = 0,$$

де $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$; $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $\partial_y := \frac{\partial}{\partial y}$, $\partial_{t_m} := \frac{\partial}{\partial t_m}$, у алгебрі мікродиференціальних операторів

$$U, V \in \zeta := \left\{ L = \sum_{i=-\infty}^{n(L)} a_i \mathcal{D}^i :\ a_i = a_i(x, y, t_m);\ i, n(L) \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Коефіцієнти a_i є гладкими $(N \times N)$ матричнозначними функціями змінної $x \in \mathbb{R}$ та скінченної кількості еволюційних параметрів $t_m \in \mathbb{R}$, $t_2 := y, t_3 := t$, а мікродиференціальні оператори U та V задовольняють додаткові обмеження (редукції), які опишемо далі. Операція множення в алгебрі ζ індукується узагальненим правилом Лейбніца

$$\mathcal{D}^n f := \sum_{j=0}^{\infty} \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} f^{(j)} \mathcal{D}^{n-j},\ n \in \mathbb{Z},$$

де

$$\mathcal{D}^m(f) := \frac{\partial^m f}{\partial x^m} = f^{(m)},\ m \in \mathbb{Z}_+,$$

$$\begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} := \frac{n(n-1)\dots(n-j+1)}{j!},\ \mathcal{D}^n\mathcal{D}^m := \mathcal{D}^{n+m},\ n, m \in \mathbb{Z}$$

і $f := f\mathcal{D}^0$ є оператором множення на функцію $f(x, y, t_m)$. Комутатор Лі $[U, V] := UV - VU$ визначає на асоціативній алгебрі ζ структуру алгебри Лі $(\zeta, [,])$, яку надалі будемо позначати тим самим символом ζ. Ермітово спряжений до L оператор має вигляд $L^* := \sum_{i=-\infty}^{n(L)} (-1)^i \mathcal{D}^i a_i^*$, де $a_i^* = \bar{a}^\top$, $(\alpha\partial_y)^* := -\bar{\alpha}\partial_y$, $(\beta\partial_{t_m})^* := -\bar{\beta}\partial_{t_m}$.

Оператор $L \in \zeta$ називатимемо $\mathcal{D}$-ермітовим ($\mathcal{D}$-косоермітовим), якщо $L^* = \mathcal{D}L\mathcal{D}^{-1}$ ($L^* = -\mathcal{D}L\mathcal{D}^{-1}$). Після домноження $\mathcal{D}$-ермітового оператора на уявну одиницю $i = \sqrt{-1}$ отримується $\mathcal{D}$-косоермітовий оператор. $\mathcal{D}$-косоермітові оператори утворюють підалгебру Лі алгебри $(\zeta, [,])$.

Інтегральний оператор $W \in \zeta_{<1} := \{\sum_{i=-\infty}^{0} w_i \mathcal{D}^i\}$ називатимемо $\mathcal{D}$-унітарним, якщо $W^{-1} = \mathcal{D}^{-1}W^*\mathcal{D}$.

Лема 1. [1] *Нехай L — $\mathcal{D}$-ермітовий ($\mathcal{D}$-косоермітовий) та W — $\mathcal{D}$-унітарний оператори, тоді $\hat{L} := WLW^{-1}$ — $\mathcal{D}$-ермітовий ($\mathcal{D}$-косоермітовий) оператор.*

Множина $\mathcal{D}$-унітарних операторів є групою Лі–Вольтерри алгебри Лі $\mathcal{D}$-косоермітових операторів.

Нехай $\varphi = \varphi(x, y, t_m)$ — гладка матрична $N \times K$ функція, $\Omega := C + \int_{-\infty}^{x} \varphi^* \varphi_x dx$ — невироджена матричнозначна $K \times K$ функція, така, що інтеграл $\int_{-\infty}^{x} \varphi^* \varphi_x dx$ є абсолютно збіжним, C — деяка стала матриця розмірності $K \times K$.

Теорема 1. [1]

1. *Нехай $C^* = -C = const \in Mat_{K\times K}(\mathbb{C})$ та $w_0 := I_N - \varphi\Omega^{-1}\varphi^*$ (де I_N — одинична матриця розміру $(N \times N)$), тоді $w_0^{-1} = w_0^* = I_N - \varphi\Omega^{*-1}\varphi^*$, де $\Omega^* = \varphi^*\varphi - \Omega$.*

2. Оператор W вигляду

$$W := w_0 + \varphi\Omega^{-1}\mathcal{D}^{-1}\varphi_x^*$$

є $\mathcal{D}$-унітарним, і обернений до нього оператор визначається за формулою

$$W^{-1} := w_0^{-1} + \varphi\mathcal{D}^{-1}(\Omega^{*-1}\varphi^*)_x.$$

Лема 2. [24] *Правильна рівність*

$$\det w_0 = (-1)^K \frac{\det \Omega^*}{\det \Omega}.$$

Зауваження. Нехай $\varphi \in \mathrm{Mat}_{N\times K}(\mathbb{R})$ та $C^\top = -C$ — деяка кососиметрична стала дійсна матриця. Тоді

$$\det w_0 = \det(I_N - \varphi\Omega^{-1}\varphi^\top) = (-1)^K.$$

b. Породжуючі оператори і бігамільтонові динамічні системи. У цьому пункті наведемо означення потрібних нам понять, які можна знайти, наприклад, в [2-4, 7].

Розглядаємо многовид $S := C^{(\infty)}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^\nu)$ гладких за "просторовою" змінною $x \in \mathbb{R}$ функцій $\mathbf{u} := (u_1, \ldots, u_\nu)(x)$ зі значеннями в $\mathbb{C}^\nu$, які можуть залежати від додаткового еволюційного параметра $t_m, m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ в силу однорідної, взагалі кажучи, нелінійної динамічної системи вигляду

$$\mathbf{u}_{t_m} = K[\mathbf{u}], \tag{1}$$

де $\mathbf{u} \in S$, $K : S \to TS$ — гладке за Фреше векторне поле на S. Через $\mathcal{D}(S)$ позначимо простір гладких за Фреше функціоналів над S. Операцію grad визначимо так

$$\mathrm{grad} := \mathcal{D}(S) \to T^*S;\ \mathrm{grad}F := \frac{\delta F}{\delta \mathbf{u}},$$

де $\frac{\delta}{\delta \mathbf{u}}$ — оператор варіаційної похідної Ейлера.

Білінійна форма $<,>$ (скалярний добуток)на TS

$$< \mathbf{a}, \mathbf{b} >:= \int_{\mathbb{R}} \mathbf{a}(x)\mathbf{b}^\top(x)\, dx \tag{2}$$

дозволяє ототожнити простори $TS \cong T^*S$, що ми і маємо надалі на увазі.

Означення 1. Оператор $\mathcal{L}$ називається *кососиметричним* (відносно форми (2)), якщо для всіх $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in TS \cong TS^*$ виконується рівність

$$< \mathcal{L}\mathbf{a}, \mathbf{b} > + < \mathbf{a}, \mathcal{L}\mathbf{b} >= 0.$$

Означення 2. Кососиметричний оператор $\mathcal{L}$ називається *імплектичним* (або *пуассоновим*), якщо для білінійної операції $\{\cdot,\cdot\}_\mathcal{L} : \mathcal{D}^2(S) \to \mathcal{D}(S)$ вигляду

$$\{A, B\}_\mathcal{L} :=< \nabla A, \mathcal{L}\nabla B > \tag{3}$$

виконується тотожність Якобі

$$(\forall A, B, C \in \mathcal{D}(S)) : \{\{A, B\}_\mathcal{L}, C\}_\mathcal{L} + \{\{B, C\}_\mathcal{L}, A\}_\mathcal{L} + \{\{C, A\}_\mathcal{L}, B\}_\mathcal{L} = 0.$$

Білінійна операція (3), визначена за допомогою імплектичного оператора $\mathcal{L}$ називається дужкою Пуассона і задає на просторі $\mathcal{D}(S)$ структуру алгебри Лі.

Означення 3. Імплектичний (пуассонів) оператор $\mathcal{L}$ називається *гамільтоновим* (*нетеровим*), якщо він задовольняє рівняння

$$\mathcal{L}'K - \mathcal{L}K'^* - K'\mathcal{L} = 0, \tag{4}$$

де штрих означає похідну Фреше, а символ "$*$— формальне спряження (не ермітове!) відносно білінійної форми (2), тобто K'^* є оператором, транспонованим до оператора K', який надалі, для уникнення можливих непорозумінь в термінології позначатимемо символом K'^τ.

Зауважимо також, що рівняння (4) деколи називають рівнянням нетеровості, в зв'язку з чим його розв'язок $\mathcal{L}$ іноді називають нетеровим оператором. Справедливість рівності (4) для імплектичного оператора $\mathcal{L}$ рівносильна до існування такого функціоналу $H \in \mathcal{D}(S)$, що динамічна система (1) допускає зображення в такій (гамільтоновій) формі

$$\mathbf{u}_{t_m} = \{\mathbf{u}, H\}_{\mathcal{L}} := \mathcal{L}\nabla H.$$

Нехай операторне рівняння нетеровості (4) допускає ще один імплектичний розв'язок $\mathcal{M}$, лінійно незалежний з оператором $\mathcal{L}$,

$$\mathcal{M}'K - \mathcal{M}K'^\tau - K'\mathcal{M} = 0,$$

тобто існує ще один функціонал $\hat{H} \in \mathcal{D}(S)$, функціонально незалежний з $H \in \mathcal{D}(S)$, такий, що

$$\mathbf{u}_{t_m} = \{\mathbf{u}, \hat{H}\}_{\mathcal{M}} := \mathcal{M}\nabla \hat{H}.$$

Означення 4. Гамільтонові оператори $\mathcal{L}$ та $\mathcal{M}$ утворюють гамільтонову пару $(\mathcal{L}, \mathcal{M})$, яка називається *узгодженою*, якщо $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})$ оператор $\alpha\mathcal{L} + \beta\mathcal{M}$ є імплектичним.

Динамічна система (1), яка допускає узгоджену гамільтонову пару $(\mathcal{L}, \mathcal{M})$ називається бігамільтоновою, а відповідні дужки Пуассона $\{\cdot,\cdot\}_{\mathcal{L}}, \{\cdot,\cdot\}_{\mathcal{M}}$ — узгодженими.

Простими, але дуже важливими наслідками бігамільтоновості потоку (1) (див., наприклад [7]) є такі твердження.

I. Оператори $\mathcal{L}_1 := \mathcal{L}, \mathcal{L}_2 := \mathcal{M}, \mathcal{L}_i := \mathcal{L}_1(\mathcal{L}_1^{-1}\mathcal{L}_2)^{i-1}, i \in \mathbb{Z}$ є гамільтоновими операторами для динамічної системи (1), тобто $\exists H_i \in \mathcal{D}(S), H_1 := H, H_2 := \hat{H}, i \in \mathbb{Z}$, такі, що
$$\mathbf{u}_{t_m} = \{\mathbf{u}, H_i\}_{\mathcal{L}_i} = \mathcal{L}_i \nabla H_i.$$

II. Всі пуассонові структури $\{\cdot,\cdot\}_{\mathcal{L}_i}$, $i \in \mathbb{Z}$ узгоджені, а функціонали (гамільтоніани) H_i — функціонально незалежні і утворюють інволютивну сім'ю (за кожною з дужок) перших інтегралів динамічної системи (1).

Зауваження. У випадку, коли оператори $\mathcal{L}_i$ мають нетривіальне ядро, для коректного визначення оператора $\mathcal{L}_i^{-1}$ необхідно редукувати простір TS, фіксуючи значення функціоналів з аннулятора $\mathcal{L}_i$.

Для формулювання інших наслідків бігамільтоновості системи (1) необхідно ввести поняття її симетрії та породжуючого оператора.

Означення 5. Векторне поле $\alpha : S \to TS$ називається *однорідною симетрією* динамічної системи (1), якщо

$$[\alpha, K] := \alpha' K - K'\alpha = 0.$$

Означення 6. Оператори $\Lambda = \mathcal{L}_i^{-1}\mathcal{L}_j$ та $\Lambda^\tau = \mathcal{L}_j\mathcal{L}_i^{-1}$, $i, j \in \mathbb{Z}$ називаються *породжуючими* (*рекурсійними*) для потоку (1).

III. Сім'я гамільтонових векторних полів $\{\alpha_k\}, k \in \mathbb{Z}$, вигляду $\alpha_k = \mathcal{L}_k\nabla H$ утворює абелеву алгебру Лі однорідних симетрій системи (1) і задає на S комутуючі потоки

$$\mathbf{u}_{t_{m-i+1}} = \alpha_i = \mathcal{L}_{i+j}\nabla H_{j+1}; i, j \in \mathbb{Z}, H_1 = H, \alpha_1 = K[\mathbf{u}].$$

IV. Породжуючі оператори Λ і Λ^τ (які ще іноді називають відповідно рекурсійно-градієнтним і рекурсійно-симетрійним, або оператором рекуренції) задовольняють рівняння типу Лакса $\Lambda'_{\alpha_i} = [\Lambda, \alpha_i'^{\tau}]$, $(\Lambda^\tau)'_{\alpha_i} = [\alpha_i', \Lambda^\tau]$. В частковому випадку, при $\alpha_1 = K[\mathbf{u}]$ отримуємо

$$\begin{aligned} \Lambda_{t_m} &= [\Lambda, K'^{\tau}], \\ \Lambda^\tau_{t_m} &= [K', \Lambda^\tau]. \end{aligned} \tag{5}$$

Зауваження. Оскільки оператор $\mathcal{L}_i^{-1}\mathcal{L}_j, \forall i, j \in \mathbb{Z}$ можна зобразити у вигляді

$$\mathcal{L}_i^{-1}\mathcal{L}_j = (\mathcal{L}^{-1}\mathcal{M})^{j-i}, \quad \mathcal{L} := \mathcal{L}_1, \quad \mathcal{M} := \mathcal{L}_2,$$

то надалі під операторами Λ та Λ^τ будемо розуміти оператори $\mathcal{L}^{-1}\mathcal{M}$ та $\mathcal{M}\mathcal{L}^{-1}$ відповідно.

V. Породжуючі оператори володіють такими рекурсійними властивостями $\alpha_{i+1} = \Lambda^\tau\alpha_i$, $\nabla H_i = \Lambda\nabla H_{i+1}$, де $\alpha_i := \mathcal{L}\nabla H_{2-i}; i \in \mathbb{Z}$.

VI. Справедлива також, так звана, теорема Лакса.

Теорема [12, 34, 36]. *Перші інтеграли $\Phi \in \mathcal{D}(S)$ динамічної системи (1) задовольняють рівняння*

$$(\partial_{t_m} + K'^{\tau})\nabla\Phi = 0.$$

Зауваження. Комутаційні зображення Лакса (5) містять, взагалі кажучи, інтегро-диференціальний породжуючий оператор Λ. Для багатьох інтегровних моделей теорії солітонів відштовхуючись від цього, так званого, нестандартного зображення Лакса вдається алгоритмічним методом побудувати "стандартне" зображення Лакса в деякій матричній алгебрі чисто диференціальних операторів [3-5]. Однак велика матрична розмірність і часто нетривіальне входження в це зображення допоміжного (спектрального) параметра істотно ускладнює процес побудови точних розв'язків досліджуваної динамічної системи. В зв'язку з цим виникає проблема явного інтегрування динамічних систем теорії солітонів відштовхуючись від операторних зображень (5), які ми надалі будемо називати бігамільтоновими зображеннями Лакса. Зауважимо також, що в зображеннях (5) один з операторів, а саме оператор еволюції K' є наперед відомим, а процес знаходження рекурсійного оператора $\Lambda = \mathcal{L}^{-1}\mathcal{M}$ (як і ієрархії перших інтегралів) для інтегровної системи значно простіший від побудови "стандартного" оператора Лакса [3–5].

У цій статті ми продемонструємо на прикладі добре відомих моделей KdV та mKdV можливість застосування методу інтегрування динамічних систем з інтегродиференціальними зображеннями Лакса, розробленого одним з авторів [21, 1] і апробованим для широкого кола нелінійних моделей теорії солітонів в [1, 21, 23–25]. Ці моделі виникають як додаткові редукції в пучках інтегродиференціальних операторів, які в свою чергу є симетрійними редукціями ієрархій нелінійних рівнянь Кадомцева–Петвіашвілі і їх модифікацій [26–30]. Крім того, породжуючі оператори допускають природні узагальнення в дусі робіт [17–20], що дозволяє будувати багатокомпонентні (векторні) та матричні узагальнення інтегровних систем.

Розглянемо рівняння KdV [31], з якого власне почався розвиток аналітичних методів інтегрування нелінійних рівнянь математичної і теоретичної фізики [32–38]

$$u_t = u_{xxx} + auu_x = K[u] = \mathcal{L}(\nabla H_1) = \mathcal{M}(\nabla H_2), \tag{6}$$

де $u = u(x,t) \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathcal{L} = \mathcal{D}$, $\mathcal{M} = \mathcal{D}^3 + \frac{1}{3}au\mathcal{D} + \frac{1}{3}a\mathcal{D}u$ — узгоджена гамільтонова пара, а функціонали

$$H_1 = \int_{\mathbb{R}} (-\frac{1}{2}u_x^2 + \frac{1}{6}au^3)dx, \quad H_2 = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}u^2 dx,$$

є відповідно першими інтегралами рівняння KdV. Породжуючі оператори $\Lambda = \mathcal{L}^{-1}\mathcal{M}$ та $\Lambda^\tau = \mathcal{M}\mathcal{L}^{-1}$ мають вигляд

$$\Lambda = \mathcal{D}^2 + \frac{2}{3}au - \frac{1}{3}a\mathcal{D}^{-1}u_x = \mathcal{D}^2 + \frac{1}{3}au + \frac{1}{3}a\mathcal{D}^{-1}u\mathcal{D}, \quad \Lambda^\tau = \mathcal{D}^2 + \frac{2}{3}au + \frac{1}{3}au_x\mathcal{D}^{-1}, \tag{7}$$

а оператор K' визначається рівністю

$$K'(\theta) = \frac{d}{d\varepsilon}K(u + \varepsilon\theta)|_{\varepsilon=0} = \theta_{xxx} + a\theta u_x + au\theta_x, \tag{8}$$

тобто $K' = \mathcal{D}^3 + au\mathcal{D} + au_x$, $K'^\tau = -\mathcal{D}^3 - au\mathcal{D}$.

Рівняння (5) задають бігамільтонове зображення Лакса для рівняння KdV з операторами вигляду (7)–(8). Зауважимо, що оператори Λ, K'^τ є $\mathcal{D}$–ермітовим і $\mathcal{D}$–косоермітовим відповідно, і, як буде показано в наступному пункті, є частковими випадками $\mathcal{D}$–ермітової ієрархії cmKP.

Подібно до попереднього, відповідні об'єкти для рівняння mKdV мають вигляд

$$u_t = u_{xxx} + au^2u_x = K[u] = \mathcal{L}(\nabla H_1) = (-\mathcal{D})(\nabla \int_{\mathbb{R}} (\frac{1}{2}u_x^2 - \frac{1}{12}au^4)dx) =$$

$$= \mathcal{M}(\nabla H_2) = (\mathcal{D}^3 + \frac{2}{3}a\mathcal{D}u\mathcal{D}^{-1}u\mathcal{D})(\nabla \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}u^2 dx), \tag{9}$$

$\Lambda = -\mathcal{D}^2 - \frac{2}{3}au\mathcal{D}^{-1}u\mathcal{D}$, $\Lambda^\tau = -\mathcal{D}^2 - \frac{2}{3}a\mathcal{D}u\mathcal{D}^{-1}u$, $K' = \mathcal{D}^3 + au^2\mathcal{D} + 2auu_x$, $K'^\tau = -\mathcal{D}^3 - au^2\mathcal{D}$.

3. Нелінійні системи еволюційних рівнянь з $\mathcal{D}$HcmKP ієрархії. Розглянемо введену в [1] нелокальну редукцію модифікованої ієрархії Кадомцева–Петвіашвілі, так звану "$\mathcal{D}$-Hermitian constrained modified Kadomtsev–Petviashvili hierarchy" ($\mathcal{D}$HcmKP), яка задається так

$$\zeta \ni L_{\mathcal{D}HcmKP} := L_n = \mathcal{D}^n + u_{n-1}\mathcal{D}^{n-1} + \cdots + u_1\mathcal{D} - V, \tag{10}$$

де $\zeta_{<1} \ni V$ є $\mathcal{D}$-ермітовим ($\mathcal{D}$-косоермітовим) інтегральним оператором Вольтерри з виродженим ядром, що визначається рівністю

$$V = \mathbf{q}\mathcal{M}\mathcal{D}^{-1}\mathbf{q}^*\mathcal{D} = \mathbf{q}\mathcal{M}\mathbf{q}^* - \mathbf{q}\mathcal{M}\mathcal{D}^{-1}\mathbf{q}_x^*. \tag{11}$$

У формулі (11) стала матриця $\mathcal{M}$ є ермітовою ($\mathcal{M}^* = \mathcal{M}$) при $n = 2k$, та косоермітовою ($\mathcal{M}^* = -\mathcal{M}$) при $n = 2k-1$, $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_l)$, $k, l \in \mathbb{N}$, і правильна додаткова редукція для оператора L_n

$$L_n^* = \mu\mathcal{D}L_n\mathcal{D}^{-1},\ \mu = \pm 1. \tag{12}$$

Лаксові потоки

$$\alpha_m L_{n_{t_m}} = [B_m, L_n], \tag{13}$$

де $L_n := L_{\mathcal{D}HcmKP}$, $B_m = (L_n^{\frac{m}{n}})_{>0}$, $n, m \in \mathbb{N}$, формують ієрархію інтегровних систем $\mathcal{D}HcmKP$, які і є предметом нашого дослідження. Степінь $L_n^{\frac{1}{n}} = \mathcal{D} + a_0 + a_{-1}\mathcal{D}^{-1} + \dots$ обчислюється з умови $(L_n^{\frac{1}{n}})^n = L_{\mathcal{D}HcmKP}$. Виходячи з цього, ми отримуємо рекурентні формули для обчислення коефіцієнтів $a_0,\ a_{-1}, \dots$ оператора $L_n^{\frac{1}{n}}$. Вищі дробові степені $L_n^{m/n}$ оператора L_n знаходимо за означенням: $L_n^{m/n} := (L_n^{1/n})^m$. Функції $\mathbf{q} = \mathbf{q}(x, t_m)$, $m \geq 2$; $(t_2 := y, t_3 := t)$ задовольняють рівняння $\alpha_m \mathbf{q}_{t_m} = B_m(\mathbf{q})$ і називаються власними функціями ієрархії $\mathcal{D}HcmKP$ (відповідно $\mathbf{q}^*$ називаються спряженими власними функціями).

При $n = 1$ та $m \in \mathbb{N}$ потоки (13), записані в термінах коефіцієнтів оператора L_n (10), задають ієрархію векторного нелінійного модифікованого рівняння Шредінгера ($m = 2$, див. формулу (14)) і його вищих симетрій.

Випадок $n = 1$**.** 1) $m = 2, \alpha_2 = i$. $L_1 = \mathcal{D} - \mathbf{q}\mathcal{M}\mathcal{D}^{-1}\mathbf{q}^*\mathcal{D}$. $B_2 = (L_1^2)_{>0} = \mathcal{D}^2 - 2\mathbf{q}\mathcal{M}\mathbf{q}^*\mathcal{D}, \mathcal{M}^* = -\mathcal{M}$:

$$i\mathbf{q}_{t_2} = \mathbf{q}_{xx} - 2\mathbf{q}\mathcal{M}\mathbf{q}^*\mathbf{q}_x. \tag{14}$$

2) $m = 3, \alpha_3 = 1$. $B_3 = (L_1^3)_{>0} = \mathcal{D}^3 - 3\mathbf{q}\mathcal{M}\mathbf{q}^*\mathcal{D}^2 - 3[\mathbf{q}_x\mathcal{M}\mathbf{q}^* - (\mathbf{q}\mathcal{M}\mathbf{q}^*)^2]\mathcal{D}$:

$$\mathbf{q}_{t_3} = \mathbf{q}_{xxx} - 3(\mathbf{q}\mathcal{M}\mathbf{q}^*)\mathbf{q}_{xx} - 3(\mathbf{q}_x\mathcal{M}\mathbf{q}^* - (\mathbf{q}\mathcal{M}\mathbf{q}^*)^2)\mathbf{q}_x. \tag{15}$$

Рівняння (15) є модифікацією комплексного векторного рівняння Кортевега–де–Вріза (KdV). Дійсною редукцією $\mathbf{q}^* = \mathbf{q}^\top$, $\mathcal{M} \in Mat_{l\times l}(\mathbb{R})$ рівняння (15) спрощується до вигляду

$$\mathbf{q}_{t_3} = \mathbf{q}_{xxx} - 3\mathbf{q}_x\mathcal{M}\mathbf{q}^\top\mathbf{q}_x.$$

Випадок $n = 2$**.** Для $L_2 = \mathcal{D}^2 + iu\mathcal{D} - \mathbf{q}\mathcal{M}\mathcal{D}^{-1}\mathbf{q}^*\mathcal{D}$ отримуємо, що $B_2 = (L_2)_{>0} = \mathcal{D}^2 + iu\mathcal{D}$, $B_3 = \mathcal{D}^3 + \frac{3}{2}iu\mathcal{D}^2 - \left(\frac{3}{8}u^2 - \frac{3i}{4}u_x + \frac{3}{2}\mathbf{q}\mathcal{M}\mathbf{q}^*\right)\mathcal{D}$, $\mathcal{M}^* = \mathcal{M}$. При $\alpha_2 = i$, $\alpha_3 = 1$ наслідком (13) є наступні системи рівнянь

$$\left\{\begin{array}{l} i\mathbf{q}_{t_2} = \mathbf{q}_{xx} + iu\mathbf{q}_x, \\ u_{t_2} = 2(\mathbf{q}\mathcal{M}\mathbf{q}^*)_x \end{array}\right. \tag{16}$$

та

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{q}_{t_3} = \mathbf{q}_{xxx} + \frac{3}{2}iu\mathbf{q}_{xx} - (\frac{3}{8}u^2 + \frac{3}{2}\mathbf{q}\mathcal{M}\mathbf{q}^* - \frac{3}{4}iu_x)\mathbf{q}_x, \\ u_{t_3} = \frac{1}{4}u_{xxx} + \frac{3}{8}u^2u_x - \frac{3}{2}(\mathbf{q}\mathcal{M}\mathbf{q}^*u)_x + \frac{3}{2}i(\mathbf{q}_x\mathcal{M}\mathbf{q}^* - \mathbf{q}\mathcal{M}\mathbf{q}_x^*)_x. \end{array}\right. \tag{17}$$

Система (16) є мультикомпонентною модифікацією інтегровної моделі Яджими–Ойкави [39,22,1], яка описує взаємодію пакету навколозвукових ленгмюрових хвиль у фізиці плазми. Система (17) є модифікацією вищої моделі Яджими–Ойкави. Зауважимо, що рівняння (17) допускають декілька цікавих редукцій на інваріантні підмноговиди, еволюція на яких задається відомими динамічними системами. Так, при $\mathbf{q}\mathcal{M}\mathcal{D}^{-1}\mathbf{q}^*\mathcal{D} \equiv 0$ отримуємо скалярне модифіковане рівняння Кортевега-де-Вріза (mKdV)

$$u_{t_3} = \frac{1}{4}u_{xxx} + \frac{3}{8}u^2 u_x.$$

При $u \equiv 0$ отримується векторне комплексне рівняння mKdV

$$\mathbf{q}_{t_3} = \mathbf{q}_{xxx} - \frac{3}{2}\mathbf{q}\mathcal{M}\mathbf{q}^*\mathbf{q}_x \tag{18}$$

з диференціальною умовою

$$(\mathbf{q}\mathcal{M}\mathbf{q}_x^* - \mathbf{q}_x\mathcal{M}\mathbf{q}^*)_x = 0, \tag{19}$$

а при $\bar{\mathbf{q}} \equiv \mathbf{q}$, $\mathcal{M} \in Mat_{l\times l}(\mathbb{R})$ його дійсна версія

$$\mathbf{q}_{t_3} = \mathbf{q}_{xxx} - \frac{3}{2}\mathbf{q}\mathcal{M}\mathbf{q}^\top\mathbf{q}_x. \tag{20}$$

При цьому диференціальна в'язь відсутня (задовольняється тотожньо).
Зауваження. Векторне узагальнення комплексного рівняння mKdV можна отримати з системи (18)–(19), задовольнивши диференціальну в'язь (19) у наступний спосіб. Нехай $\mathbf{q} = (\vec{\mathbf{q}}, \bar{\vec{\mathbf{q}}})$, $\vec{\mathbf{q}} = (q_1, ..., q_k)$ — k-компонентна вектор-функція ($l = 2k$), а матриця $\mathcal{M}$ має блочний вигляд

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} B & A \\ \bar{A} & \bar{B} \end{pmatrix}, \;\; A^\top = A,\, B^* = B. \tag{21}$$

При цьому рівняння (18) переписується в термінах векторного поля $\vec{\mathbf{q}}$ так

$$\vec{\mathbf{q}}_{t_3} = \vec{\mathbf{q}}_{xxx} - \frac{3}{2}(\vec{\mathbf{q}}B\vec{\mathbf{q}}^* + \bar{\vec{\mathbf{q}}}\bar{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{q}}^\top + \tilde{\mathbf{q}}\mathbf{A}\tilde{\mathbf{q}}^\top + \bar{\tilde{\mathbf{q}}}\bar{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{q}}^*)\tilde{\mathbf{q}}_{\mathbf{x}},$$

а в'язь (19) задовольняється тотожньо.
Випадок $n = 3$**.** Для $L_3 = \mathcal{D}^3 + u\mathcal{D} - \mathbf{q}\mathcal{M}\mathcal{D}^{-1}\mathbf{q}^*\mathcal{D}$ отримуємо, що $B_2 = \mathcal{D}^2$, $B_3 = \mathcal{D}^3 + u\mathcal{D}, \mathcal{M}^* = -\mathcal{M}$. При $\alpha_3 = 1$ з (13) випливає наступна система рівнянь

$$\begin{cases} \mathbf{q}_{t_3} = \mathbf{q}_{xxx} + u\mathbf{q}_x, \\ u_{t_3} = \frac{3}{2}(\mathbf{q}\mathcal{M}\mathbf{q}_x^* - \mathbf{q}_x\mathcal{M}\mathbf{q}^*)_x \;. \end{cases} \tag{22}$$

При обмеженні $\mathbf{q} = \bar{\mathbf{q}}$ ($\mathbf{q}$ — дійсна вектор-функція) дана система редукується до вигляду

$$\begin{cases} \mathbf{q}_{t_3} = \mathbf{q}_{xxx} + u\mathbf{q}_x, \\ u_{t_3} = \frac{3}{2}(\mathbf{q}\mathcal{M}\mathbf{q}_x^\top - \mathbf{q}_x\mathcal{M}\mathbf{q}^\top)_x \;, \end{cases} \tag{23}$$

де $\mathcal{M}^\top = -\mathcal{M}$.

У двокомпонентному випадку при $\mathbf{q} = (q, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}, \mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ система (23) набуває вигляду

$$\begin{cases} q_{t_3} = q_{xxx} + uq_x, \\ u_{t_3} = 3\alpha q_{xx} \;. \end{cases} \tag{24}$$

До подібного вигляду зводиться і загальна система (22) при редукції $\mathbf{q} = (\vec{\mathbf{q}}, \alpha)$, $\vec{\mathbf{q}} = (q_1, ..., q_k)$ — комплексна вектор-функція, $l = 2k$, $\mathbb{C}^k \ni \vec{\alpha}$ — сталий вектор, $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & -I_k \\ I_k & 0 \end{pmatrix}$. В термінах дійсних скалярних польових змінних $u = u(x, t_3),\ v = v(x, t_3) := \vec{\alpha}\vec{\mathbf{q}}^* + \vec{\mathbf{q}}\vec{\alpha}^*$ наслідком рівнянь (22) є така система

$$\begin{cases} v_{t_3} = v_{xxx} + uv_x, \\ u_{t_3} = \frac{3}{2}v_{xx}\ . \end{cases} \tag{25}$$

Виходячи з оператора $B_5 = \mathcal{D}^5 + \frac{5}{3}u\mathcal{D}^3 + \frac{5}{3}(u_x - \mathbf{q}\mathcal{M}\mathbf{q}^*)\mathcal{D}^2 + \frac{5}{9}(2u_{xx} + u^2 - 3\mathbf{q}_x\mathcal{M}\mathbf{q}^*)\mathcal{D}$, наслідком рівняння (13) при $\alpha_5 = 1$ є наступна система рівнянь

$$\begin{cases} u_{t_5} = (-\frac{1}{9}u_{xxxx} - \frac{5}{9}uu_{xx} - \frac{5}{27}u^3 - \frac{5}{3}\mathbf{q}\mathcal{M}\mathbf{q}^*u_x - \frac{10}{3}\mathbf{q}_x\mathcal{M}\mathbf{q}^*u + \\ \quad + \frac{5}{3}(\mathbf{q}\mathcal{M}\mathbf{q}^*)^2 - \frac{10}{3}\mathbf{q}_{xxx}\mathcal{M}\mathbf{q}^* - \frac{5}{3}\mathbf{q}_{xx}\mathcal{M}\mathbf{q}^*_x - \frac{10}{3}\mathbf{q}_x\mathcal{M}\mathbf{q}^*_{xx})_x, \\ \mathbf{q}_{t_5} = \mathbf{q}_{xxxxx} + \frac{5}{3}u\mathbf{q}_{xxx} + \frac{5}{3}(u_x - \mathbf{q}\mathcal{M}\mathbf{q}^*)\mathbf{q}_{xx} + \frac{5}{9}(2u_{xx} + u^2 - 3\mathbf{q}_x\mathcal{M}\mathbf{q}^*)\mathbf{q}_x, \\ (\mathbf{q}\mathcal{M}\mathbf{q}^*u)_x = -(\mathbf{q}\mathcal{M}\mathbf{q}^*)_{xxx} + \frac{3}{2}(\mathbf{q}_x\mathcal{M}\mathbf{q}^*_x)_x\ . \end{cases} \tag{26}$$

При $\mathbf{q} = \bar{\mathbf{q}}$ третє рівняння системи (26) виконується тотожньо, і ми отримуємо

$$\begin{cases} u_{t_5} = (-\frac{1}{9}u_{xxxx} - \frac{5}{9}uu_{xx} - \frac{5}{27}u^3 - \frac{10}{3}\mathbf{q}_x\mathcal{M}\mathbf{q}^\top u - \frac{10}{3}\mathbf{q}_{xxx}\mathcal{M}\mathbf{q}^\top - \frac{5}{3}\mathbf{q}_x\mathcal{M}\mathbf{q}^\top_{xx})_x, \\ \mathbf{q}_{t_5} = \mathbf{q}_{xxxxx} + \frac{5}{3}u\mathbf{q}_{xxx} + \frac{5}{3}u_x\mathbf{q}_{xx} + \frac{5}{9}(2u_{xx} + u^2 - 3\mathbf{q}_x\mathcal{M}\mathbf{q}^\top)\mathbf{q}_x\ . \end{cases} \tag{27}$$

Ці потоки є системою рівнянь на власні функції $\mathbf{q} = \mathbf{q}(x, t_5)$ ієрархії $\mathcal{D}$HcmKP, зчепленою з рівнянням Савади–Котери ($\mathbf{q} = 0$).

Зауважимо також, що диференціальну в'язь в системі рівнянь (26) можна задовольнити й інакше, не переходячи до дійсної редукції (27). А саме — поклавши, наприклад, $\mathbf{q} = (\vec{\mathbf{q}}, \bar{\vec{\mathbf{q}}})$, $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} B & A \\ \bar{A} & \bar{B} \end{pmatrix}$, де $B^* = -B$, $A^\top = -A$.

4. Інтегрування нелінійних моделей з ієрархії $\mathcal{D}$HcmKP. Розглянемо процес побудови точних розв'язків деяких з наведених вище нелінійних моделей. Для систем (16)–(17) справджується наступне твердження.

Теорема 2. *Нехай $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_K)$, $K \in \mathbb{N}$ є гладкою, швидко спадною на $-\infty$ комплекснозначною K-компонентною вектор-функцією змінної $x \in \mathbb{R}$ та еволюційних параметрів $t_2, t_3 \in \mathbb{R}(t_2 = y, t_3 = t)$, яка задовольняє наступні додаткові умови:*

- *a) φ є спільним розв'язком лінійного рівняння Шредінгера $i\varphi_{t_2} = \varphi_{xx}$ та рівняння $\varphi_{t_3} = \varphi_{xxx}$;*
- *b) справедлива рівність $\varphi_{xx} = \varphi\Lambda$, де $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \ldots, \lambda_K^2) = const$, $\lambda_j := \lambda_{j1} + i\lambda_{j2} \in \mathbb{C}$, $\lambda_{j1} > 0$, $j =\in \{1, 2, \ldots, K\}$.*

Тоді вектор-функція

$$\mathbf{q} := \varphi\Omega^{-1} = \varphi\left(C + \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi^*\varphi_x dx\right)^{-1}$$

та функція

$$u := 2i[\ln(1 - \varphi\Omega^{-1}\varphi^*)]_x$$

будуть розв'язком систем рівнянь (16)–(17) для $l = K$ при $\mathcal{M} = C\Lambda - \Lambda^* C$, де $C^* = -C$ є косоермітовою $(K \times K)$ матрицею.

Доведення. Візьмемо $L_0 := \mathcal{D}^2$, тоді, використовуючи Теорему 1,

$$L := W\mathcal{D}^2 W^{-1} = \mathcal{D}^2 - 2w_{0x}w_0^{-1}\mathcal{D} - [\varphi_{xx} - \varphi\Omega^{-1}\int_{-\infty}^{x}\varphi^*\varphi_{xxx}dx]\mathcal{D}^{-1}\Omega^{*-1}\varphi^*\mathcal{D}-$$

$$-\varphi\Omega^{-1}\mathcal{D}^{-1}[\varphi^*_{xx} - \int_{-\infty}^{x}\varphi^*_{xxx}\varphi dx\Omega^{*-1}\varphi^*]\mathcal{D}.$$

З умови b) маємо, що

$$L = \mathcal{D}^2 - 2w_{0x}w_0^{-1}\mathcal{D} - \varphi\Omega^{-1}(C\Lambda - \Lambda^* C)\mathcal{D}^{-1}\Omega^{*-1}\varphi^*\mathcal{D}.$$

Далі, взявши $M_0 := i\partial_{t_2} - \mathcal{D}^2$, подібно переходимо до оператора $M := WM_0W^{-1} =$

$$= i\partial_{t_2} - \mathcal{D}^2 + 2w_{0x}w_0^{-1}\mathcal{D} - [i\varphi_{t_2} - \varphi_{xx} - \varphi\Omega^{-1}\int_{-\infty}^{x}\varphi^*(i\varphi_{t_2} - \varphi_{xx})_x dx]\mathcal{D}^{-1}\Omega^{*-1}\varphi^*\mathcal{D}+$$

$$+\varphi\Omega^{-1}\mathcal{D}^{-1}[i\varphi^*_{t_2} + \varphi^*_{xx} - \int_{-\infty}^{x}(i\varphi^*_{t_2} + \varphi^*_{xx})_x\varphi dx\Omega^{*-1}\varphi^*]\mathcal{D}.$$

За умови a), інтегральні доданки зникнуть, тобто оператор M матиме вигляд $M = i\partial_{t_2} - \mathcal{D}^2 + 2w_{0x}w_0^{-1}\mathcal{D}$. З рівняння $[L_0, M_0] = 0$ випливає, що $[L, M] = 0$, а явний вигляд коефіцієнтів "одягнених" операторів приводить до твердження теореми.

Доведення твердження для системи (17) проводиться подібно, з використанням рівності

$$M_0 := \partial_{t_3} - \mathcal{D}^3 \to M := WM_0W^{-1} = \partial_{t_3} - \mathcal{D}^3 + 3w_{0x}w_0^{-1}\mathcal{D}^2 - [w_0(w_0^{-1})_{xx} - 2w_0\varphi_{xx}\Omega^{*-1}\varphi^* -$$

$$-w_0\varphi_x(\Omega^{*-1}\varphi^*)_x + \varphi\Omega^{-1}\varphi^*_x(w_0^{-1})_x - \varphi\Omega^{-1}\varphi^*_{xx}w_0^{-1} - \varphi\Omega^{-1}\varphi^*_x\varphi_x\Omega^{*-1}\varphi^*]\mathcal{D}-$$

$$-[\varphi_{t_3} - \varphi_{xxx} - \varphi\Omega^{-1}\int_{-\infty}^{x}\varphi^*(\varphi_{t_3} - \varphi_{xxx})_x dx]\mathcal{D}^{-1}\Omega^{*-1}\varphi^*\mathcal{D}+$$

$$+\varphi\Omega^{-1}\mathcal{D}^{-1}[\varphi^*_{t_3} - \varphi^*_{xxx} - \int_{-\infty}^{x}(\varphi^*_{t_3} - \varphi^*_{xxx})_x\varphi dx\Omega^{*-1}\varphi^*]\mathcal{D}.$$

Теорему доведено. □

Зауваження. Компоненти ермітової матриці $\mathcal{M} = C\Lambda - \Lambda^* C$, $\mathcal{M} = (\mu_{mn}), m, n \in \{1, 2, \ldots, K\}$ мають вигляд $\mu_{mn} = c_{mn}(\lambda_n^2 - \overline{\lambda_m^2})$, де c_{mn} — компоненти матриці C. Якщо матриця C є діагональною, то

$$\mathcal{M} = 4i\mathrm{diag}(c_{11}\lambda_{11}\lambda_{12}, c_{22}\lambda_{21}\lambda_{22}, \ldots, c_{KK}\lambda_{K1}\lambda_{K2}).$$

Наслідок 1. *Нехай $K \geq l \in \mathbb{N}$, функція $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_K)$ задовольняє умови Теореми 2 і матриця $C = -\frac{i}{4}diag\left(\frac{\mu_1}{\lambda_{11}\lambda_{12}}, \ldots \frac{\mu_l}{\lambda_{l1}\lambda_{l2}}, 0, \ldots, 0\right) \in Mat_{K\times K}(i\mathbb{R})$.*

Тоді функції $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_l)(x, t_2)$, де

$$q_j = (-1)^{K+j}\frac{\det\begin{pmatrix}\Omega_{(j)}\\ \varphi\end{pmatrix}}{\det\Omega},\ j =\in \{1, 2, \ldots, l\}, \tag{28}$$

(матриця $\Omega_{(j)}$ отримана з Ω викресленням j-ї стрічки)

та

$$u := 2i\left[\ln\frac{\det\begin{pmatrix}\Omega & \varphi^*\\ \varphi & 1\end{pmatrix}}{\det\Omega}\right]_x \tag{29}$$

є розв'язком систем

$$\begin{cases} i\mathbf{q}_{t_2} = \mathbf{q}_{xx} + iu\mathbf{q}_x, \\ u_{t_2} = 2\sum_{j=1}^{l}\mu_j|q_j|_x^2 \end{cases} \tag{30}$$

та

$$\begin{cases} \mathbf{q}_{t_3} = \mathbf{q}_{xxx} + \frac{3}{2}iu\mathbf{q}_{xx} - (\frac{3}{8}u^2 + \frac{3}{2}\sum_{j=1}^{l}\mu_j|q_j|^2 - \frac{3}{4}iu_x)\mathbf{q}_x, \\ u_{t_3} = \frac{1}{4}u_{xxx} + \frac{3}{8}u^2u_x - \frac{3}{2}(\sum_{j=1}^{l}\mu_j(u|q_j|^2)_x) + \frac{3}{2}i(\sum_{j=1}^{l}\mu_j q_{jxx}\bar{q}_j - \sum_{j=1}^{l}\mu_j\bar{q}_{jxx}q_j). \end{cases} \tag{31}$$

Доведення. Ми використовуємо відому алгебраїчну рівність для обрамленого визначника

$$\det\begin{pmatrix}\Omega & \psi^\top\\ \varphi & \alpha\end{pmatrix} := \alpha\det\Omega - \varphi\Omega^c\psi^\top,\ \alpha\in\mathbb{C},$$

де Ω^c є матрицею алгебраїчних доповнень, φ та ψ — деякі K–компонентні вектор-функції; або в іншій формі

$$\alpha - \varphi\Omega^{-1}\psi^\top = \frac{\det\begin{pmatrix}\Omega & \psi^\top\\ \varphi & \alpha\end{pmatrix}}{\det\Omega}.$$

Тому,

$$1 - \varphi\Omega^{-1}\varphi^* = \frac{\det\begin{pmatrix}\Omega & \varphi^*\\ \varphi & 1\end{pmatrix}}{\det\Omega},$$

та з Теореми 2 випливає, що

$$q_j = \varphi\Omega^{-1}e_j^T = -\frac{\det\begin{pmatrix}\Omega & e_j^\top\\ \varphi & 0\end{pmatrix}}{\det\Omega},\ e_k := (e_{k_1}, e_{k_2}, \ldots, e_{k_K}),\ e_{k_m} = \delta_k^m,$$

звідки й отримуємо компактні форми розв'язків q_j та u у вигляді відношення визначників (28)–(29). $\square$

Наслідок 2. *Нехай функція $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_K)$ задовольняє умови Теореми 2, K — довільне натуральне число, $l = 1$ та компоненти матриці C мають вигляд $C_{mn} = \mu/(\lambda_n^2 - \overline{\lambda_m^2})$, $\mu := \mathcal{M}, \mu\in\mathbb{R}$ ($\lambda_n^2 - \overline{\lambda_m^2} \neq 0$, інакше маємо $\mu = 0$, і еволюція по параметру t_2 стає лінійною), тоді функції*

$$q = -\frac{\det\begin{pmatrix}\Omega & \vec{1}^\top\\ \varphi & 0\end{pmatrix}}{\det\Omega},\ \vec{1} = (1, 1, \ldots, 1)\in\mathbb{R}^K \tag{32}$$

та

$$u := 2i\left[\ln\frac{\det\begin{pmatrix}\Omega & \varphi^*\\ \varphi & 1\end{pmatrix}}{\det\Omega}\right]_x \tag{33}$$

є K–солітонним розв'язком скалярного випадку систем (16)–(17)

$$\begin{cases} iq_{t_2} = q_{xx} + iuq_x, \\ u_{t_2} = 2\mu|q|_x^2, \end{cases} \tag{34}$$

$$\begin{cases} q_{t_3} = q_{xxx} + \frac{3}{2}iuq_{xx} - (\frac{3}{8}u^2 + \frac{3}{2}\mu|q|^2 - \frac{3}{4}iu_x)q_x, \\ u_{t_3} = \frac{1}{4}u_{xxx} + \frac{3}{8}u^2u_x - \frac{3}{2}\mu(|q|^2u)_x + \frac{3}{2}i\mu(q_{xx}\bar{q} - q\bar{q}_{xx}). \end{cases} \tag{35}$$

Доведення. Використаємо рівність:

$$C\Lambda - \Lambda^* C = \mu \vec{1}^\top \vec{1}.$$

Проведемо перетворення

$$\varphi\Omega^{-1}(C\Lambda - \Lambda^* C)\mathcal{D}^{-1}\Omega^{*-1}\varphi^* = \mu\varphi\Omega^{-1}\vec{1}^\top\mathcal{D}^{-1}\vec{1}\Omega^{*-1}\varphi^* = \mu\sum_{j=1}^{K}(\varphi\Omega^{-1})_j\mathcal{D}^{-1}\sum_{j=1}^{K}(\Omega^{*-1}\varphi^*)_j.$$

Звідки приходимо до вигляду

$$\sum_{j=1}^{K}(\varphi\Omega^{-1})_j = \sum_{j=1}^{K}\varphi\Omega^{-1}e_j^\top = -\sum_{j=1}^{K}\frac{\det\begin{pmatrix}\Omega & e_j^\top \\ \varphi & 0\end{pmatrix}}{\det\Omega} = -\frac{\det\begin{pmatrix}\Omega & \vec{1}^\top \\ \varphi & 0\end{pmatrix}}{\det\Omega}.$$

□

Зауваження. Очевидно, що при $l = 1$ формули (32)–(33) збігаються за умови $C = -\frac{i}{4}diag\left(\frac{\mu}{\lambda_{11}\lambda_{12}}, 0, \ldots, 0\right)$ з наведеними раніше формулами для односолітонних розв'язків (28)–(29)

$$q = (-1)^{K+1}\frac{\det\begin{pmatrix}\Omega_{(1)} \\ \varphi\end{pmatrix}}{\det\Omega}, \quad u := 2i\left[\ln\frac{\det\begin{pmatrix}\Omega & \varphi^* \\ \varphi & 1\end{pmatrix}}{\det\Omega}\right]_x.$$

Наслідок 3. *Нехай $K = l = 1$, функція φ задовольняє умови Теореми 2 та $C = C_{11} = -i\frac{\mu}{4\lambda_{11}\lambda_{12}}$. Тоді розв'язки систем (34)-(35) знаходяться за формулами*

$$q = \frac{\varphi}{C + \int\limits_{-\infty}^{x}\varphi^*\varphi_x dx}, \quad u := 2i\left[\ln\left(1 - \frac{|\varphi|^2}{C + \int\limits_{-\infty}^{x}\varphi^*\varphi_x dx}\right)\right]_x. \tag{36}$$

Приклади. 1) Зокрема, при $\varphi = \varphi_0 \exp^{\lambda_1 x - i\lambda_1^2 t_2 + \lambda_1^3 t_3}$, де $\lambda_1 = \lambda_{11} + i\lambda_{12}$, $\lambda_{11} > 0$, $\varphi_0 \in \mathbb{C}$ та $C \in i\mathbb{R}$ з формул (36) отримуємо односолітонний розв'язок

$$q = \frac{2\lambda_{11}\varphi}{2C\lambda_{11} + \lambda_1|\varphi|^2} = \frac{4\lambda_{11}\lambda_{12}\varphi}{2\lambda_{12}\lambda_1|\varphi|^2 - i\mu};$$

$$u = -\frac{16i\lambda_{11}^3|\varphi|^2 C}{4\lambda_{11}^2 C^2 + 4i\lambda_{11}\lambda_{12}C|\varphi|^2 - (\lambda_{11}^2 + \lambda_{12}^2)|\varphi|^4} = \frac{16\lambda_{11}^2\lambda_{12}|\varphi|^2\mu}{4\lambda_{11}^2\lambda_{12}^2 + (\mu - 2\lambda_{12}^2|\varphi|^2)^2}.$$

2) У випадку, коли $K=l=2$, $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2)$, $C=\begin{pmatrix} ic & a \\ -a & \gamma ic \end{pmatrix}$, $a,c,\gamma\in\mathbb{R}$ розв'язки систем (30)–(31) набувають вигляду

$$\mathbf{q}=\frac{1}{\det\Omega}\Big(\varphi_1(i\gamma c+\int_{-\infty}^{x}\bar{\varphi}_2\varphi_{2x}dx)+\varphi_2(a-\int_{-\infty}^{x}\bar{\varphi}_2\varphi_{1x}dx),$$

$$\varphi_2(ic+\int_{-\infty}^{x}\bar{\varphi}_1\varphi_{1x}dx)-\varphi_1(a+\int_{-\infty}^{x}\bar{\varphi}_1\varphi_{2x}dx)\Big);$$

де

$$\det\Omega=ic(\gamma\int_{-\infty}^{x}\bar{\varphi}_1\varphi_{1x}dx+\int_{-\infty}^{x}\bar{\varphi}_2\varphi_{2x}dx)+a(\int_{-\infty}^{x}\bar{\varphi}_1\varphi_{2x}dx-\int_{-\infty}^{x}\bar{\varphi}_2\varphi_{1x}dx)+$$

$$+\int_{-\infty}^{x}\bar{\varphi}_1\varphi_{1x}dx\int_{-\infty}^{x}\bar{\varphi}_2\varphi_{2x}dx-\int_{-\infty}^{x}\bar{\varphi}_1\varphi_{2x}dx\int_{-\infty}^{x}\bar{\varphi}_2\varphi_{1x}dx+a^2-\gamma c^2.$$

Функція $u=u(x,t_2)$ визначається за формулою $u=2i[\ln w_0]_x$, де $w_0=1-\frac{P}{\det\Omega}$, а

$$P=|\varphi_1|^2(i\gamma c+\int_{-\infty}^{x}\bar{\varphi}_2\varphi_{2x}dx)+\bar{\varphi}_1\varphi_2(a-\int_{-\infty}^{x}\bar{\varphi}_2\varphi_{1x}dx)+$$

$$+|\varphi_2|^2(ic+\int_{-\infty}^{x}\bar{\varphi}_1\varphi_{1x}dx)-\varphi_1\bar{\varphi}_2(a+\int_{-\infty}^{x}\bar{\varphi}_1\varphi_{2x}dx).$$

5. Інтегрування нелінійної моделі mKdV.

Лема 3. *Нехай a)* $\varphi=(\vec{\varphi},\bar{\vec{\varphi}})$, *тобто* $\varphi\sigma_1=\bar{\varphi}$, *де* $\vec{\varphi}=(\varphi_1,\ldots,\varphi_k)$, $K=2k$, $\sigma_1=\sigma_1^{-1}=\sigma_1^{\top}=\begin{pmatrix} 0 & I_k \\ I_k & 0 \end{pmatrix}$, I_k *— одинична матриця розмірності* $(k\times k)$; *b) Матриця* C *задовольняє співвідношення* $\sigma_1C\sigma_1=\bar{C}$ *та* $C^*=-C$*. Тоді*
$w_0:=1-\varphi\Omega^{-1}\varphi^*\equiv 1;\ u=2i(\ln w_0)_x\equiv 0.$

Доведення. Оскільки $\sigma_1\Omega\sigma_1=\bar{\Omega}$, звідси випливає, що $\det\Omega=\det\Omega^*$. Враховуючи співвідношення з Леми 2, отримуємо справедливість твердження. □

Теорема 3. *Нехай* $\varphi=(\vec{\varphi},\bar{\vec{\varphi}})$, *де* $\vec{\varphi}=(\varphi_1,\ldots,\varphi_k)$, $K=2k$, $\sigma_1C\sigma_1=\bar{C}$ *та* $C^*=-C$, *а також* φ *є розв'язком системи рівнянь*

$$\begin{cases} \varphi_{t_3}=\varphi_{xxx}, \\ \varphi_{xx}=\varphi\Lambda, \end{cases}$$

Λ *— стала комплекснозначна матриця з квадратними блоками вигляду*

$$\Lambda=\begin{pmatrix} \Lambda_1 & \Lambda_2 \\ \bar{\Lambda}_2 & \bar{\Lambda}_1 \end{pmatrix}. \tag{37}$$

Тоді функція $\mathbf{q}:=\varphi\Omega^{-1}$ *є розв'язком комплексного* K*–компонентного рівняння mKdV*

$$\mathbf{q}_{t_3}=\mathbf{q}_{xxx}-\frac{3}{2}\mathbf{q}\mathcal{M}\mathbf{q}^*\mathbf{q}_x,\ \mathcal{M}=C\Lambda-\Lambda^*C. \tag{38}$$

Доведення. Оскільки

$$\bar{\mathbf{q}} = \bar{\varphi}\bar{\Omega}^{-1} = \bar{\varphi}\sigma_1^{-1}\Omega^{-1}\sigma_1^{-1} = \bar{\varphi}\sigma_1^{-1}\Omega^{-1}\sigma_1 = \varphi\Omega^{-1}\sigma_1 = \mathbf{q}\sigma_1 \Rightarrow \mathbf{q} = (\vec{\mathbf{q}}, \bar{\vec{\mathbf{q}}}).$$

З умови теореми отримуємо структуру матриці C вигляду $C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ \bar{C}_2 & \bar{C}_1 \end{pmatrix}$, де $C_1^* = -C_1$ — косоермітова, а $C_2^\top = -C_2$ — комплексна кососиметрична $(k \times k)$ – матриці відповідно. Використовуючи вигляд матриці Λ (37) для матриці $\mathcal{M} = C\Lambda - \Lambda^* C$ отримуємо блочну форму (21), симетричний блок A і ермітовий B виражаються так

$$A = C_1\Lambda_2 - \Lambda_2^\top \bar{C}_1 + C_2\bar{\Lambda}_1 - \bar{\Lambda}_1^\top C_2, \quad B = C_1\Lambda_1 - \bar{\Lambda}_1^\top \bar{C}_1 + C_2\bar{\Lambda}_2 - \Lambda_2^\top \bar{C}_2.$$

Згідно зауваження перед формулою (21) диференціальна в'язь пропадає (що перевіряється простими обчисленнями), а рівняння (38) в термінах вектора $\vec{\mathbf{q}}$ має вигляд

$$\vec{\mathbf{q}}_{t_3} = \vec{\mathbf{q}}_{xxx} - \frac{3}{2}(\vec{\mathbf{q}}B\vec{\mathbf{q}}^* + \bar{\vec{\mathbf{q}}}\bar{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{q}}^\top + \tilde{\mathbf{q}}\mathbf{A}\tilde{\mathbf{q}}^\top + \bar{\tilde{\mathbf{q}}}\bar{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{q}}^*)\tilde{\mathbf{q}}_{\mathbf{x}}, \tag{39}$$

на чому процес доведення теореми і завершується. □

Приклад. При $k = 1$ та $\varphi = (\varphi_1, \bar{\varphi}_1)$, $\sigma_1 = \sigma_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, і матриці C, що задовольняє співвідношення $\sigma_1 C \sigma_1 = \bar{C}$ та $C^* = -C$ (це рівносильно, очевидно, до такого вигляду матриці C: $C = \mathrm{diag}(ic, -ic)$, $c \in \mathbb{R}$), отримуємо

1) $w_0 := 1 - \varphi\Omega^{-1}\varphi^* \equiv 1;\ u = 2i(\ln w_0)_x \equiv 0$ (згідно з Лемою 3)
2) $\varphi\Omega^{-1} = -A^{-1}(\varphi_1, -\bar{\varphi}_1)$, де $A := \frac{1}{2}|\varphi_1|^2 - \int_{-\infty}^x \bar{\varphi}_1\varphi_{1x}dx - ic = -\bar{A}$
   $\det\Omega = |A|^2 = -\frac{1}{4}|\varphi_1|^4 + \int_{-\infty}^x \varphi_1\bar{\varphi}_{1x}dx \int_{-\infty}^x \bar{\varphi}_1\varphi_{1x}dx + ic\int_{-\infty}^x(\varphi_1\bar{\varphi}_{1x} - \bar{\varphi}_1\varphi_{1x})dx + c.$

Якщо також φ_1 є розв'язком системи рівнянь

$$\begin{cases} \varphi_{1t_3} = \varphi_{1xxx}, \\ \varphi_{1xx} = \varphi_1\lambda_1^2, \end{cases}$$

тобто $\Lambda_1 = \lambda_1^2$, $\Lambda_2 = 0$, тоді $\mathbf{q} = (q_1, \bar{q}_1) = \varphi\Omega^{-1}$ буде розв'язком рівняння $\mathbf{q}_{t_3} = \mathbf{q}_{xxx} - \frac{3}{2}\mathbf{q}\mathcal{M}\mathbf{q}^*\mathbf{q}_x$, де $\mathcal{M} = \mathrm{diag}(-4c\lambda_{11}\lambda_{12}, -4c\lambda_{11}\lambda_{12})$, а його компонента q_1 задовольняє рівняння

$$q_{1t_3} = q_{1xxx} + 6c\lambda_{11}\lambda_{12}|q_1|^2 q_{1x}.$$

Для дійсної версії векторного рівняння mKdV (20) широкі класи точних розв'язків отримуються в наступній теоремі.

Теорема 4. *Нехай:*

1) $\varphi(x, t_3)$ — дійсний K–компонентний розв'язок системи рівнянь:

$$\begin{cases} \varphi_{t_3} = \varphi_{xxx}, \\ \varphi_{xx} = \varphi\Lambda; \end{cases}$$

2) $C^\top = -C$ — дійсна кососиметрична матриця;

3) Матрична функція $\Omega := C + \int_{-\infty}^x \varphi^\top\varphi_x dx$ — невироджена на лівій півосі.

Тоді функція $\mathbf{q}(x,t_3) := \varphi\Omega^{-1}$ задовольняє рівняння mKdV (20), де $\mathcal{M} = C\Lambda - \Lambda^\top C$.

Доведення. Справедливість теореми випливає із зауваження після Леми 2 та формул для "одягнених"операторів L і M, отриманих при доведенні Теореми 2

$$L = \mathcal{D}^2 - 2w_{0x}w_0^{-1}\mathcal{D} - [\varphi_{xx} - \varphi\Omega^{-1}\int_{-\infty}^{x}\varphi^*\varphi_{xxx}dx]\mathcal{D}^{-1}\Omega^{*-1}\varphi^*\mathcal{D} - \tag{40}$$

$$-\varphi\Omega^{-1}\mathcal{D}^{-1}[\varphi^*_{xx} - \int_{-\infty}^{x}\varphi^*_{xxx}\varphi dx\Omega^{*-1}\varphi^*]\mathcal{D} = \mathcal{D}^2 - \mathbf{q}\mathcal{M}\mathcal{D}^{-1}\mathbf{q}^\top\mathcal{D},$$

$$M := \partial_{t_3} - \mathcal{D}^3 + 3w_{0x}w_0^{-1}\mathcal{D}^2 -$$

$$-[w_0(w_0^{-1})_{xx} - 2w_0\varphi_{xx}\Omega^{*-1}\varphi^* - w_0\varphi_x(\Omega^{*-1}\varphi^*)_x +$$

$$+\varphi\Omega^{-1}\varphi^*_x(w_0^{-1})_x - \varphi\Omega^{-1}\varphi^*_{xx}w_0^{-1} - \varphi\Omega^{-1}\varphi^*_x\varphi_x\Omega^{*-1}\varphi^*]\mathcal{D} - \tag{41}$$

$$-[\varphi_{t_3} - \varphi_{xxx} - \varphi\Omega^{-1}\int_{-\infty}^{x}\varphi^*(\varphi_{t_3} - \varphi_{xxx})_x dx]\mathcal{D}^{-1}\Omega^{*-1}\varphi^*\mathcal{D} +$$

$$+\varphi\Omega^{-1}\mathcal{D}^{-1}[\varphi^*_{t_3} - \varphi^*_{xxx} - \int_{-\infty}^{x}(\varphi^*_{t_3} - \varphi^*_{xxx})_x\varphi dx\Omega^{*-1}\varphi^*]\mathcal{D} = \partial_{t_3} - \mathcal{D}^3 + \frac{3}{2}\mathbf{q}\mathcal{M}\mathbf{q}^\top\mathcal{D}.$$

□

При $l = 1$ (тобто $\mathbf{q} = q$ — скалярна функція) оператори L і M (40)–(41) утворюють рекурсійну пару Лакса для рівняння mKdV (див. формули (9)).

Приклад. Нехай $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ — двокомпонентна вектор–функція, яка є дійсним розв'язком системи рівнянь

$$\begin{cases} \varphi_{t_3} = \varphi_{xxx}, \\ \varphi_{xx} = \varphi\Lambda, \end{cases}$$

де Λ є дійсною матрицею вигляду $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{pmatrix}$, та матриця $C = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, де $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Тоді $\mathbf{q} = \varphi\Omega^{-1}$, $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$, де

$$q_1 = \frac{\varphi_1\int_{-\infty}^{x}\varphi_2\varphi_{2x}dx - \varphi_2\int_{-\infty}^{x}\varphi_2\varphi_{1x}dx + a\varphi_2}{\int_{-\infty}^{x}\varphi_1\varphi_{1x}dx\int_{-\infty}^{x}\varphi_2\varphi_{2x}dx - (\int_{-\infty}^{x}\varphi_1\varphi_{2x}dx + a)(\int_{-\infty}^{x}\varphi_2\varphi_{1x}dx - a)} = \tag{42}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\varphi_1\varphi_2^2 - \varphi_2\int_{-\infty}^{x}\varphi_2\varphi_{1x}dx + a\varphi_2}{\frac{1}{4}\varphi_1^2\varphi_2^2 - (\int_{-\infty}^{x}\varphi_1\varphi_{2x}dx + a)(\int_{-\infty}^{x}\varphi_2\varphi_{1x}dx - a)},$$

$$q_2 = \frac{\varphi_2\int_{-\infty}^{x}\varphi_1\varphi_{1x}dx - \varphi_1\int_{-\infty}^{x}\varphi_1\varphi_{2x}dx - a\varphi_1}{\int_{-\infty}^{x}\varphi_1\varphi_{1x}dx\int_{-\infty}^{x}\varphi_2\varphi_{2x}dx - (\int_{-\infty}^{x}\varphi_1\varphi_{2x}dx + a)(\int_{-\infty}^{x}\varphi_2\varphi_{1x}dx - a)} = \tag{43}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\varphi_2\varphi_1^2 - \varphi_1\int_{-\infty}^{x}\varphi_1\varphi_{2x}dx - a\varphi_1}{\frac{1}{4}\varphi_1^2\varphi_2^2 - (\int_{-\infty}^{x}\varphi_1\varphi_{2x}dx + a)(\int_{-\infty}^{x}\varphi_2\varphi_{1x}dx - a)},$$

буде розв'язком системи

$$\begin{cases} q_{1t_3} = q_{1xxx} - 3a(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)q_1q_2q_{1x}, \\ q_{2t_3} = q_{2xxx} - 3a(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)q_1q_2q_{2x} \ . \end{cases}$$

6. Редукція до рівняння Кортевега–де Вріза. Якщо в попередньому прикладі прийняти $\varphi_2 = \gamma \equiv const \in \mathbb{R}, \lambda_2 = 0$, тобто $\varphi = (\varphi_1, \gamma)$, тоді з формул (42)–(43) отримуємо

$$q_1 = \frac{\gamma}{a} \equiv const, \quad q_2 = \frac{\varphi_1(\gamma\varphi_1 - 2a)}{2a(a - \gamma\varphi_1)},$$

і функція q_2 є розв'язком рівняння KdV $q_{2t_3} = q_{2xxx} + 3\gamma\lambda_1^2 q_2 q_{2x}$. Далі ми використовуємо ідею цього прикладу в загальному випадку.

Розглянемо оператори Лакса для K–компонентного дійсного рівняння mKdV (20)

$$L = \mathcal{D}^2 - \mathbf{q}\mathcal{M}\mathcal{D}^{-1}\mathbf{q}^\top\mathcal{D}, \; M = \partial_{t_3} - \mathcal{D}^3 + \frac{3}{2}\mathbf{q}\mathcal{M}\mathbf{q}^\top\mathcal{D}, \tag{44}$$

$$[L, M] = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathbf{q}_{t_3} = \mathbf{q}_{xxx} - \frac{3}{2}\mathbf{q}\mathcal{M}\mathbf{q}^\top\mathbf{q}_x = K[\mathbf{q}]. \tag{45}$$

Оператор L (44) є K–узагальненням в дусі робіт [17–19] породжуючого оператора Λ_{mKdV} (9) для скалярного рівняння mKdV, а оператор M^τ є його лінеаризацією ($M^\tau = \partial_{t_3} - K'[\mathbf{q}]$). Приймемо $K = 2k$, $\mathbf{q} = (\vec{\alpha}, \vec{\mathbf{q}})$, $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^k$, $\vec{\mathbf{q}} = \vec{\mathbf{q}}(x, t_3)$,

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & -\Lambda^\top \\ -\Lambda & 0 \end{pmatrix}, \tag{46}$$

де Λ — стала дійсна $(k \times k)$ матриця. При цьому оператори (44) редукуються до вигляду

$$L = \mathcal{D}^2 - (\vec{\alpha}, \vec{\mathbf{q}})\mathcal{M}(\vec{\alpha}, \vec{\mathbf{q}})^\top + (\vec{\alpha}, \vec{\mathbf{q}})\mathcal{M}\mathcal{D}^{-1}(\vec{\alpha}, \vec{\mathbf{q}})_x^\top = \tag{47}$$

$$= \mathcal{D}^2 + 2\vec{\alpha}\Lambda^\top\vec{\mathbf{q}}^\top - \mathcal{D}^{-1}(\vec{\alpha}\Lambda^\top\vec{\mathbf{q}}^\top)_x = \mathcal{D}^2 + 2u - \mathcal{D}^{-1}u_x =: \Lambda_{KdV},$$

де

$$u = \vec{\alpha}\Lambda^\top\vec{\mathbf{q}}^\top, \tag{48}$$

$$M = \partial_{t_3} - \mathcal{D}^3 - 3u\mathcal{D}, \tag{49}$$

і задають рекурсійну пару Лакса для рівняння KdV (див. формули (7)–(8) при $a = 3$)

$$[\partial_{t_3} + K'^\tau[u], \Lambda_{KdV}] = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{\partial}{\partial t_3}\Lambda_{KdV} = [\Lambda_{KdV}, K'^\tau] \;\Leftrightarrow$$

$$u_{t_3} = K[u] = u_{xxx} + 3uu_x. \tag{50}$$

Описаний процес редукування дійсної версії векторного рівняння mKdV (45) до скалярного рівняння KdV (50) дозволяє сформулювати таке твердження.

Теорема 5. *Нехай*

1) $\varphi(x, t_3) = (\vec{\varphi}, \vec{\alpha})$, *де* $\vec{\varphi} = \vec{\varphi}(x, t_3)$ — k–*компонентне дійсне поле,* $\mathbb{R}^k \ni \vec{\alpha}$ — k–*компонентний дійсний вектор;*

2) $\vec{\varphi}$ *є розв'язком лінійної системи:*

$$\begin{cases} \vec{\varphi}_{t_3} = \vec{\varphi}_{xxx}, \\ \vec{\varphi}_{xx} = \vec{\varphi}\Lambda, \; \Lambda \in Mat_{k\times k}(\mathbb{R}); \end{cases}$$

3) $\Omega := C + \int_{-\infty}^{x} \varphi^\top \varphi_x dx$ *— невироджена на лівій півосі* $(2k) \times (2k)$*–матрична функція, де* $C = \begin{pmatrix} 0 & I_k \\ -I_k & 0 \end{pmatrix}$.

Тоді функція

$$u(x,t_3) := \vec{\alpha}\Lambda^\top(\vec{\varphi}^\top\vec{\alpha} - I_k)^{-1}(\vec{\varphi}^\top + \int_{-\infty}^{x} \vec{\varphi}_x^\top \vec{\varphi}\, dx\, \vec{\alpha}^\top)$$

є розв'язком рівняння KdV (50).

Доведення. Розглянемо

$$\Omega := C + \int_{-\infty}^{x} \varphi^\top \varphi_x\, dx = \begin{pmatrix} \int_{-\infty}^{x} \vec{\varphi}^\top \vec{\varphi}_x\, dx & I_k \\ \\ \vec{\alpha}^\top \vec{\varphi} - I_k & 0 \end{pmatrix}.$$

Скористаємося відомою формулою для матриці A^{-1} — оберненої до блочної матриці A розмірності $(2k) \times (2k)$

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1}(I + A_{12}T^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}) & -A_{11}^{-1}A_{12}T^{-1} \\ \\ -T^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & T^{-1} \end{pmatrix},$$

де $T = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$. У нашому випадку $A_{12} = I_k$, $A_{22} = 0 := 0_k$, $T = -A_{21}A_{11}^{-1} \Rightarrow T^{-1} = -A_{11}A_{21}^{-1}$, звідки отримується проста формула для матриці Ω^{-1}

$$\Omega^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & A_{21}^{-1} \\ \\ I_k & -A_{11}A_{21}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (\vec{\alpha}^\top\vec{\varphi} - I_k)^{-1} \\ \\ I_k & -\int_{-\infty}^{x} \vec{\varphi}^\top \vec{\varphi}_x\, dx\, (\vec{\alpha}^\top\vec{\varphi} - I_k)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Отже, $\mathbf{q} := \varphi\Omega^{-1} = (\vec{\alpha}, \vec{\mathbf{q}})$, де

$$\vec{\mathbf{q}} = (\vec{\varphi} + \vec{\alpha} \int_{-\infty}^{x} \vec{\varphi}^\top \vec{\varphi}_x\, dx)(\vec{\alpha}^\top\vec{\varphi} - I_k)^{-1}. \tag{51}$$

Матриця $\mathcal{M} = C\hat{\Lambda} - \hat{\Lambda}^\top C$ має вигляд $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & -\Lambda^\top \\ \\ -\Lambda & 0 \end{pmatrix}$, оскільки $\hat{\Lambda} = \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Для завершення доведення Теореми 5 достатньо звернутись до формул (46)–(51) і відповідних результатів Теореми 4 для рівняння mKdV (45). □

7. Матричні узагальнення $\mathcal{D}$HcmKP ієрархії. Ієрархія $\mathcal{D}$HcmKP допускає матричне узагальнення, при якому $u(x,t_m) \in Mat_{N\times N}(\mathbb{C})$ та $\mathbf{q}(x,t_m) \in Mat_{N\times K}(\mathbb{C})$. При $n = 1, m \in \mathbb{N}$ отримуємо ієрархію матричного нелінійного модифікованого рівняння Шредінгера ($m = 2$) і його вищих симетрій:

1. $n = 1, m = 2, \alpha_2 = i$, $L_1 = \mathcal{D} - \mathbf{q}\mathcal{M}\mathcal{D}^{-1}\mathbf{q}^*\mathcal{D}, \mathcal{M}^* = -\mathcal{M}$, $B_2 = (L_1^2)_{>0} = \mathcal{D}^2 - 2\mathbf{q}\mathcal{M}\mathbf{q}^*\mathcal{D}$:

$$i\mathbf{q}_{t_2} = \mathbf{q}_{xx} - 2\mathbf{q}\mathcal{M}\mathbf{q}^*\mathbf{q}_x.$$

2. $n=1, m=3, \alpha_3=1$, $B_3=(L_1^3)_{>0}=\mathcal{D}^3-3\mathbf{q}\mathcal{M}\mathbf{q}^*\mathcal{D}^2-3[\mathbf{q}_x\mathcal{M}\mathbf{q}^*-(\mathbf{q}\mathcal{M}\mathbf{q}^*)^2]\mathcal{D}$:

$$\mathbf{q}_{t_3}=\mathbf{q}_{xxx}-3(\mathbf{q}\mathcal{M}\mathbf{q}^*)\mathbf{q}_{xx}-3(\mathbf{q}_x\mathcal{M}\mathbf{q}^*-(\mathbf{q}\mathcal{M}\mathbf{q}^*)^2)\mathbf{q}_x. \tag{52}$$

Дане рівняння є матричним узагальненням комплексного рівняння KdV.

У випадку $n=2$ для $L_2=\mathcal{D}^2+iu\mathcal{D}-\mathbf{q}\mathcal{M}\mathcal{D}^{-1}\mathbf{q}^*\mathcal{D}$, $\mathcal{M}^*=-\mathcal{M}$ отримуємо, що $B_2=(L_2)_{>0}=\mathcal{D}^2+iu\mathcal{D}$, $B_3=\mathcal{D}^3+\frac{3}{2}iu\mathcal{D}^2-\left(\frac{3}{8}u^2-\frac{3i}{4}u_x+\frac{3}{2}\mathbf{q}\mathcal{M}\mathbf{q}^*\right)\mathcal{D}$. При $\alpha_2=i$ та $\alpha_3=1$ наслідком (13) будуть наступні системи рівнянь

$$\begin{cases} i\mathbf{q}_{t_2}=\mathbf{q}_{xx}+iu\mathbf{q}_x, \\ u_{t_2}=2(\mathbf{q}\mathcal{M}\mathbf{q}^*)_x+i[u,\mathbf{q}\mathcal{M}\mathbf{q}^*], \end{cases} \tag{53}$$

та

$$\begin{cases} \mathbf{q}_{t_3}=\mathbf{q}_{xxx}+\frac{3}{2}iu\mathbf{q}_{xx}-(\frac{3}{8}u^2+\frac{3}{2}\mathbf{q}\mathcal{M}\mathbf{q}^*-\frac{3}{4}iu_x)\mathbf{q}_x, \\ u_{t_3}=\frac{1}{4}u_{xxx}+\frac{3}{8}i[u,u_{xx}]+\frac{3}{8}uu_xu-\frac{3}{4}\mathbf{q}\mathcal{M}\mathbf{q}^*u_x-\frac{3}{4}u_x\mathbf{q}\mathcal{M}\mathbf{q}^*-\frac{3}{2}\mathbf{q}\mathcal{M}\mathbf{q}^*_xu- \\ \quad -\frac{3}{2}u\mathbf{q}_x\mathcal{M}\mathbf{q}^*+\frac{3}{8}i[\mathbf{q}\mathcal{M}\mathbf{q}^*,u^2]+\frac{3}{2}i(\mathbf{q}_{xx}\mathcal{M}\mathbf{q}^*-\mathbf{q}\mathcal{M}\mathbf{q}^*_{xx}). \end{cases} \tag{54}$$

8. Заключні зауваження. Зобразимо логічну послідовність деяких досліджень, проведених в цій роботі. Це дозволить нам акцентувати увагу на проблемних моментах.

1. Виходячи з зображення (13) при $n=2$, $m=3$, наклавши (формально) обмеження $u(x,t_3)=0$, ми отримали систему рівнянь (18)–(19) — l–компонентне ($\forall l\in\mathbb{N}$) комплексне рівняння mKdV (18) і диференціальну в'язь (19).

2. Задовольнивши в'язь $u(x,t_3)=0$ і диференціальну в'язь (19) за допомогою редукції $\varphi\sigma_1=\bar{\varphi}$ (див. Лему 3), ми проінтегрували $2k$–компонентне ($\forall k\in\mathbb{N}$) рівняння mKdV (18), (38) при $\mathbf{q}=(\vec{\mathbf{q}},\bar{\vec{\mathbf{q}}})$, яке рівносильне до k–компонентного рівняння (39) дещо іншого вигляду, ніж загальна система (18) (при $l=k$). Залишається відкритим питання інтегрування загальної векторної системи (18).

3. Узагальнюємо рекурсійну операторну пару для скалярного дійсного випадку mKdV (20) на l–компонентний випадок ($\forall l\in\mathbb{N}$) і інтегруємо відповідне векторне рівняння (20), однак при цьому втрачаються розв'язки самого скалярного рівняння (20), позаяк при $l=1$ з кососиметричності $C^\top=-C$ випливає, що $C=0$ і стала зв'язку $\mathcal{M}=\mu\in\mathbb{R}$ дорівнює нулю ($\mu=C\Lambda-\Lambda^\top C$).

4. Серед широкого класу точних багатопараметричних розв'язків, побудованих для рівняння KdV (Теорема 5) ми не можемо виділити багатосолітонних. Виникає питання: як, відштовхуючись від рекурсійного зображення (5), (7)–(8), отримати відомі класи багатосолітонних розв'язків рівняння KdV (6)?

5. Для систем рівнянь (22)–(27) можна сформулювати і довести результати, подібні до результатів пп.4–6.

6. Матричні узагальнення, наведені в п.7, можуть бути проінтегровані методом одягаючих перетворень за допомогою ($N\times N$)–матричних $\mathcal{D}$-унітарних операторів W (див. Теорему 1). На прикладі просторово-двовимірних рівнянь Гейзенберга це продемонстровано в [24]. Можливість проведення додаткових редукцій в системах (52)–(54) потребує подальших досліджень.

Література

1. Sidorenko Yu. *Transformation operators for integrable hierarchies with additional reductions* // Proceedings of Institute of Math. of NAS of Ukraine. – 2002.– V.43, Part 1. – P. 352–357.

2. Солитоны. (Редакторы Р.Буллаф, Ф.Кодри).–М.:Мир, 1983. – 408 с.

3. Сидоренко Ю.Н. *Гамильтоновы структуры некоторых двукомпонентных систем* // Вопросы квант. теории поля и статист. физики. Записки научн. семин. ЛОМИ им. В.А. Стеклова (engl. transl. – Journ. of Soviet Math. – 1989.– V.46, №1. – P. 1657– 1666.)

4. Митропольский Ю.А., Боголюбов Н.Н.(мл.), Прикарпатский А.К., Самойленко В.Г. Интегрируемые динамические системы: спектральные и дифференциально-геометрические аспекты. – Киев: Наук. думка, 1987. – 296 с.

5. Прикарпатский А.К., Микитюк И.В. Алгебраические аспекты интегрируемости нелинейных динамических систем на многообразиях. – Киев: Наук. думка, 1991. – 288 с.

6. Сидоренко Ю.Н. *Эллиптический пучок и порождающие операторы* // Вопросы квант. теории поля и статист. физики. Записки научн. семин. ЛОМИ им. В.А.Стеклова. – 1987.– V.161, №7. – С. 76–87.

7. Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Гамильтонов подход в теории солитонов. – М.: Наука, 1986. – 528 с.

8. Prytula M.M., Sydorenko Yu.M., Strampp W. *Nonlinear integrable systems related to the elliptic Lie–Baxter algebra* // Ukr. Math. Journ. – 1996. – V.48, №2. – P. 248–266.

9. Сидоренко Ю.М. *Нелокальні редукції і бігамільтоновість анізотропної моделі Ландау–Ліфшиця* // Нелінійні коливання. – 1998. – №2. – С. 132–138.

10. Prykarpatsky A., Samuliak R., Blackmore D., Strampp W., Sydorenko Yu. *Some remarks on Lagrangian and Hamiltonian formalism related to infinite-dimensional dynamical systems* // Cond. Math. Phys. – 1995. – №6. – P. 79–104.

11. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Морис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988. – 694 с.

12. Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983. – 280 с.

13. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989. – 639 с.

14. Ibragimov N.H., Shabat A.B. *Evolutionary equations with nontrivial Lie–Baecklund group* // Func. Anal. Appl. – 1980. – V.14. – P. 19–28.

15. Mikhailov A.V., Shabat A.B., Sokolov V.V. *The symmetry approach to classification of integrable equations* In: What is Integrability?, V.E. Zakharov, ed., New York: Springer Verlag, 1990, P. 115-184.

16. Olver P.J., Sokolov V.V. *Integrable evolution equations on associative algebras* // Commun. Math. Phys. – 1998. – V. 193. – P. 245–268.

17. Sidorenko Yu.M. *KP–hierachy and (1+1)-dimensional multicomponent integrable systems* // Ukr. math. journ. – 1993. – V. 45, №1. – P. 91–104.

18. Sidorenko Yu., Strampp W. *Multicomponents integrable reductions in the Kadomtsev-Petviashvili hierarchy* // J. Math. Phys. – 1993. – V. 34, №4. – P. 1429–1446.

19. Oevel W., Sidorenko Yu., Strampp W. *Hamiltonian structures of the Melnikov system and its Reductions* // Inverse Problems. – 1993. – V. 9. – P. 737–747.

20. Cheng Yi., Zhang Y.J. *Solutions for the vector k-constrained KP–hierarchy* // J. Math. Phys. – 1994. – V. 35, №11. – P. 5869–5884.

21. Сидоренко Ю.М. *Метод інтегрування рівнянь Лакса з нелокальними редукціями* // Доповіді НАН України. – 1999. – №8. – С. 19–23.

22. Сидоренко Ю.М. *Про редукції в неканонічній ієрархії інтегровних систем* // Праці Інституту математики НАН України. – 2001.– Т.36. – С. 262–268.

23. Berkela Yu.Yu., Sidorenko Yu.M. *The exact solutions of some multicomponent integrable models* // Mat. studii. – 2002. – V. 17, №1. – P. 47–58.

24. Сидоренко Ю.М., Беркела Ю.Ю. *Інтегрування нелінійних просторово-двовимірних рівнянь Гейзенберга* // Математичні студії. – Т. 18, №1. – 2002. – С. 57–68.

25. Berkela Yu.Yu. *Exact solutions of matrix generalization of some integrable systems* // Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. – 2002. – V. 43, Part 1. – P. 296–301.

26. Sidorenko Yu., Strammp W. *Symmetry constraints of the KP–hierarchy* // Inverse Problems. – 1991. – V. 7. – P. L37–L43.

27. Konopelchenko B., Sidorenko Yu., Strammp W. *(1+1)-dimensional integrable systems as symmetry constraints of (2+1)-dimensional systems* // Phys. Lett. A. – 1991. – V. 157. – P. 17–21.

28. Oevel W., Strammp W. *Constrained KP–hierarchy and bi-Hamiltonian structures* // Commun. Math. Phys. – 1993. – V.157. – P. 51–81.

29. Konopelchenko B., Strampp W. *New reductions of the Kadomtsev-Petviashvili and two-dimensional Toda lattice hierarchies via symmetry constraints* // J. Math. Phys. – 1992. – V. 33, №11. – P. 3676–3684.

30. Cheng Yi, Li Yi-shen. *Constraints of the (2+1)-dimensional integrable soliton systems* // J. Phys. A: Math. Gen. – 1992. – V. 25. – P. 419–431.

31. Korteweg D.J., de Vries G. *On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves* // Phyl. Mag. – 1895. – V. 39. – P. 422–443.

32. Miura R.M. *Korteweg–de Vries equation and generalizations. I. A remarkable explicit nonlinear transformation* // J. Math. Phys. – 1968. – V. 9, – P. 1202–1204.

33. Miura R.M., Gardner C.S., Kruskal M.D. *Korteweg–de Vries equation and generalizations. II. Existence of conservation laws and constants of motion* // J. Math. Phys. – 1968. – V. 9, – P. 1204–1209.

34. Lax P.D. *Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves* // Commun. on Pure and Appl. Math. – 1968. – V. XXI, – P. 467–490.

35. Su G.H., Gardner C.S. *Korteweg–de Vries equation and generalizations. III. Derivation of the Korteweg–de Vries equation and Burgers' equation* // J. Math. Phys. – 1969. – V. 10, – P. 536–539.

36. Lax P.D. *Nonlinear partial differential equations of evolution* // Actes du Congress International des Mathematiciens, Gauthier–Villars. – 1971. – V. 2. – P. 831–840.

37. Gardner C.S., Greene J.M., Kruskal M.D., Miura R.M. *Korteweg–de Vries equation and generalizations. VI. Methods for exact Solution* // Commun. on Pure and Appl. Math. – 1974. – V. XXVII, – P. 97–133.

38. Zakharov V.E., Faddeev L.D. *Korteweg–de Vries equation: A completely integrable Hamiltonian system* // Func. Anal. and Its Appl. – 1972. – V.2 – P. 280–287.

39. Yajima N., Oikawa M. *Formation and interaction of Sonic-Langmur solitons: inverse scattering method* // Progress Theoret. Phys. – 1976. – V. 56, №6. – P. 1719–1739.

Карпатський біосферний заповідник
Львівський національний університет імені Івана Франка,
механіко-математичний факультет

Надійшло 17.09.2003