УДК 512.534

I. M. Литвиненко

# ВІДНОШЕННЯ СПРЯЖЕНОСТІ В НАПІВГРУПІ, ЯКА Є ІНДУКТИВНОЮ ГРАНИЦЕЮ СПЕКТРУ НАПІВГРУП ЧАСТКОВИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ З ДІАГОНАЛЬНИМИ ЗАНУРЕННЯМИ КРАТНОСТІ $P$

I. M. Lytvynenko. *Relations of conjugation in the semigroup which is the inductive limit of a spectrum of the semigroups of partial transformations with diagonal embeddings of $p$-order*, Matematychni Studii, **23** (2005) 11–18.

We investigate relations of conjugation and transitive conjugation in the semigroup which is the inductive limit of a spectrum of the semigroups of partial transformations on the finite sets of cardinality $p^k$ ($p$ is a prime, $k \in \mathbb{N}$) with linking morphisms which are diagonal embeddings of $p$-order.

И. М. Литвиненко. *Отношения сопряженности в полугруппе, которая является индуктивной границей спектра полугрупп частичных преобразований с диагональными вложениями кратности $p$* // Математичні Студії. – 2005. – Т.23, №1. – С.11–18.

Исследуются отношения сопряженности, транзитивной сопряженности в полугруппе, которая является индуктивной границей спектра полугрупп частичных преобразований над конечными множествами мощности $p^k$ ($p$ — простое число, $k \in \mathbb{N}$) с соединительными морфизмами, являющимися дигональными вложениями кратности $p$.

Для будь-якого типу універсальних алгебр клас зліченних локально скінченних алгебр є природним розширенням класу скінченних алгебр цього типу, оскільки кожна зліченна локально скінченна універсальна алгебра є об'єднанням зростаючого ланцюга скінченних підалгебр. Саме тому при дослідженні локально скінченних алгебр широко використовуються поняття прямого спектру і індуктивної границі алгебр. В останні два десятиліття найбільш інтенсивні дослідження в цьому напрямку проводились в теорії груп. Однією з проблем, яка їх стимулювала, була проблема класифікації локально скінченних простих груп (див.[1], розділ 4). Найбільшим досягненням тут є теорема Мейерфранкенфельда, в якій встановлено, що проста локально скінченна група належить до одного з чотирьох типів [2]. Так званий альтернативний тип визначається за допомогою прямих спектрів знакозмінних груп із діагональними зануреннями одних груп в інші. Границі прямих спектрів знакозмінних груп з діагональними зануреннями введено до розгляду у статті А.Е. Залеського [3] в зв'язку з деякими проблемами теорії групових кілець. У статтях [4], [5] вивчались так звані строго діагональні границі симетричних і знакозмінних груп. Встановлено, що такі границі можуть бути параметризовані супернатуральними числами, тобто в певному розумінні допускають повну

2000 *Mathematics Subject Classification:* 18A30, 20M20, 20M30.

класифікацію, яка є частиною класифікації локально скінченних простих груп альтернативного типу.

Проблеми, розглянуті А.Е. Залеським [3] для групових кілець, можна ставити також для напівгрупових кілець. При цьому природно виникає задача дослідження напівгруп перетворень, які є індуктивними границями спектрів напівгруп з діагональними зануреннями. Ця задача є цікавою ще й тому, що теорія локально скінченних напівгруп поки що є не досить розвинутою, зокрема відомо мало змістовних прикладів таких напівгруп.

У статті [6] нами визначено граничні напівгрупи діагональних прямих спектрів напівгруп часткових перетворень над скінченними множинами з кратністю розгалуження $p$ ($p$ — просте число). При параметризації напівгруп, що є границями прямих спектрів з діагональними зануреннями, супернатуральними числами, таким граничним напівгрупам відповідають супернатуральні числа $p^\infty$. В даній роботі продовжується дослідження будови цих напівгруп. Дано характеризацію відношень спряженості, елементарної спряженості, транзитивної спряженості.

Для зручності читача ми наводимо ряд відомих визначень, які стосуються дій перетворень і напівгруп перетворень, більшість з яких взято з [7], [8]. Означення, що використовуються в цій статті взяті з [7], [8].

Нехай $\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел, $PT(\mathbb{N})$ напівгрупа всіх часткових перетворень множини $\mathbb{N}$, $PT_n$ — напівгрупа всіх часткових перетворень множини $\{1,2,3,\ldots,n\}$. Елемент $a$ напівгрупи $PT_n$ можна записати у вигляді

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k & \cdots & i_n \end{pmatrix},$$

де $i_k = \emptyset$, якщо $i_k$ не належить області значень часткового перетворення $a$. Позначимо через $dom\ a$ область визначення перетворення $a$, а через $ran\ a$ — його область значень.

Нехай $H$ є напівгрупа часткових перетворень множини $\{1,2,\ldots,n\}$, $k$ — деяке натуральне число.

**Означення 1.** Занурення $d^k$ напівгрупи $H$ в напівгрупу $PT_{kn}$ над множиною $\{1,2,\ldots, kn\}$, визначене рівністю

$$d^k \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} =$$

$$= \left( \begin{array}{cccc|cccc|c|ccc} 1 & 2 & \cdots & n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n & \cdots & (k-1)n+1 & \cdots & kn \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n & n+i_1 & n+i_2 & \cdots & n+i_n & \cdots & (k-1)n+i_1 & \cdots & kn+i_n \end{array} \right),$$

де $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$ — довільний елемент $H$, називається *діагональним* зануренням $H$ в $PT_{kn}$.

Зафіксуємо деяке просте число $p$ і розглянемо діагональне занурення $d^p$ кратності $p$ напівгрупи часткових перетворень $PT_{p^n}$ в напівгрупу $PT_{p^{n+1}}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & p^n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_{p^n} \end{pmatrix} \xrightarrow{d^p}$$

$$\xrightarrow{d^p} \left( \begin{array}{cccc|c|cccc} 1 & 2 & \cdots & p^n & \cdots & (p-1)p^n+1 & (p-1)p^n+2 & \cdots & (p-1)p^n+p^n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_{p^n} & \cdots & (p-1)p^n+i_1 & (p-1)p^n+i_2 & \cdots & (p-1)p^n+i_{p^n} \end{array} \right),$$

причому $rp^n + i_k = \varnothing$, якщо $i_k = \varnothing$, $(k \in \{1, 2, \ldots, p^n\}; r \in \{1, 2, 3, \ldots, p-1\})$.

Поняття прямого спектру напівгруп визначимо лише у потрібній для подальшого загальності. Нехай $(H_i, X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ — послідовність напівгруп часткових перетворень, причому для кожної пари індексів $i, j$, $i < j$, визначено мономорфізм $(\varphi_{ij}, \delta_{ij})$ напівгрупи перетворень $(H_i, X_i)$ в напівгрупу перетворень $(H_j, X_j)$ (з'єднувальний морфізм).

**Означення 2.** Сім'я $\{(H_i, X_i), \varphi_{ij}, \delta_{ij}\}_{i\in\mathbb{N}}$ напівгруп часткових перетворень і з'єднувальних морфізмів називається *прямим спектром*, якщо для довільних $i, j, k \in \mathbb{N}$, $i < j < k$ виконуються рівності $\varphi_{ij}\varphi_{jk} = \varphi_{ik}$, $\delta_{ij}\delta_{jk} = \delta_{ik}$.

З означення випливає, що в нашому випадку з'єднувальні морфізми досить визначити для пар індексів виду $(i, i+1)$, $i \in \mathbb{N}$. Покладемо $\varphi_{i,i+1} = \varphi_i$, $\delta_{i,i+1} = \delta_i$. Прямий спектр напівгруп часткових перетворень $\{(H_i, X_i), (\varphi_i, \delta_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ визначає граничну напівгрупу $H = \varinjlim\{(H_i, \varphi_i), i \in \mathbb{N}\}$ і граничну множину $X = \varinjlim\{(x_i, \delta_i) : i \in \mathbb{N}\}$ [8, с.48], причому $H$ є напівгрупою часткових перетворень на множині $X$.

Отримаємо прямий спектр напівгруп

$$PT_p \xrightarrow{d^p} PT_{p^2} \xrightarrow{d^p} PT_{p^3} \xrightarrow{d^p} \cdots . \tag{1}$$

Через $H_{p^\infty}$ позначимо напівгрупу, яка є індуктивною границею спектра (1)

$$H_{p^\infty} = \varinjlim(PT_{p^k},\ d^p).$$

Легко бачити, що $H_{p^\infty}$ є піднапівгрупою напівгрупи часткових перетворень множини натуральних чисел: для кожного $n \in \mathbb{N}$ задано діагональне занурення $d$ напівгрупи $PT_{p^n}$ в напівгрупу $PT(\mathbb{N})$ за правилом

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & p^n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_{p^n} \end{pmatrix} \xrightarrow{d} \left(\begin{array}{cccc|cccc|c} 1 & 2 & \cdots & p^n & p^n+1 & p^n+2 & \cdots & p^n+p^n & \cdots \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_{p^n} & p^n+i_1 & p^n+i_2 & \cdots & p^n+i_{p^n} & \cdots \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{c|cccc|c} \cdots & kp^n+1 & kp^n+2 & \cdots & kp^n+p & \cdots \\ \cdots & kp^n+i_1 & kp^n+i_2 & \cdots & kp^n+i_{p^n} & \cdots \end{array}\right),$$

причому $rp^n + i_k = \varnothing$, якщо $i_k = \varnothing$, $(k \in \{1, 2, \ldots, p^n\}; r \in \{1, 2, 3, \ldots\})$.

Очевидно, при $m \le n$ виконується $d(PT_{p^m}) \subseteq d(PT_{p^n})$. Крім того, для довільних $n \in \mathbb{N}$ і $a \in PT_{p^n}$ маємо $d(d^p(a)) = d(a)$. Позначимо образ напівгрупи $PT_{p^k}$ при діагональному зануренні $d$ через $H_{p^k}$. В напівгрупі $PT(\mathbb{N})$ отримуємо зростаючий ланцюг піднапівгруп

$$H_p \subseteq H_{p^2} \subseteq \cdots \subseteq H_{p^k} \subseteq \cdots ,$$

причому

$$H_{p^\infty} = \bigcup_{k=1}^{\infty} H_{p^k}.$$

Для довільного елемента $a$ напівгрупи $H_{p^\infty}$ існує натуральне число $k \in \mathbb{N}$ таке, що $a \in H_{p^k}$, але $a \notin H_{p^{k-1}}$. При ізоморфізмі $H_{p^k} \simeq PT_{p^k}$ перетворення $a$ відповідає певне перетворення $v(a) \in PT_{p^k}$.

**Означення 3.** Перетворення $v(a) \in PT_{p^k}$ називається *визначальною частиною* перетворення $a$.

За означенням маємо $d(v(a)) = d(d^{-1}(a)) = a$.

Множину $N(a)=\{1, 2, \ldots, p^k\}$ називатимемо областю дії визначальної частини.

Через $S_{p^\infty}$ позначимо групу тих перетворень напівгрупи $H_{p^\infty}$, визначальні частини яких є підстановками у відповідній напівгрупі $PT_{p^n}$.

**Означення 4.** Підмножина $X \subseteq \{1, 2, \ldots, p_k\}$ називається *інваріантною* відносно перетворення $a$, якщо $a(x) \in X$ для довільного елемента $x \in X$.

Нехай множина $\{1, 2, \ldots, l\}$ інваріантна відносно перетворення $a \in H_{p^\infty}$.

**Означення 5.** *Початком* перетворення $a$ довжини $l$ називатимемо перетворення $a_{(l)}$, що є обмеженням $a$ на перші $l$ натуральних чисел.

**Означення 6.** *Рангом* $r(a)$ перетворення $a \in H_{p^\infty}$ називається число $\frac{k}{p^m}$, де $p^m$ — довжина визначальної частини перетворення $a$, а $k$ — потужність області значень визначальної частини перетворення $a$.

**Означення 7.** Елементи $a$ і $b$ напівгрупи $H_{p^\infty}$ називаються *спряженими* у цій напівгрупі, якщо існує елемент $g \in S_{p^\infty}$ такий, що $b = g^{-1}ag$.

Спряженість елементів $a$ і $b$ позначатимемо $a \simeq b$.

**Означення 8.** Елементи $a$ і $b$ напівгрупи $H_{p^\infty}$ називаються *елементарно спряженими*, якщо існують $x, y \in H_{p^\infty}$ такі, що $a = xy$ та $b = yx$.

Елементарну спряженість елементів $a$ і $b$ позначатимемо $a \sim b$.

Очевидно, що спряжені елементи є елементарно спряженими. Обернене твердження невірне.

Відношення елементарної спряженості не є відношенням еквівалентності на напівгрупі $H_{p^\infty}$, тому що воно не транзитивне.

**Означення 9.** Елементи $a$ і $b$ напівгрупи $H_{p^\infty}$ називаються *транзитивно спряженими*, якщо існує послідовність $a = c_1, c_2, \ldots, c_{k-1}, c_k = b$ елементів напівгрупи $H_{p^\infty}$ така, що $c_i$ та $c_{i+1}$ елементарно спряжені для довільного $i,\ 1 \leq i \leq k$.

Транзитивну спряженість елементів $a$ і $b$ позначатимемо $a \approx b$.

Відношення транзитивної спряженості є транзитивним замиканням відношення елементарної спряженості і, отже, є відношенням еквівалентності.

Нагадаємо (див.[7]), що графом дії перетворення $a \in PT_X$ називається орієнтований граф з множиною вершин X та множиною дуг $\{(x, y) : a(x) = y\}$.

**Означення 10.** Про вершину графа $\Gamma_a$ перетворення $a \in H_{p^\infty}$ скажемо, що вона *звисає*, якщо в неї не входить жодна стрілка, але з неї виходить стрілка.

Через $D\left(v(a)\right)$ позначимо довжину визначальної частини $v(a)$ перетворення $a$.

**Лема 1.** *Якщо елементи $a, b \in H_{p^\infty}$ елементарно спряжені, то циклові типи їх початків довжини $l = \max\left\{D\left(v(a)\right),\ D\left(v(b)\right)\right\}$ однакові.*

*Доведення.* Нехай елементи $a, b \in H_{p^\infty}$ елементарно спряжені, тобто існують елементи $x, y \in H_{p^\infty}$, такі, що $a = xy$ та $b = yx$, і нехай $l = \max\{D(v(x)), D(v(y))\} = \max\{D(v(a)), D(v(b))\}$.

Якщо початок довжини $l$ елемента $xy$ містить цикл $c_1 = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$, то це означає, що існують елементи $y_1, y_2, \ldots, y_k$ такі, що $x_i \xrightarrow{u} y_i \xrightarrow{v} x_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$, $x_k \xrightarrow{u} y_k \xrightarrow{v} x_1$. Тоді маємо $y_i \xrightarrow{v} x_{i+1} \xrightarrow{u} y_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$, $y_k \xrightarrow{v} x_1 \xrightarrow{v} y_1$. Отже, початок довжини $l$ елемента $yx$ містить цикл $c_2 = (y_1, y_2, \ldots, y_k)$ такої ж довжини. Тому кожному циклу $c_1$ довжини $s$ в початку довжини $l$ елемента $xy$ відповідатиме цикл $c_2$ довжини $s$ в початку довжини $l$ елемента $yx$. Оскільки в цих міркуваннях елементи $xy$ і $yx$ можна поміняти місцями, то циклові типи початків довжини $l$ елементів $xy$ і $yx$ співпадають. $\square$

**Лема 2.** *Якщо початки довжини $l = \max\{D(v(a)), D(v(b))\}$ елементів $a, b \in H_{p^\infty}$ відрізняються однією вершиною, що звисає, то елементи $a$ і $b$ є елементарно спряженими.*

*Доведення.* Не порушуючи загальності, можна вважати, що вершина 1 графа дій звисає, тобто ці графи можна схематично зобразити як на рис.1: а) ,b), де підграфи $\Gamma_{a_{(l)}}$ , $\Gamma_{b_{(l)}}$ , які утворені при відповідній вершині 1, ізоморфні.


а) б)

рис.1

Треба підібрати $x, y \in H_{p^\infty}$ так, щоб $a_{(l)} = x_{(l)} y_{(l)}$, $b_{(l)} = y_{(l)} x_{(l)}$. Тоді отримаємо $a = xy$, $b = yx$. Приймемо

$$x_{(l)} = a_{(l)}, \ \ y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & l \\ \varnothing & 2 & \cdots & l \end{pmatrix}.$$

Тоді $a_{(l)} = a_{(l)} y$, $b_{(l)} = y a_{(l)}$. Лему доведено. $\square$

**Теорема 1.** *Елементи $a, b$ напівгрупи $H_{p^\infty}$ спряжені тоді і тільки тоді, коли граф дії визначальної частини одного з елементів є диз'юнктним об'єднанням графів ізоморфних графу дії визначальної частини іншого елемента.*

*Доведення.* *Достатність.* Нехай графи дій $\Gamma_b^l$ і $\Gamma_b^l$ початків довжини $l = \max\{v(a), v(b)\}$ елементів $a$ і $b$ ізоморфні. Позначимо символом $g_{(l)}$ фіксований ізоморфізм цих графів. Оскільки вершини графів занумеровано числами $1, 2, ..., l$, то біекція $g_{(l)}$ є підстановкою на цій множині. Нехай $a_{(l)}$ та $b_{(l)}$ — обмеження підстановок $a, b$ на множину $\{1, 2, \ldots, l\}$. З того, що $g_{(l)}$ — ізоморфізм графів перетворень $a_{(l)}$ і $b_{(l)}$, випливає правильність рівності $b_{(l)} = g_{(l)}^{-1} \cdot a_{(l)} \cdot g_{(l)}$. Скориставшись тим, що визначене вище відображення $d$ є зануренням отримаємо рівність

$$d\left(b_{(l)}\right) = d\left(g^{-1} a_{(l)} g\right) = d(g_{(l)})^{-1} d\left(a_{(l)}\right) d(g_{(l)}).$$

Нехай $d(g_{(l)}) = g$. Визначальні частини перетворень $a, b$ є деякими початковими блоками перетворень $a_{(l)}$, $b_{(l)}$ відповідно, тобто $d((a_{(l)}) = a$, $d((b_{(l)}) = b$ . Звідси отримуємо $b = g^{-1}ag$, тобто $a, b$ є спряженими за допомогою підстановки $g \in S_{p^\infty}$.
*Необхідність.* Нехай елементи $a, b \in H_{p^\infty}$ спряжені, тобто існує хоч один елемент $g \in S_{p^\infty}$ такий, що $b = g^{-1}ag$. Розглянемо обмеження перетворень $a,\ b,\ g$ на початок довжини $k = HCK\left\{D(v(a)),\ D(v(b)),\ D(v(g))\right\}$, де $HCK(k_1, k_2, k_3)$ — найменше спільне кратне чисел $k_1, k_2, k_3$.

Тоді виконуватиметься рівність

$$b_{(k)} = g_{(k)}^{-1}a_{(k)}g_{(k)}. \tag{2}$$

Це випливає з того, що елементи $a,\ b,\ g$ можна розглядати як діагональні занурення перетворень $a_{(k)},\ b_{(k)},\ g_{(k)}$ в $PT(\mathbb{N})$. А тому, якби рівність (2) не виконувалась, то вона б не виконувалась і для діагональних занурень відповідних перетворень в $PT(\mathbb{N})$. Оскільки елементи $g$ і $g^{-1}$ є підстановками на множині $\{1, 2, \ldots, k\}$, то графи дій $\Gamma_a^k$ і $\Gamma_b^k$ елементів $a_{(k)}$ і $b_{(k)}$ будуть ізоморфними. Оскільки граф дії елемента $a_{(k)}\ \left(b_{(k)}\right)$ складається із диз'юнктних об'єднань ізоморфних між собою графів довжини $v(a)\ (v(b))$, то графи елементів $a_{(l)}$ і $b_{(l)}$, де $l = \max\{D(v(a)), D(v(b))\}$ також будуть ізоморфними, позаяк $l|k$. □

**Наслідок.** *Якщо елементи $a, b$ напівгрупи $H_{p^\infty}$ спряжені, то їх ранги однакові.*

**Означення 11.** *Цикловим типом* початку довжини $l$ перетворення $a \in H_{p^\infty}$ назвемо послідовність чисел $c(a, l) = (m_1, m_2, m_3, \ldots, m_l)$, де $m_i$ — кількість циклів довжини $i$ із цього початку.

**Теорема 2.** *Елементи $a, b$ напівгрупи $H_{p^\infty}$ транзитивно спряжені тоді і лише тоді, коли співпадають циклові типи початків цих перетворень довжини $l = \max\{D(v(a)), D(v(b))\}$.*

*Доведення. Необхідність* очевидна.
*Достатність.* Нехай циклові типи початків перетворень $a, b \in H_{p^\infty}$ довжини $l = \max\{D(v(a)), D(v(b))\}$ однакові. За перетворенням $a$ будуємо послідовність елементів $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n \in H_{p^\infty}$ у наступний спосіб. Розглянемо початок $a_{(l)}$ перетворення $a$. Нехай $\Gamma_a^{(l)}$ —граф цього перетворення. Відтинаючи від графа $\Gamma_a^{(l)}$ по одній вершині, що звисає, будуємо послідовність графів $\Gamma_{a,0}^{(l)} = \Gamma_a^{(l)}$, $\Gamma_{a,1}^{(l)}, ...,\ \Gamma_{a,s}^{(l)}$ таку, що $\Gamma_{a,s}^{(l)}$ складається лише з циклів. Кожен граф $\Gamma_{a,i}^{(l)}$ задає деяке перетворення, за допомогою якого однозначно визначається перетворення із $H_{p^\infty}$. Позначимо ці перетворення через $\gamma_i (1 \leq i \leq s)$. Згідно з лемою 1 виконуються співвідношення $a = \gamma_0 \sim \gamma_1 \sim \gamma_2 \sim ... \sim \gamma_s$. Аналогічно за графом $\Gamma_b^{(l)}$ початку перетворення $b$ довжини $l$, відтинаючи вершини, що звисають, будуємо послідовність графів $\Gamma_{b,0}^{(l)} = \Gamma_b^{(l)}$, $\Gamma_{b,1}^{(l)}, ...,\ \Gamma_{b,t}^{(l)}$ таку, що $\Gamma_{b,t}^{(l)}$ складається лише з циклів. Ця послідовність також визначає послідовність перетворень $\beta = \delta_0, \delta_1, ..., \delta_t$ із $H_{p^\infty}$. Оскільки, за умовою теореми циклові типи початків перетворень однакові, то графи $\Gamma_{a,s}^{(l)}$ і $\Gamma_{b,t}^{(l)}$ ізоморфні, тобто визначають елементарно спряжені перетворення. А тому виконуються співвідношення $a \sim \gamma_1 \sim \gamma_2 \sim ... \sim \gamma_s \sim \delta_t, ..., \sim \delta_1 \sim b$, звідки й випливає, що $a$ і $b$ є транзитивно спряженими. □

**Наслідок.** *Кожне перетворення $a \in H_{p^\infty}$ транзитивно спряжене з деякою частковою підстановкою, граф дії якої містить лише цикли.*

Символом $\varnothing$ позначимо ніде не визначене перетворення з $H_{p^\infty}$, а символом $e$ — тотожне перетворення. Символом $[a]$ позначатимемо клас спряженості перетворення $a \in H_{p^\infty}$.

**Теорема 3.** *Кожен клас спряженості напівгрупи $H_{p^\infty}$, відмінний від $[\varnothing]$ і $[e]$, містить нескінченну кількість перетворень. Класи спряженості $[\varnothing]$ і $[e]$ є одноелементними множинами.*

*Доведення.* Розглянемо клас спряженості, який містить елемент $a \in H_{p^\infty}$.

$$[a] = \left\{b \in H_{p^\infty} : \exists\, g \in S_{p^\infty} : b = g^{-1}ag\right\}.$$

Можливі два випадки:

1) У графі дії визначальної частини $v(a)$ є неізоморфні компоненти зв'язності $A$ і $B$.

Покажемо, що у такому разі $[a]$ містить нескінченну підмножину.

Будуємо елемент $a_1 \in H_{p^\infty}$ так, щоб $D\left(v(a_1)\right) = pD\left(v(a)\right)$ і так, щоб в його графі дії спочатку стояли $p$ компонент зв'язності, які ізоморфні з $A$, потім $p$ компонент зв'язності, які ізоморфні з $B$ і $p$ графів ізоморфних з графом $C$. Елементи $a$ і $a_1$ будуть спряженими, тому що графи $\Gamma_a^{v(a_1)}$ і $\Gamma_{a_1}^{v(a_1)}$ ізоморфні, тобто $a_1 \in [a]$.

Наступним кроком будуємо елемент $a_2 \in H_{p^\infty}$, в якого $D\left(v(a_2)\right) = p^2 D\left(v(a)\right)$ так, щоб в графі дії перетворення $v(a_2)$ спочатку стояли $p^2$ компонент зв'язності ізоморфних з $A$, далі $p^2$ компонент зв'язності ізоморфних $B$, а потім $p^2$ графів ізоморфних з $C$. Елементи $a$ і $a_2$ будуть спряженими тому, що графи $\Gamma_a^{v(a_2)}$ і $\Gamma_{a_2}^{v(a_2)}$ ізоморфні. Звідси, $a_2 \in [a]$ і т.д.

Отже, отримуємо нескінченну послідовність елементів $a$, $a_1$, $a_2$, ... $a_k, \ldots$. $a_i \in H_{p^\infty}$, $\{a_i\} \subset [a]$, $(i \in \{1, 2, \ldots\})$. Оскільки множина $[a]$ містить нескінченну підмножину $\{a_i\}$, то вона сама є нескінченною.

2) Всі компоненти зв'язності графа дії визначальної частини $v(a)$ ізоморфні між собою. Тут потрібно розглянути два підвипадки: а) серед компонент зв'язності є неодноелементні; б) всі компоненти зв'язності одноелементні.

а) Нехай компонета зв'язності $A$ графа дії перетворення $v(a)$ містить $k$ вершин. Позначимо через $C$ граф $\Gamma_a^{v(a)} \backslash A$, де $\Gamma_a^{v(a)}$ — граф дії визначальної частини елемента $a$. Виберемо $r$ так, щоб виконувалась нерівність: $k \cdot p^r \geq D\left(v(a)\right)$. Розглянемо елемент $a_1 \in PT_{p^r \cdot D(v(a))}$, для якого кожна з множин $M_1 = \{1, \ldots, kp^r\}$ і $M_2 = \{kp^r + 1, \ldots, p^r D\left(v(a)\right)\}$ буде інваріантною, причому граф дії $a_{1(M_1)}$ є диз'юнктивним об'єднанням $p^r$ графів, ізоморфних з графом $A$, а граф дії $a_{1(M_2)}$ — диз'юнктивним об'єднанням $p^r$ графів, ізоморфних з графом $C$. Тоді, очевидно, що $a_1 \neq a$. З іншого боку, графи дій елементів $a$ і $a_1$ задовольняють умову теореми, тому $a_1 \simeq a$.

Отже, отримаємо елемент $a_1 \in H_{p^\infty}$, $a_1 \in [a]$. Подібно будуємо елемент $a_2 \in H_{p^\infty}$, $a_2 \in [a]$. Продовжуючи цей процес, в результаті маємо нескінченну послідовність елементів $a, a_1, a_2, \ldots$ , де $a_s \in [a]$. Тому клас спряженості $[a]$ — нескінченний.

б) Нехай всі компоненти зв'язності графа дії перетворення $v(a)$ одноелементні. Якщо компонента зв'язності є вершиною без петлі, то $a = \varnothing$. У протилежному випадку $a = e$. Оскільки для довільної підстановки $g \in S_{p^\infty}$ маємо $g^{-1}\varnothing g = \varnothing$, $g^{-1}eg = e$, то кожен з цих елементів утворює одноелементний клас спряженості. □

**Теорема 4.** *Елементи $a, b \in H_{p^\infty}$ транзитивно спряжені тоді і тільки тоді, коли циклові типи їх початків довжини $l = \max\left\{D\left(v(a)\right),\ D\left(v(b)\right)\right\}$ однакові.*

*Доведення.* Необхідність випливає із леми 1, а достатність — з леми 2. □

## ЛІТЕРАТУРА


1. Kegel O.H. and Wehrfritz B.A.F. Locally finite groups. – Amsterdam-London-New York: North-Holland, 1973.
2. Meierfrankenfeld U. *Non-finitary locally finite simple groups, finite and locally finite groups.* – Dordrecht: Kluwer, 1995. – P.189–212.
3. Залесский А.Е. Групповые кольца индуктивных пределов знакопеременных групп // Алгебра и анализ. – 1990. – Т.2, №6. – С.304–319.
4. Сущанський В.І., Крошко Н.В. *Однорідно симетричні групи* // Доп. НАН України. – 1993. – №12. – С.9–12.
5. Kroshko N.V. and Sushchansky V.I. *Direct limits of symmetric and alternating groups with strictly diagonal embeddings* // Arch. Math. – 1998. – V.71. – P.173–182.
6. Литвиненко I.M. *Ідеали та відношення Гріна індуктивних границь напівгруп часткових перетворень з діагональними зануреннями кратності* // Вісник КНУ. Математика. Механіка. – 2003. – №10. – С.152–156.
7. Калужнин Л.А. Введение в общую алгебру. – М.: Наука, 1973. – 448с.
8. Скорняков Л.А. (ред.) Общая алгебра, Т1. – М.: Наука, 1990. – 591с.



Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
механіко-математичний факультет,
кафедра алгебри та математичної логіки,
вул. Володимирська 64, м.Київ-33, 01601



*Надійшло 21.09.2003*