УДК 512.54

Є. В. Бондаренко

ГРАФИ ШРАЄРА ГРУП ІТЕРОВАНИХ МОНОДРОМІЙ СУБ-ГІПЕРБОЛІЧНИХ КВАДРАТИЧНИХ МНОГОЧЛЕНІВ

Ye. V. Bondarenko. *Shreier graphs of iterated monodromy groups of sub-hyperbolic quadratic polynomials*, Matematychni Studii, **22** (2004) 159–175.

We study Shreier graphs of iterated monodromy groups of sub-hyperbolic quadratic polynomials. The substitutional rules for constructing Shreier graphs on levels are given. An efficient method is proposed for calculating the orbital contracting coefficient of the groups as λ^{-1}, where λ is the Perron number of some nonnegative integral matrix. An efficient method is given for finding the growth of diameters of Shreier graphs on levels. Finally, we give the boundaries, where the growth degrees of orbital Shreier graphs are located.

The first examples of groups which act on a binary tree and which have the orbital Shreier graphs of growth degree $\frac{\log 2}{\log \lambda}$ where λ is irrational number, are indicated. The first example of a group with orbital contracting coefficient (and thus general contracting coefficient) that does not determine the growth of diameters and growth of orbital Shreier graphs is constructed.

Е. В. Бондаренко. *Графы Шрайера групп итерированных монодромий суб-гиперболических квадратических многочленов* // Математичні Студії. – 2004. – Т.22, №2. – С.159–175.

Изучаются графы Шрайера групп итерированных монодромий суб-гиперболических квадратических многочленов. Указываются подстановочные правила по которым можно строить графы Шрайера на уровнях. Предлагаются эффективные методы нахождения орбитального коэффициента стягивания группы как λ^{-1}, где λ — число Перрона некоторой целочисленной матрицы, и роста диаметров графов Шрайера на уровнях, а также указаны границы нахождения степеней роста орбитальных графов Шрайера.

Указываются первые примеры групп, которые действуют на бинарном дереве, у которых степень роста орбитальных графов Шрайера равен $\frac{\log 2}{\log \lambda}$, где λ — иррациональное число, и первый пример группы, у которой орбитальный коэффициент стягивания группы (а поэтому и обычный коэффициент стягивания) не определяет рост диаметров и рост орбитальных графов Шрайера.

1. Вступ. Самоподібні і стискуючі групи вивчалися з різних точок зору багатьма математиками (див.[7, 11, 14, 15, 16, 17, 19]). Ці класи груп відіграють важливу роль у таких розділах як проблема Бернсайда, групи проміжного росту, аменабельні групи та голоморфній динаміці.

Вивчення графів Шрайєра самоподібних груп розпочато в працях Р. І. Григорчука, А. Жука і Л. Бартольді, в яких обчислено спектри Марківських операторів графів Шрайєра деяких самоподібних груп. Виявилося, що ці графи мають дуже цікаві спектральні властивості. Так, у статті [7] будується перший приклад регулярного графа

2000 *Mathematics Subject Classification:* 20F65, 05C25, 05C12, 20E08.

з канторовим спектром, а в [11] — перший приклад групи з дискретною спектральною мірою.

В [7] також вивчається будова графів Шрайєра деяких груп. Було доведено, що у вивчених групах ці графи є підстановочними, тобто вони є індуктивними границями послідовностей скінченних графів $\Gamma_1, \Gamma_2 \ldots$, де кожен Γ_n будується з Γ_{n-1} шляхом заміни ребер деякими графами, користуючись простими правилами.

Графи Шрайєра стискуючих груп збігаються до цікавих фрактальних топологічних просторів. Це формалізовано В. В. Некрашевичем [16] в понятті граничного простору самоподібної групи. У випадку груп ітерованих монодромій пост-критично скінченних раціональних відображень сфери Рімана, граничний простір гомеоморфний множині Жуліа цього відображення (див. [14, 15]). Це дозволяє малювати графи Шрайєра в $\mathbb{C}$ так, щоб вони збігалися в гаусдорфовій метриці до множини Жуліа цього відображення. Тому вивчення графів Шрайєра груп ітерованих монодромій є в певному сенсі вивченням голоморфної динаміки відповідних відображень сфери Рімана.

У цій статті досліджуються графи Шрайєра груп $\mathfrak{K}(\nu, \omega)$, які містять всі групи ітерованих монодромій квадратичних многочленів $z^2 - c$, де c — точка Місюревича (див.[8]). Такі групи визначаються для довільних скінченних слів $\nu, \omega \in \{0,1\}^* \setminus \{\varnothing\}$, що мають різні останні літери, як групи автоморфізмів бінарного кореневого дерева. Ми вказуємо прості підстановочні правила за якими можна будувати їхні графи Шрайєра на рівнях дерева. З цих правил зокрема випливає, що симпліціальні графи Шрайєра цих груп є деревами (це узгоджується з тим, що множини Жуліа суб-гіперболічних квадратичних многочленів є дендритами).

Основна частина статті присвячена дослідженню зростання орбітальних графів Шрайєра і зростання діаметрів графів Шрайєра на рівнях цих груп. Кожній групі $\mathfrak{K}(\nu, \omega)$ ставиться у відповідність лінійна рекурентна система $\overrightarrow{f_n} = F\overrightarrow{f_{n-1}}$ з невід'ємною цілочисельною матрицею F. Матриця F легко будується за словами ν, ω. Основні результати є наступними.

Теорема 1. *Нехай Γ_n — граф Шрайєра групи $\mathfrak{K}(\nu, \omega)$ на n-ому рівні дерева, $\Gamma(x), x \in X^\omega$ — орбітальний граф Шрайєра групи $\mathfrak{K}(\nu, \omega)$.*

1. *Зростання діаметрів графів Шрайєра Γ_n еквівалентне до зростання максимальної компоненти вектора $\overrightarrow{f_n}$, тобто $\sim n^k \lambda_d^n$ для деякого $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, де λ_d — число Перона матриці F.*
2. *Орбітальний коефіцієнт стиску групи дорівнює λ_o^{-1}, де λ_o — мінімальне серед λ таких, що існує компонента вектора $\overrightarrow{f_n}$ із зростанням $n^k \lambda^n$, для деякого $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.*
3. *Степінь зростання довільного орбітального графа Шрайєра $\Gamma(x), x \in X^\omega$ лежить в межах між $\frac{\log 2}{\log \lambda_d}$ і $\frac{\log 2}{\log \lambda_o}$.*
4. *Покладемо $x = 00\ldots$, якщо $\nu_1 = 1$ і $x = 11\ldots$, якщо $\nu_1 = 0$. Тоді степінь зростання орбітального графа Шрайєра $\Gamma(x)$ дорівнює $\frac{\log 2}{\log \lambda_d}$.*
5. *Якщо перші літери слів ν і ω різні, то всі компоненти вектора $\overrightarrow{f_n}$ мають однакове зростання. Як наслідок, зростання діаметрів графів Шрайєра Γ_n еквівалентне до λ^n і степінь зростання довільного орбітального графа Шрайєра $\Gamma(x)$ дорівнює $\frac{\log 2}{\log \lambda}$, де λ — число Перона матриці F.*

Графи Шрайєра груп із статей [7, 11] мають однаковий степінь зростання, який дорівнює $\frac{\log n}{\log m}$ для цілих n, m. У роботі вказуються групи, в яких під знаком логарифмів фігурують ірраціональні числа. А саме, для кожного $m \geq 2$ у групи $\mathfrak{K}(1, 1 \ldots 10)$, де $m = |1 \ldots 10| + 1$, всі орбітальні графи Шрайєра мають степінь зростання $\frac{\log 2}{\log \lambda}$, де λ — максимальний додатний корінь многочлена $\lambda^m - \lambda - 2$.

У статті вказується також перший приклад групи, а саме $\mathfrak{K}(010, 011)$, у якої орбітальний коефіцієнт стиску (а тому й звичайний коефіцієнт стиску) групи не визначає зростання діаметрів і зростання орбітальних графів Шрайєра, тобто зростання діаметрів $\gtrsim (\frac{1}{\rho_o})^n$ і існує орбітальний граф Шрайєра зі степенем зростання $< -\frac{\log 2}{\log \rho_o}$.

Автор висловлює щиру подяку В. В. Некрашевичу за його цінні коментарі, зауваження та увагу до роботи і Р. В. Кравченку за плідні обговорення результатів статті.

2. Групи автоморфізмів кореневих дерев. Нехай X — скінченна множина, яку називатимемо алфавітом. Символом X^* позначимо множину всіх скінченних слів $x_1 x_2 \ldots x_n$ над алфавітом X, включаючи порожнє слово $\varnothing$. Довжину слова $v = x_1 x_2 \ldots x_n$ позначимо через $|v| = n$.

Множина X^* природно представляється як кореневе дерево. А саме, корінь дерева це порожнє слово $\varnothing$ і кожне слово $v \in X^*$ з'єднано ребром з vx, для кожного $x \in X$. Множина X^n слів довжини n називається n-тим рівнем дерева. При $|X| = 2$ дерево X^* називається *бінарним*.

Множину всіх нескінченних праворуч послідовностей (нескінченних слів) вигляду $x_1 x_2 \ldots, x_i \in X$, позначимо X^ω. Вона природно ототожнюється з границею дерева X^*, тобто з множиною всіх нескінченних шляхів, які починаються в корені. *Проекцією слова* $x_1 x_2 \ldots$ на рівень n називається слово $x_1 \ldots x_n$.

Дві нескінченні послідовності $x_1 x_2 \ldots, y_1 y_2 \ldots \in X^\omega$ називаються *конфінальними*, якщо вони відрізняються лише в скінченному числі літер. Відношення конфінальності є відношенням еквівалентності. Класи еквівалентності цього відношення називаються *конфінальними класами*.

Множину всіх нескінченних ліворуч послідовностей (нескінченних слів) вигляду $\ldots x_2 x_1, x_i \in X$ позначимо $X^{-\omega}$. *Проекцією слова* $\ldots x_2 x_1$ на рівень n називається слово $x_n \ldots x_1$.

Лівостороннім зсувом на $X^\omega \cup X^*$ називається відображення $\sigma : X^\omega \cup X^* \to X^\omega \cup X^*$, яке стирає першу літеру в кожному слові $\sigma(x_1 x_2 \ldots) = x_2 x_3 \ldots$.

Правостороннім зсувом на $X^{-\omega} \cup X^*$ називається відображення $\tau : X^{-\omega} \cup X^* \to X^{-\omega} \cup X^*$, яке стирає останню літеру в кожному слові $\tau(\ldots x_2 x_1) = \ldots x_3 x_2$.

Для кожного слова $v \in X^*$ розглянемо піддерево vX^*. Нехай $g \in \operatorname{Aut} X^*$. Розглянемо відображення $g|_v : X^* \to X^*$ таке, що $g|_v(x) = y \Leftrightarrow g(vx) = uy$ для деякого $u \in X^*, |u| = |v|$. Тобто $g|_v$ — це відображення, яке індукується g на піддереві vX^*. Воно є автоморфізмом. Автоморфізм $g|_v$ називається *обмеженням g на слові v* або *станом g у слові v*.

Кожен автоморфізм $g \in \operatorname{Aut} X^*$ індукує підстановку $\pi \in S(X)$ на першому рівні дерева X та обмеження $g|_x, x \in X$, причому різним автоморфізмам відповідають різні такі набори. Тому можна автоморфізми записувати у вигляді

$$g = (g|_1, \ldots, g|_{|X|})\pi, \tag{1}$$

що, фактично, повторює канонічне зображення елементів вінцевого добутку $\operatorname{Aut} X^* \simeq S(X) \wr \operatorname{Aut} X^*$.

Означення 1. Точна дія групи G на просторі X^* ($G < \operatorname{Aut} X^*$) називається *самоподібною (self-similar)*, якщо для кожних $g \in G$ та $x \in X$ існують $h \in G$ і $y \in X$ такі, що для всіх $w \in X^*$ виконується співвідношення

$$g(xw) = yh(w). \tag{2}$$

Дія самоподібна тоді і лише тоді, коли для кожного елемента $g \in G$ і слова $v \in X^*$, обмеження $g|_v$ також належить до G.

Важливим підкласом класу самоподібних груп є клас стискуючих груп.

Означення 2. Самоподібна дія групи G називається *стискуючою (contracting)*, якщо існує скінченна множина $\mathcal{N} \subset G$ така, що для кожного $g \in G$ існує $k \in \mathbb{N}$ таке, що $g|_v \in \mathcal{N}$ для всіх слів $v \in X^*$ довжини $\geq k$.

Більше про стискуючі групи дивіться [14, 17].

3. Графи Шрайєра. Нехай G — група, породжена скінченною множиною S. Припускатимемо, що $1 \notin S$ і $S = S^{-1}$, а також, що G діє точно на множині M.

Визначимо *(позначений) граф Шрайєра* $\Gamma(G, S, M)$ групи G, яка діє на множині M. Це позначений граф з множиною вершин M і множиною ребер $M \times S$. Позначка кожного ребра (x, s) це s. Початок ребра (x, s) це вершина x, а кінець x^s. *Непозначеним графом Шрайєра* називається граф визначений так само, але без позначок. *Симпліціальним графом Шрайєра* називається граф Шрайєра без петель.

Очевидно, що орбіти групи G — це в точності множини вершин зв'язних компонент графа Шрайєра $\Gamma(G, S, M)$.

Якщо $x \in M$, тоді графом $\Gamma(G, S, x)$ будемо позначати граф Шрайєра дії групи G на G-орбіті точки x. Такі графи Шрайєра називаються *орбітальними графами Шрайєра.*

Нехай тепер G — група автоморфізмів кореневого дерева X^*. Тоді рівні X^n будуть інваріантними при дії G. Позначимо через $\Gamma_n(G, S)$ графи Шрайєра дії групи G на n-ому рівні. Тоді граф Шрайєра $\Gamma(G, S, X^*)$ — це диз'юнктивне об'єднання графів $\Gamma_n(G, S)$.

Довжина мінімального шляху (геодезичної) із вершини v_1 у вершину v_2 називається *відстанню* між v_1 і v_2 і позначається $d(v_1, v_2)$. Приймемо $d(v, v) = 0$. Визначена відстань називається *натуральною (або комбінаторною) метрикою* на графі. Для всіх орбітальних графів Шрайєра і графів Шрайєра на рівнях дерева позначатимемо цю відстань однаково як $d(\cdot, \cdot)$, оскільки, коли задані вершини, то зрозуміло на якому з графів Шрайєра її потрібно розглядати.

Нехай тепер всі графи будуть позначеними, з позначками з множини кольорів C.

Нехай є набір $(U, R_1, \ldots, R_n)$, де U — скінченний d-регулярний позначений граф, який будемо називати *аксіомою*, і кожне R_i це правило вигляду $X_i \to Y_i$, де X_i і Y_i скінченні позначені графи. Вимагатимемо, щоб графи X_i не мали спільних позначок. Поклавши $\Gamma_0 = U$, будемо рекурентно будувати Γ_{n+1} з Γ_n шукаючи усі входження графів X_i в Γ_n (вони не перетинаються) і замінюючи їх відповідними Y_i. Набір $(U, R_1, \ldots, R_n)$ називається *підстановочним правилом*, якщо графи Γ_n є d-регулярними скінченними графами для довільного n.

4. Групи $\mathfrak{K}(\nu, \omega)$. Покладемо $X = \{0, 1\}$ і визначимо групи $\mathfrak{K}(\nu, \omega)$.

Означення 3. Для довільних слів $\nu = \nu_1 \ldots \nu_s$, $\omega = \omega_1 \ldots \omega_t \in X^* \setminus \{\varnothing\}$ і $\nu_s \neq \omega_t$ визначимо групу $\mathfrak{K}(\nu, \omega)$ автоморфізмів бінарного кореневого дерева : $\mathfrak{K}(\nu, \omega) =$

$\langle b_1, \dots, b_s, a_1, \dots, a_t \rangle$, де $b_1 = (1,1)\sigma$, σ — транспозиція, а для $i \in \{1, \dots, s-1\}$

$$b_{i+1} = \begin{cases} (b_i, 1), & \text{якщо } \nu_i = 0, \\ (1, b_i), & \text{якщо } \nu_i = 1, \end{cases}$$

$$a_1 = \begin{cases} (b_s, a_t), & \text{якщо } \nu_s = 0 \text{ і } \omega_t = 1, \\ (a_t, b_s), & \text{якщо } \nu_s = 1 \text{ і } \omega_t = 0, \end{cases}$$

і для $i \in \{1, \dots, t-1\}$

$$a_{i+1} = \begin{cases} (a_i, 1), & \text{якщо } \omega_i = 0, \\ (1, a_i), & \text{якщо } \omega_i = 1. \end{cases}$$

Нехай $A = \dots \omega_t \dots \omega_1 \omega_t \dots \omega_1 \nu_s \dots \nu_2 \nu_1 \in X^{-\omega}$, тобто слово $\nu\omega\omega\dots$ записане ліворуч, а A_n — обмеження слова A на n-ий рівень (тобто кінець довжини n слова A).

Нехай $S = \{b_1, \dots, b_s, a_1, \dots, a_t\}$. Помітимо, що для кожного рівня n існує точно один твірний елемент $s \in S$ групи $\mathfrak{K}(\nu, \omega)$ для якого існує слово $v \in X^n$ таке, що $s(v0) = v1$. Для кожного рівня n слово $v = A_n$. Відповідний твірний елемент позначатимемо s_n. Отже, $s_n(A_n 0) = A_n 1$.

У препринті [8] доводяться такі властивості цих груп.

Теорема 2. *Групи $\mathfrak{K}(\nu, \omega)$ є самоподібними стискуючими групами. Вони діють транзитивно на рівнях дерева. Множина твірних S є симметричною, тобто $s = s^{-1}$ для будь-якого $s \in S$. Орбіти дії $(\mathfrak{K}(\nu, \omega), X^\omega)$ збігаються з конфінальними класами.*

Ці групи природно з'являються при дослідженні дії груп ітерованих монодромій квадратичних многочленів на кореневому дереві (див. [8, 14, 15]). Більше того, всі групи ітерованих монодромій квадратичних многочленів $z^2 - c$, де c — точка Місюревича, мають такий вигляд (див. [8]).

5. Будова графів Шрайєра груп $\mathfrak{K}(\nu, \omega)$. Графи Шрайєра $\Gamma_n(\mathfrak{K}(\nu, \omega), S)$ і орбітальні графи Шрайєра $\Gamma(\mathfrak{K}(\nu, \omega), S, x)$ вважаємо неорієнтованими, оскільки $s^2 = 1$ для всіх $s \in S$.

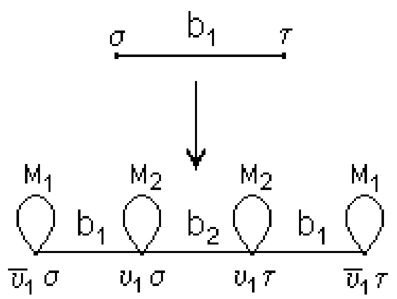
Для літери $x \in X$ позначимо

$$\overline{x} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x = 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 1. \end{cases}$$

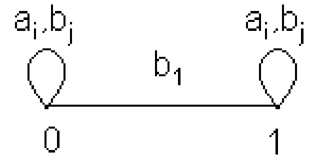
Теорема 3. *Розділимо множину позначок у наступний спосіб: $S = M_1 \cup M_2 \cup \{b_1, a_1\}$, де*

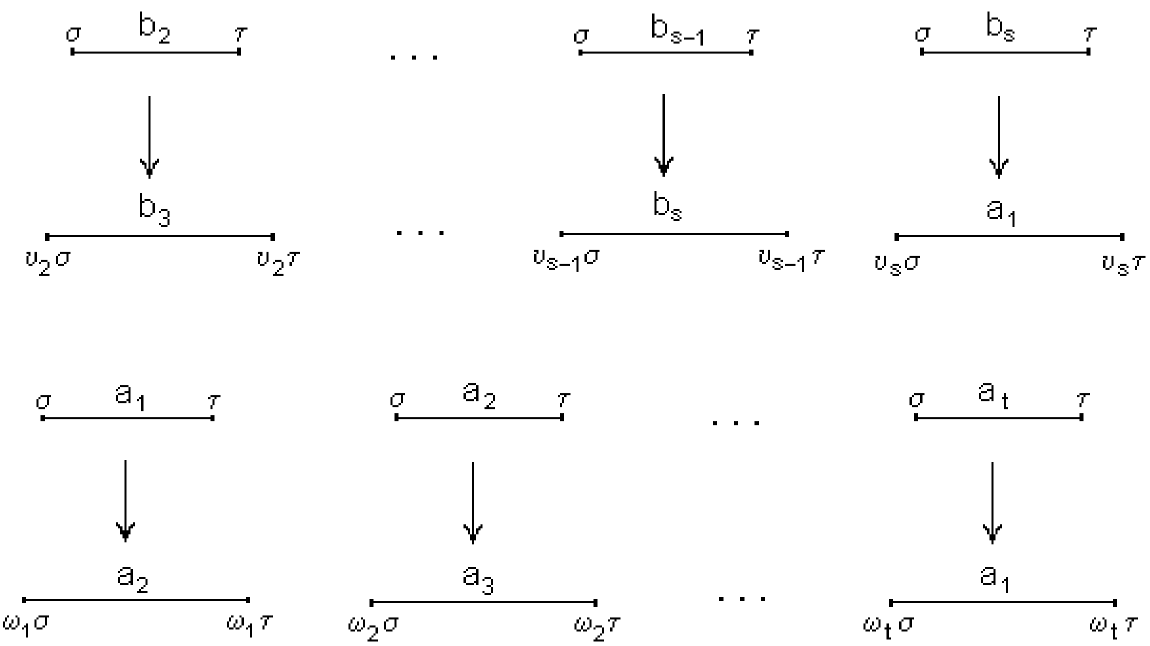
$$M_1 = \{b_{i+1}, a_{j+1} : \nu_i = \nu_1, \omega_j = \nu_1, i \neq s, j \neq t\} \;\; i \;\; M_2 = S \setminus \{M_1 \cup \{b_1, a_1\}\}.$$

Графи побудовані за наступними підстановочними правилами є графами Шрайєра $\Gamma_n(\mathfrak{K}(\nu, \omega), S)$.



аксіома





Доведення. Графи Шрайєра $\Gamma_n(\mathfrak{K}(\nu,\omega),S)$ позначатимемо просто як Γ_n.

Помітимо, що *аксіома* це Γ_1. Побудуємо граф ζ з Γ_n за підстановочними правилами і доведемо, що граф ζ це і є в точності Γ_{n+1}. Вершини графа ζ природно ототожнюються з X^{n+1}. З означення твірних групи $\mathfrak{K}(\nu,\omega)$ маємо

$$\begin{aligned} &b_{i+1}|_{\nu_i} = b_i \quad \text{при } i \neq s, \\ &a_{i+1}|_{\omega_i} = a_i \quad \text{при } i \neq t, \quad a_1|_{\omega_t} = a_t,\ a_1|_{\nu_s} = b_s \end{aligned} \tag{3}$$

і обмеження на інші літери одиничні.

Помітимо, що в Γ_{n+1} існує b_1-ребро між 0σ і 1σ для всіх $\sigma \in X^n$.

Розглянемо тепер b_i-ребро при $i = 2\dots s-1$ в Γ_n, нехай між σ і τ. Як видно з (3), в Γ_{n+1} воно дає b_{i+1}-ребро між $\nu_i\sigma$ і $\nu_i\tau$. Аналогічно для b_s і a_i.

Розглянемо b_1-ребро в Γ_n між σ і τ. В Γ_{n+1} воно дасть наступний підграф : b_1-ребро між 0σ і 1σ; b_2-ребро між $\nu_1\sigma$ і $\nu_1\tau$; b_1-ребро між 0τ і 1τ; петлі в $\overline{\nu}_1\sigma$ і $\overline{\nu}_1\tau$ з M_1-ребрами і петлі в $\nu_1\sigma$ і $\nu_1\tau$ з M_2-ребрами. Як бачимо, це і є в точності підстановочні правила для твірних групи. Отже, ми довели, що якщо є s-ребро в ζ між σ і τ, то є і s-ребро в Γ_{n+1} між σ і τ.

Доведемо, що з кожної вершини ζ виходить точно одне s-ребро для всіх $s \in S$. В Γ_n з σ виходить b_1-ребро, тому в ζ існуватиме b_1-ребро з $\overline{\nu}_1\sigma$ і $\nu_1\sigma$ і крім того з $\overline{\nu}_1\sigma$ будуть виходити M_1-ребра, а з $\nu_1\sigma$ — M_2-ребра. В Γ_n з σ виходять всі a_i, b_j-ребра. Як легко бачити з підстановочних правил, це дає усі s-ребра з $\overline{\nu}_1\sigma$ і $\nu_1\sigma$. Крім того, з однієї вершини не може виходити два s-ребра. Справді, це може статися лише у випадку, коли два ребра з різними позначками в Γ_n мають в образі при підстановочних правилах ребра з однією позначкою. Але з правил видно, що тоді ці ребра сполучають різні вершини.

Отже, ζ і є саме Γ_{n+1}. $\square$

Наслідок 3.1. *Симпліціальні графи Шрайєра на рівнях дерева можна будувати за тими самими правилами, якщо прибрати петлі у* аксіомі *і в образі ребра b_1.*

Доведення. З підстановочних правил видно, що не-петля в графі Γ_n не може перейти в петлю в графі Γ_{n+1} і, що петля в графі Γ_n переходить у петлю в графі Γ_{n+1}. $\square$

На основі властивостей твірних групи $\mathfrak{K}(\nu,\omega)$ можна дати і інші правила побудови графів Γ_n.

Твердження 4. *Щоб побудувати граф Γ_{n+1} потрібно взяти дві копії графа Γ_n, ототожнити вершини першої копії з X^n0, а вершини другої з X^n1, викреслити петлі у вершинах A_n0 і A_n1 з позначкою s_n і з'єднати вершини A_n0 і A_n1 ребром з позначкою s_n.*

Доведення. Достатньо довести, що в графі Γ_{n+1} між X^n0 і X^n1 існує точно одне ребро, оскільки підграфи Γ_{n+1} натягнуті на X^n0 і X^n1 є ізоморфними з Γ_n (за винятком петель у вершинах A_n0 та A_n1, що будуть відсутніми в X^n0 та X^n1).

У графі Γ_2 між $X0$ і $X1$ існує точно одне ребро (це b_2-ребро між $\nu_1 0$ і $\nu_1 1$). Якщо, міркуючи за індукцією, припустити, що в графі Γ_n між $X^{n-1}0$ і $X^{n-1}1$ існує точно одне ребро, то з підстановочних правил випливає, що і в графі Γ_{n+1} між X^n0 і X^n1 існує точно одне ребро. Це в точності ребро з позначкою s_n між A_n0 і A_n1. Отже, за індукцією все випливає. $\square$

Наслідок 4.1. *Симпліціальні графи Шрайєра $\Gamma_n(\mathfrak{K}(\nu,\omega),S)$ і симпліціальні орбітальні графи Шрайєра $\Gamma(\mathfrak{K}(\nu,\omega),S,x)$ є деревами.*

Твердження 5. *Нехай $u,v\in X^{n+1}$, тоді*

$$d(u,v)=\begin{cases} d(\tau(u),\tau(v)), & \text{якщо останні літери } u \text{ і } v \text{ однакові,}\\ d(A_n,\tau(u))+d(A_n,\tau(v))+1, & \text{якщо останні літери } u \text{ і } v \text{ різні.}\end{cases}$$

Доведення. За твердженням 4 граф Γ_{n+1} складається з двох графів Шрайєра Γ_n з'єднаних ребром s_n між вершинами A_n0 і A_n1. Якщо слова u і v закінчуються на однакову літеру, то вони належать до одного з цих графів Шрайєра Γ_n. Тому відстань між ними в графі Шрайєра Γ_{n+1} дорівнюватиме відстані між вершинами $\tau(u)$ і $\tau(v)$ в графі Шрайєра Γ_n.

Якщо слова u і v закінчуються на різні літери, то вони належать до різних графів Шрайєра Γ_n. Тому шлях, який сполучає ці вершини, повинен проходити через вершини A_n0 і A_n1 і через ребро s_n, яке з'єднує графи Шрайєра Γ_n. Отже,

$$d(u,v)=d(A_n,\tau(u))+d(A_n,\tau(v))+1$$

(одиниця рахує ребро s_n). $\square$

Наслідок 5.1. *Нехай $u,v\in X^n$, тоді $d(u,v)\geq d(\tau(u),\tau(v))$.*

Доведення. Якщо слова u і v закінчуються на однакову літеру, то $d(u,v)=d(\tau(u),\tau(v))$, якщо ж на різні, то $d(u,v)=d(\tau(u),A^1_{n-1})+d(A^1_{n-1},\tau(v))+1\geq d(\tau(u),\tau(v))$. $\square$

Твердження 6. *Нехай $\omega\in X^*$ — періодичне слово і $\omega=\sigma\ldots\sigma,\sigma\in X^*$. Тоді для будь-якого допустимого $\nu\in X^*$ симпліціальні графи Шрайєра $\Gamma_n(\mathfrak{K}(\nu,\omega),S)$ і $\Gamma_n(\mathfrak{K}(\nu,\sigma),S)$ ізоморфні як непозначені графи.*

Доведення. Достатньо довести вкладеність $\Gamma_n(\mathfrak{K}(\nu,\omega),S) \hookrightarrow \Gamma_n(\mathfrak{K}(\nu,\sigma),S)$, оскільки обидва графа є $|S|$-регулярними і мають однакову кількість вершин. Оскільки $\omega = \sigma\ldots\sigma$, то в підстановочних правилах графа $\Gamma_n(\mathfrak{K}(\nu,\omega),S)$ образи ребер a_i, a_j при $j \equiv i \pmod{|\sigma|}$ з точністю до позначки будуть однакові. Тому ми можемо прибрати ребра a_i при $i > |\sigma|$ з підстановочних правил графа $\Gamma_n(\mathfrak{K}(\nu,\omega),S)$, замінивши $a_{|\sigma|+1}$ на a_1. А це і є в точності підстановочні правила графа Шрайєра $\Gamma_n(\mathfrak{K}(\nu,\sigma),S)$. □

Наслідок 6.1. *Нехай $\omega \in X^*$ — періодичне слово і $\omega = \sigma\ldots\sigma, \sigma \in X^*$. Тоді для будь-якого допустимого $\nu \in X^*$ симпліціальні орбітальні графи Шрайєра $\Gamma(\mathfrak{K}(\nu,\omega),S,x)$ і $\Gamma(\mathfrak{K}(\nu,\sigma),S,x)$ ізоморфні як непозначені графи.*

6. Зростання графів Шрайєра стискуючих груп. Введемо відношення передпорядку на функціях $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}^+$ (де $\mathbb{R}^+$ — множина дійсних додатних чисел). Нехай $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}^+$ і $g:\mathbb{N}\to\mathbb{R}^+$, тоді

$$f \preceq g \quad \Leftrightarrow \quad (\exists\, c>0)(\forall\, n\geq 1): \quad f(n)\leq cg(n).$$

Якщо $f\preceq g$ і $g\preceq f$, тоді будемо говорити, що $f\sim g$. Тобто,

$$f\sim g \quad \Leftrightarrow \quad (\exists\, c,d>0)\ (\forall\, n\geq 1): \quad cg(n)\leq f(n)\leq dg(n).$$

Відношення $\sim$ є відношенням еквівалентності. Класи еквівалентності за цим відношенням називаються *класами зростання.*

Нехай Γ локально скінченний граф. Його функцією зростання відносно вершини v_0 називається функція $\gamma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, де $\gamma(r)$ дорівнює кількості вершин в кулі $B(v_0,r)$.

Граф Γ має *поліномне зростання*, якщо існує поліном $F(x)$ такий що $\gamma(r)<F(r)$ для всіх $r\in\mathbb{N}$. Якщо граф має поліномне зростання відносно деякої точки, тоді він має поліномне зростання відносно довільної точки.

Граф має поліномне зростання тоді і лише тоді, коли число

$$\alpha = \limsup_{r\to\infty}\frac{\log\gamma(r)}{\log r}$$

скінченне. Число α називається *степенем зростання* графа Γ.

Нехай (G,X^*) самоподібна дія скінченно породженої групи. Припускатимемо, що орбіти дії є нескінченними. Ця умова виконується для довільної транзитивної на рівнях дії групи.

Для довільної скінченної множини твірних елементів S групи G і $n\in\mathbb{N}$ визначимо

$$\nu_n = \limsup_{d(\omega_1,\omega_2)\to\infty}\frac{d(\sigma^n(\omega_1),\sigma^n(\omega_2))}{d(\omega_1,\omega_2)},$$

де $d(\cdot,\cdot)$ відстань в графі Шрайєра $\Gamma(G,S,X^\omega)$ і точки $\omega_1,\omega_2\in X^\omega$ належать до однієї орбіти. Оскільки дія самоподібна, точки $\sigma^n(\omega_1)$ і $\sigma^n(\omega_2)$ теж належать до однієї орбіти.

Орбітальним коефіцієнтом стиску дії називається число

$$\rho_o = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\nu_n}.$$

У статті [17] доведено наступні твердження.

Твердження 7. *Орбітальний коефіцієнт стиску не залежить від вибору множини твірних елементів групи, і, якщо дія є стискуючою, то* $\rho_o < 1$.

Теорема 8. *Зростання кожного орбітального графа Шрайєра стискуючої дії* (G, X^*) — *поліномне. Степінь зростання не більший за* $-\frac{\log|X|}{\log \rho_o}$, *де* ρ_o *орбітальний коефіцієнт стиску дії.*

Нехай тепер дія (G, X^*) є транзитивною на рівнях.

Приймемо

$$\rho_d = \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{D_n}},$$

де D_n — діаметр графа $\Gamma_n(G, S)$. Справедливі наступні твердження.

Твердження 9. $\dfrac{1}{|X|} \le \rho_d \le 1$.

Доведення. Очевидно, що $D_n \ge 1$, звідси $\rho_d \le 1$.

Оскільки дія транзитивна на рівнях дерева, тоді граф $\Gamma_n(G, S)$ зв'язний. А оскільки граф $\Gamma_n(G, S)$ має $|X|^n$ вершин, то $D_n \le |X|^n$. Звідси випливає, що $\rho_d \ge \frac{1}{|X|}$. □

Теорема 10. *Кожен орбітальний граф Шрайєра при транзитивній на рівнях дії* (G, X^*) *має степінь зростання не менший за* $-\frac{\log|X|}{\log \rho_d}$ *при* $\rho_d < 1$, *і* ∞ *при* $\rho_d = 1$.

Доведення. Нехай ρ_1 таке, що $0 < \rho_1 < \rho_d$. Тоді існує $N \in \mathbb{N}$ таке, що для всіх $n \ge N$ виконується $D_n \le \left(\frac{1}{\rho_1}\right)^n$.

За умови транзитивної на рівнях дії $\gamma(D_n) \ge |X|^n$.

Приймемо $k = \left[-\frac{\log n}{\log \rho_1}\right]$. При $n \ge (\frac{1}{\rho_1})^N$, $k \ge N$. Тоді $|X|^k \le \gamma(D_k) \le \gamma(\frac{1}{\rho_1^k}) \le \gamma(n)$, звідки $\gamma(n) \ge |X|^k \ge |X|^{-\frac{\log n}{\log \rho_1}-1} = \frac{1}{|X|} \cdot n^{-\frac{\log |X|}{\log \rho_1}}$.

Отже, степінь зростання довільного орбітального графа Шрайєра не менший за $-\frac{\log|X|}{\log \rho_1}$ для довільного $\rho_1 \in (0, \rho_d)$. Тому при $\rho_d < 1$ степінь зростання не менший за $\frac{\log|X|}{\log \rho_d}$, а при $\rho_d = 1$ дорівнює ∞. □

7. Зростання графів Шрайєра груп $\mathfrak{K}(\nu, \omega)$. Твердження 6 дозволяє обмежитися випадком неперіодичного слова ω. Тому надалі вважатимемо слово ω неперіодичним.

Розглянемо множину $P = \{\tau^n(A), n \ge 0\}$. Ця множина скінченна і має потужність $m = s + t$. Покладемо $A^1 = A$ і $A^i = \tau^{i-1}(A^1), i \in \{2, \dots, m\}$. Помітимо, що $\tau(A^m) = A^{s+1}$. Тоді $P = \{A^1, \dots, A^m\}$.

Для кожного $n \in \mathbb{N}$ позначимо через P_n обмеження слів з P на рівень n. Тобто $P_n = \{A_n^1, \dots, A_n^m\}$, де A_n^i це обмеження слова A^i на рівень n. Нагадаємо, що обмеженням слова $\dots x_2 x_1$ на рівень n називається слово $x_n \dots x_2 x_1$.

Зафіксуємо рівень $n_0 \in \mathbb{N}$ такий, що всі обмеження слів з P на рівень n_0 різні. Тоді $|P_n| = m$ для кожного $n \ge n_0$.

Розглянемо графи Шрайєра Γ_n при $n \ge n_0$. Для кожного $n \ge n_0$ знайдемо відстані між вершинами $A_n^i, i \in \{1, \dots, m\}$ в графі Шрайєра Γ_n. За твердженням 5 для всіх

$n \geq n_0$ і $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ маємо

$$d(A^i_{n+1}, A^j_{n+1}) = \begin{cases} d(A^{i+1}_n, A^{j+1}_n), & \text{якщо слова } A^i_{n+1}, A^j_{n+1} \text{ закінчуються на однакову літеру,} \\ d(A^{i+1}_n, A^1_n) + d(A^1_n, A^{j+1}_n) + 1, & \text{якщо слова } A^i_{n+1}, A^j_{n+1} \text{ закінчуються на різні літери} \end{cases} \tag{4}$$

(якщо індекс i (або j) дорівнює m, то відповідно замість $i+1$ $(j+1)$ треба писати $s+1$, оскільки $\tau(A^m_{n+1}) = A^{s+1}_n$).

Остання літера слова A^i_{n+1} збігається з останньою літерою слова A^i_n для довільного n, тому слова A^i_{n+1} і A^j_{n+1} мають однакові (різні) останні літери тоді і лише тоді, коли слова A^i_n і A^j_n мають однакові (відповідно, різні) останні літери. Тоді з рівностей (4) випливає, що $d(A^i_{n+1}, A^j_{n+1})$ лінійно виражається через $d(A^i_n, A^j_n), i, j \in \{1, \ldots, m\}$, причому коефіцієнти будуть однакові при всіх $n \geq n_0$. Нехай $\overrightarrow{f_n}$ — вектор з координатами $d(A^i_n, A^j_n), i, j \in \{1, \ldots, m\}, i < j$. Тоді ми маємо лінійну рекурентну систему

$$\overrightarrow{f_{n+1}} = F\overrightarrow{f_n} + \overrightarrow{c}, \quad n \geq n_0. \tag{5}$$

За побудовою, матриця $F = (F_{(i,j),(i',j')})$, де $F_{(i,j),(i',j')}, i < j, i' < j'$ — коефіцієнт у зображенні $d(A^i_{n+1}, A^j_{n+1})$ через $d(A^{i'}_n, A^{j'}_n)$. Отже, є невід'ємною цілочисельною матрицею. Коефіцієнти $F_{(i,j),(i',j')}$ обчислюємо за наступними формулами

$$F_{(i,j),(i',j')} = \begin{cases} 2, & \text{якщо } (i,j) = (s,m) \text{ і } (i',j') = (1, s+1), \\ 1, & \text{якщо } A_i = A_j \text{ і } (i',j') = (i+1, j+1), \\ & \text{або } A_i \neq A_j, (i',j') = (1, i+1) \text{ або } (i',j') = (1, j+1), \\ 0, & \text{у всіх інших випадках.} \end{cases}$$

Алгоритм знаходження зростання компонент лінійної рекурентної системи (5) з невід'ємною матрицею є добре відомим. Опишемо його, використовуючи підхід з праць [4, 9, 1].

Нехай Γ_F — граф з матрицею інцидентності F. Компонентам сильної зв'язності графа Γ_F відповідають нерозкладні компоненти F_i матриці F. Для того, щоб знайти зростання компоненти f^i_n, розглянемо компоненту сильної зв'язності Γ_{F_j}, яка містить вершину i (вершинам графа Γ_F відповідають компоненти вектора $\overrightarrow{f_n}$). Приймемо

$$\Phi = \{F_i | \text{ існує орієнтований шлях з } \Gamma_{F_j} \text{ у компоненту } \Gamma_{F_i}\}$$

(вона природно містить F_j). Нехай $\lambda = \max_{F_i \in \Phi} \lambda_{F_i}$, де λ_{F_i} — число Перона матриці F_i і k — кількість $F_i \in \Phi$ таких, що $\lambda = \lambda_{F_i}$. Тоді, якщо початковий вектор рекурентної системи є строго додатним, то $f^i_n \sim n^{k-1}\lambda^n$.

Початковий вектор $\overrightarrow{f_{n_0}}$ рекурентної системи (5) є строго додатним за побудовою. Тому будь-яка компонента вектора $\overrightarrow{f_n}$ має зростання, як у $n^k\lambda^n$, для деякого $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, де λ — число Перона деякої нерозкладної компоненти матриці F. З описано вище алгоритму легко випливає, що якщо існує компонента із зростанням $n^{k+1}\lambda^n$ (тобто належить до відповідного класу зростання), тоді існує компонента із зростанням $n^k\lambda^n$. Крім того, завжди існує компонента із зростанням $n^k\lambda^n$, де λ — число Перона матриці F. Приймемо

$$\Lambda = \{\lambda | \text{ існує компонента вектора } \overrightarrow{f_n}, \text{яка має зростання } n^k\lambda^n, \text{для деякого } k \geq 0\}.$$

Оскільки компоненти вектора $\overrightarrow{f_n}$ не спадають, то $\lambda \geq 1$, для будь-якого $\lambda \in \Lambda$. Нижче ми встановимо, що насправді всі $\lambda > 1$.

Означимо

$$\lambda_d = \max_{\lambda \in \Lambda} \lambda, \quad \lambda_o = \min_{\lambda \in \Lambda} \lambda.$$

Число λ_d — це в точності число Перона матриці F.

Твердження 11. *Орбітальний коефіцієнт стиску ρ_o дії $(\mathfrak{K}(\nu,\omega), X^*)$ не менший за λ_o^{-1}.*

Доведення. Оскільки $d(A_n^i, A_n^j) \sim n^k \lambda_o^n$, то існують $a, b > 0$ такі, що для будь-якого $n \geq n_0$

$$an^k \lambda_o^n \leq d(A_n^i, A_n^j) \leq bn^k \lambda_o^n.$$

Тоді

$$\nu_n = \limsup_{d(\omega_1,\omega_2)\to\infty} \frac{d(\sigma^n(\omega_1), \sigma^n(\omega_2))}{d(\omega_1,\omega_2)} \geq \lim_{l\to\infty} \frac{d(A_{l-n}^i, A_{l-n}^j)}{d(A_l^i, A_l^j)} \geq \lim_{l\to\infty} \frac{a(l-n)^k \lambda_o^{l-n}}{bl^k \lambda_o^l} = \frac{a}{b} \frac{1}{\lambda_o^n},$$

$$\rho_o = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\nu_k} \geq \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{b}{a}\frac{1}{\lambda_o^k}} = \frac{1}{\lambda_o}.$$

□

Наслідок 11.1. $\lambda_o > 1$.

Доведення. Оскільки дія $(\mathfrak{K}(\nu,\omega), X^*)$ стискуюча, то за твердженням 7 $\rho_o < 1$. Звідси, $\lambda_o > 1$. □

Отже, $\lambda > 1$ для всіх $\lambda \in \Lambda$. Тоді для будь-якого $\lambda \in \Lambda$ існує компонента із зростанням λ^n.

Твердження 12. *Компонента $d(A_n^1, A_n^2)$ рекурентної системи (5) має найбільше зростання.*

Доведення. За твердженням 5.1 $d(A_n^i, A_n^{i+1}), i \in \{2, \ldots, m\}$ мають зростання, не більше за $d(A_n^1, A_n^2)$. Тоді за нерівністю трикутника маємо

$$d(A_n^i, A_n^j) \leq \sum_{k=i}^{j-1} d(A_n^k, A_n^{k+1}).$$

Звідси зростання $d(A_n^i, A_n^j)$ не більше за $d(A_n^1, A_n^2)$ для будь-яких i, j. □

Наслідок 12.1. *Зростання $d(A_n^1, A_n^2) \sim n^k \lambda_d^n$, для деякого $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.*

Теорема 13. *Клас зростання діаметрів графів Шрайєра $\Gamma_n(\mathfrak{K}(\nu,\omega))$ збігається з класом зростання максимальної компоненти рекурентної системи (5), тобто $n^k \lambda_d^n$ для деякого $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.*

Доведення. Нехай R_n — радіус графа Шрайєра $\Gamma_n(\mathfrak{K}(\nu,\omega))$ у вершині A_n^1, тобто мінімальне з чисел $r \in \mathbb{N}$ таких, що $B(A_n^1, r) = \Gamma_n(\mathfrak{K}(\nu,\omega))$. Тоді з твердження 4 випливатиме: $R_n = d(A_{n-1}^1, \tau(A_n^1)) + R_{n-1} + 1 = d(A_{n-1}^1, A_{n-1}^2) + d(A_{n-2}^1, A_{n-2}^2) + R_{n-2} + 2 = \sum_{i=n_0}^{n-1} d(A_i^1, A_i^2) + R_{n_0} + n - n_0$. Оскільки $d(A_n^1, A_n^2)$ має максимальне зростання, яке еквівалентне до $n^k\lambda_d^n, k \geq 0$, то існують константи $a, b > 0$ такі, що для будь якого $n \geq n_0$

$$an^k\lambda_d^n \leq d(A_n^1, A_n^2) \leq bn^k\lambda_d^n.$$

Тоді для деяких $a', b' > 0$

$$a'n^k\lambda_d^n \leq a(n-1)^k\lambda_d^{n-1} \leq R_n \leq \sum_{i=n_0}^{n-1} bi^k\lambda_d^i + R_{n_0} + n - n_0 \leq b'n^k\lambda_d^n.$$

Отже, $R_n \sim n^k\lambda_d^n$.

Нехай D_n — діаметр графа Шрайєра $\Gamma_n(\mathfrak{K}(\nu,\omega))$. З твердження 4 випливає, що $D_n = 2R_{n-1} + 1$. Отже, $D_n \sim n^k\lambda_d^n$. □

Наслідок 13.1. $\rho_d = \lambda_d^{-1}$.

Лема 1. *Для будь-яких слів $u, v \in X^n$ справедливі оцінки:*

$$\sum_l d(A_{k_l}^1, A_{k_l}^{i_l}) \leq d(u,v) \leq \sum_l d(A_{k_l}^1, A_{k_l}^{i_l}) + 2\,diam(\Gamma_{n_0}) + 2n,$$

для деяких індексів i_l, k_l. Причому такі, що для будь-якого $k < n$ виконується

$$\sum_l d(A_{k_l-k}^1, A_{k_l-k}^{i_l}) \leq d(\sigma^k(u), \sigma^k(v)) \leq \sum_l d(A_{k_l-k}^1, A_{k_l-k}^{i_l}) + 2\,diam(\Gamma_{n_0}) + 2n.$$

Доведення. Можна вважати, що останні літери слів u і v різні, інакше можна перейти до коротшої пари слів, відстань між якими така ж як між u і v. Тоді за твердженням 5.1

$$d(u,v) = d(\tau(u), A_{n-1}^1) + d(A_{n-1}^1, \tau(v)) + 1 \tag{6}$$

Розпишемо перший доданок

$$\begin{aligned} d(\tau(u), A_{n-1}^1) = d(\tau^{k_1}(u), A_{n-k_1}^1) + d(A_{n-k_1}^1, A_{n-k_1}^{i_1}) + 1 = d(\tau^{k_2}(u), A_{n-k_2}^1) + \\ + d(A_{n-k_2}^1, A_{n-k_2}^{i_2}) + d(A_{n-k_1}^1, A_{n-k_1}^{i_1}) + 2 = \ldots = \\ = d(\tau^{k_p}(u), A_{n-k_p}^1) + \sum_{l=1}^{p-1} d(A_{n-k_l}^1, A_{n-k_l}^{i_l}) + p - 1, \end{aligned}$$

де k_p таке, що $n - k_p \leq n_0$. Число k_{l+1} в точності таке, що слова $\tau^{k_l}(u)$ і $A_{n-k_l}^1$ вперше з кінця відрізняються на $(n-k_{l+1}+1)$-му рівні, а індекс i_l такий, що $A^{i_l} = \tau^{k_{l+1}-k_l}(A^1)$. Тому $k_1 < k_2 < \ldots < k_p < n$ і $p < n$. Відстань $d(\tau^{k_p}(u), A_{n-k_p}^1)$ рахується на графі Шрайєра рівня не більшого за n_0, тому цю відстань можна обмежити діаметром $diam(\Gamma_{n_0})$.

Аналогічно розписується другий доданок. Підставляючи в рівність (6), отримуємо першу з потрібних нерівностей.

Розглянемо $d(\sigma^k(u), \sigma^k(v))$. Слова $\sigma^k(u)$ і $\sigma^k(v)$ мають різні останні літери. Тоді

$$d(\sigma^k(u), \sigma^k(v)) = d(\tau(\sigma^k(u)), A_{n-1-k}^1) + d(A_{n-1-k}^1, \tau(\sigma^k(v))) + 1 \tag{7}$$

Перший доданок розписується подібно до попереднього

$$d(\tau(\sigma^k(u)), A^1_{n-1-k}) = d(\tau^{k_1}(\sigma^k(u)), A^1_{n-k_1-k}) + d(A^1_{n-k_1-k}, A^{i_1}_{n-k_1-k}) + 1 = \ldots =$$
$$= d(\tau^{k_p}(\sigma^k(u)), A^1_{n-k_p-k}) + \sum_{l=1}^{p'-1} d(A^1_{n-k_l-k}, A^{i_l}_{n-k_l-k}) + p' - 1,$$

де p' мінімальне p з таких, що $n - k_p - k > 0$. Всі індекси k_l, i_l в цій рівності такі ж як і в попередній рівності, оскільки вони не залежать від перших k літер слів $\tau(u)$ і A^1_{n-1}.

Аналогічно розписується другий доданок. Підставляючи в рівність (7), отримуємо другу з потрібних нерівностей. □

Теорема 14. *Орбітальний коефіцієнт стиску ρ_o дії $(\mathfrak{K}(\nu,\omega), X^*)$ дорівнює λ_o^{-1}.*

Доведення. За твердженням 11 маємо, що $\rho_o \geq \lambda_o^{-1}$. Зробимо оцінку зверху.

Існують сталі $a, b > 0$ такі, що для будь-якого $n \geq n_0$ і будь-яких індексів i, j $an^{k(i,j)}\lambda^n(i,j) \leq d(A^i_n, A^j_n) \leq bn^{k(i,j)}\lambda^n(i,j)$. Тоді, для будь-яких $n - k \geq n_0$ і будь-яких i, j

$$\frac{d(A^i_{n-k}, A^j_{n-k})}{d(A^i_n, A^j_n)} \leq \frac{b}{a}\frac{1}{\lambda_o^k}.$$

Нехай $(v_n, w_n) \in X^\omega \times X^\omega, n \geq 1$ — послідовність точок з однієї орбіти дії $(\mathfrak{K}(\nu,\omega), X^\omega)$ така, що $d(v_n, w_n) \to \infty$ при $n \to \infty$. Оскільки орбіти на границі дерева збігаються з конфінальними класами, то слова v_n і w_n відрізнятимуться у скінченній кількості точок. Тому відстань між ними у відповідному орбітальному графі Шрайєра буде збігатися з відстанню між їх достатнім початком на графі Шрайєра відповідного рівня. Тому можемо вважати, що v_n і w_n скінченні слова однакової довжини і що вони мають різні останні літери.

Зафіксуємо $k \in \mathbb{N}$. Тоді, за лемою 1 для будь-якого $n > k$ маємо

$$\frac{d(\sigma^k(v_n), \sigma^k(w_n))}{d(v_n, w_n)} \leq \frac{\sum\limits_l d(A^1_{n_l-k}, A^{i_l}_{n_l-k}) + 2\,diam(\Gamma_{n_0}) + 2n}{\sum\limits_l d(A^1_{n_l}, A^{i_l}_{n_l})} \leq \frac{b}{a}\frac{1}{\lambda_o^k} + \frac{2\,diam(\Gamma_{n_0}) + 2n}{\sum\limits_l d(A^1_{n_l}, A^{i_l}_{n_l})}.$$

Другий доданок прямує до нуля, оскільки знаменник експоненційно зростає. Ця оцінка справедлива для будь-якої послідовності слів (v_n, w_n). Тому

$$\nu_k = \limsup_{d(\omega_1,\omega_2)\to\infty} \frac{d(\sigma^k(\omega_1), \sigma^k(\omega_2))}{d(\omega_1, \omega_2)} \leq \frac{b}{a}\frac{1}{\lambda_o^k}, \quad \rho_o = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\nu_k} \leq \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{b}{a}\frac{1}{\lambda_o^k}} = \frac{1}{\lambda_o}.$$

Отже, $\rho_o = \lambda_o^{-1}$. □

Наслідок 14.1. *Степінь зростання довільного орбітального графа Шрайєра $\Gamma(\mathfrak{K}(\nu,\omega), x), x \in X^\omega$ лежить в межах між $\frac{\log 2}{\log \lambda_d}$ і $\frac{\log 2}{\log \lambda_o}$.*

Доведення. Випливає з теорем 8 і 10. □

Наслідок 14.2. *Нехай всі компоненти рекурентної системи (5) мають однакове зростання (тобто належать до одного класу зростання). Тоді степінь зростання довільного орбітального графа Шрайєра $\Gamma(\mathfrak{K}(\nu,\omega), x)$ дорівнює $\frac{\log 2}{\log \lambda}$, де λ — число Перона матриці F.*

Твердження 15. *Нехай $x = 00\ldots$, якщо $\nu_1 = 1$ і $x = 11\ldots$, якщо $\nu_1 = 0$. Тоді степінь зростання орбітального графа Шрайєра $\Gamma(\mathfrak{K}(\nu,\omega), S, x)$ дорівнює $\frac{\log 2}{\log \lambda_d}$.*

Доведення. Позначимо через B_n проекцію нескінченного слова x на рівень n. Помітимо, що останні літери слів B_n і A_n^1 відрізняються для будь-якого $n \geq 1$. Тому,

$$\begin{aligned} d(B_n, A_n^1) &= d(B_{n-1}, A_{n-1}^1) + d(A_{n-1}^1, A_{n-1}^2) + 1 = \ldots = \\ &= d(B_{n_0}, A_{n_0}^1) + \sum_{l=n_0}^{n-1} d(A_l^1, A_l^2) + n - n_0. \end{aligned}$$

Отже, $d(B_n, A_n^1)$ має таке саме зростання, як і $d(A_n^1, A_n^2)$, тобто максимальне зростання серед компонентів вектора $\overrightarrow{f_n}$. Отже, $d(B_n, A_n^1) \sim n^k \lambda_d^n$ для деякого $k \geq 0$. Крім того, помітимо, що $d(B_n, A_n^1) > d(B_k, A_k^1)$ при $n > k$.

Доведемо, що $B(x, d(B_n, A_n^1)) \subseteq X^n x$. Припустимо, що це не так, тобто, що існує $y \in B(x, d(B_n, A_n^1))$ таке, що y і x мають різні k-ті літери при $k > n$ і далі мають однакові літери (починаючи з деякого рівня вони завжди мають однакові літери оскільки належать до одного конфінального класу). Нехай C_n — проекція слова y на рівень n. Тоді

$$d(x, y) = d(B_k, C_k) = d(B_{k-1}, A_{k-1}^1) + d(A_{k-1}^1, C_{k-1}) + 1 > d(B_n, A_n^1).$$

Суперечність. Тому, $\gamma(d(B_n, A_n^1)) \leq 2^n$.

Отже, $\gamma(r) \leq 2^{n+1}$ при $an^k\lambda_d^n < r \leq a(n+1)^k\lambda_d^{n+1}$, для деякого $a > 0$. Тоді

$$\alpha = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log \gamma(r)}{\log r} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\log 2}{\log(an^k\lambda_d^n)} = \frac{\log 2}{\log \lambda_d}.$$

Оцінка в інший бік випливає з наслідку 14.1. □

Подивимося, коли в рекурентній системі (5) всі компоненти вектора $\overrightarrow{f_n}$ мають однакове зростання. В цьому випадку зростання діаметрів графів Шрайєра $\sim \lambda^n$, $\rho_d = \rho_o = \lambda^{-1}$, а всі орбітальні графи Шрайєра мають степінь зростання $\frac{\log 2}{\log \lambda}$, де λ — число Перона матриці F.

Твердження 16. *Компонента $d(A_n^1, A_n^{s+1})$ рекурентної системи (5) має найменше зростання.*

Доведення. Помітимо, що $d(A_n^s, A_n^m) = 2d(A_{n-1}^1, A_{n-1}^{s+1}) + 1$. Тому, $d(A_n^s, A_n^m)$ і $d(A_n^1, A_n^{s+1})$ мають однакове зростання і достатньо довести, що $d(A_n^s, A_n^m)$ має мінімальне зростання.

Нехай $d(A_n^i, A_n^{i+k})$ має найменше зростання з мінімальним k. Тоді за твердженням 5.1 всі $d(A_n^j, A_n^{j+k}), j \geq i$ будуть мати мінімальне зростання. Отже, $d(A_n^{m-k}, A_n^m)$ має мінімальне зростання. Якщо $m - k = s$, то все доведено. Нехай $m - k \neq s$. Тоді $m - k > s$, оскільки інакше $d(A_n^{m-k+1}, A^{s+1})$ має мінімальне зростання при $k - m + s < k$, що суперечить припущенню про мінімальність такого k.

Отже, $d(A_n^i, A_n^{i+k})$ має мінімальне зростання при всіх $i > s$. З цього випливає, що для будь-якого $i \in \{1, \ldots, m\}$ існуватиме $j \neq i$ таке, що $d(A_n^i, A_n^j)$ має мінімальне зростання (треба використати неперіодичність ω) і для $i \leq s$ існуватиме $j > s$ з такою ж умовою.

Всі наступні відстані мають мінімальне зростання

$$d(A_n^{s+1}, A_n^{s+1+k}) \sim d(A_n^{s+1+k}, A_n^{s+1+2k}) \sim \ldots \sim d(A_n^{s+1+(l-1)k}, A_n^{s+1+lk}),$$

де l таке, що $s+1+lk \le m < s+1+(l+1)k$. Тоді $d(A_n^{s+1+(l+1)k-(m-s)}, A_n^{s+1+(l+1)k})$ має мінімальне зростання. Тому $s+1+(l+1)k-(m-s) = s+1$, бо інакше за нерівністю трикутника $d(A_n^{s+1}, A_n^{s+1+(l+1)k-(m-s)})$ має мінімальне зростання з $(l+1)k-(m-s) < k$, що суперечить припущенню про мінімальність такого k.

Доведемо, що $d(A_n^s, A_n^{s+k})$ має мінімальне зростання. Справді, існує k' таке, що $d(A_n^s, A_n^{s+k'})$ має мінімальне зростання. Якщо $k \nmid k'$, то $d(A_n^i, A_n^{i+k''}), i > s$ має мінімальний зростання, де k'' =НСД$(k', k) < k$ і ми знов отримуємо суперечність з мінімальністю k. Отже, $k|k'$. Тоді за нерівністю трикутника

$$d(A_n^s, A_n^{s+k'}) \sim d(A_n^s, A_n^{s+k'-k}) \sim d(A_n^s, A_n^{s+k'-2k}) \sim \ldots \sim d(A_n^s, A_n^{s+k}).$$

Оскільки, як ми довели, $s+1+(l+1)k = m+1$, то

$$d(A_n^s, A_n^{s+k}) \sim d(A_n^{s+k}, A_n^{s+2k}) \sim \ldots \sim d(A_n^{m-k}, A_n^m).$$

За нерівністю трикутника $d(A_n^s, A_n^m)$ має мінімальне зростання. □

Наслідок 16.1. $d(A_n^1, A_n^{s+1}) \sim \lambda_o^n$.

Наслідок 16.2. *Нехай перші літери слів ν і ω різні. Тоді всі компоненти вектора $\overrightarrow{f_n}$ мають однакове зростання.*

Доведення. Оскільки перші літери слів ν і ω різні, то останні літери слів A_n^1 і A_n^{s+1} різні. Тому $d(A_n^1, A_n^{s+1}) = d(A_n^1, A_n^2) + d(A_n^1, A_n^{s+2}) + 1$. Отже, за твердженням 12 $d(A_n^1, A_n^{s+1})$ і $d(A_n^1, A_n^2)$ мають однакове зростання. Тоді і всі інші відстані мають таке саме зростання. □

З наслідку 16.1 випливає, що для того, щоб знайти коефіцієнт λ_o, потрібно знайти клас зростання компоненти $d(A_n^1, A_n^{s+1})$ рекурентної системи (5).

8. Приклади. Такі відомі групи, як група Григорчука, групи Гупти-Сідкі і Гупти-Фабріковського, всі групи зі статті [7] мають графи Шрайєра з досить простим зростанням. А саме, степінь зростання орбітальних графів Шрайєра цих груп має вигляд $\frac{\log n}{\log m}$ для деяких $n, m \in \mathbb{N}$. Наведемо приклад групи, у якої під знак логарифму входить ірраціональне число.

Група $\mathfrak{K}(1,10)$. Ця група є групою ітерованих монодромій многочлена z^2+i (див.[15]). В цій групі P містить три слова, а саме $A^1 = \ldots 01011$, $A^2 = \ldots 0101$, $A^3 = \ldots 1010$. Відстані між ними виражаються так:

$$d(A_n^1, A_n^2) = d(A_{n-1}^2, A_{n-1}^3), \quad d(A_n^2, A_n^3) = d(A_{n-1}^1, A_{n-1}^3) + d(A_{n-1}^1, A_{n-1}^2) + 1,$$
$$d(A_n^1, A_n^3) = 2d(A_{n-1}^1, A_{n-1}^2) + 1.$$

Матриця цієї рекурентної системи нерозкладна. Тому всі $d(A_n^i, A_n^j)$ мають однакове зростання, яке еквівалентне до λ^n, де λ ($\approx 1,5214$) — додатний корінь многочлена $\lambda^3-\lambda-2$. Отже, всі орбітальні графи Шрайєра мають степінь зростання $\frac{\log 2}{\log \lambda} \approx 1,6518$.

Група $\mathfrak{K}(1, 1\ldots 10)$. Нехай $m = |1\ldots 10| + 1$. Слова A^i при $i \neq m$ мають останню літеру 1, а слово A^m — літеру 0. Тому відстані між цими словами виражаються так

$$\begin{aligned} d(A_n^i, A_n^j) &= d(A_{n-1}^{i+1}, A_{n-1}^{j+1}),\ j \neq m, \\ d(A_n^i, A_n^m) &= d(A_{n-1}^1, A_{n-1}^{i+1}) + d(A_{n-1}^1, A_{n-1}^2) + 1. \end{aligned}$$

Звідси легко бачити, що матриця цієї рекурентної системи матиме одну нерозкладну компоненту вигляду

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 2 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

яка має характеристичний поліном $\lambda^m - \lambda - 2$, а інші нерозкладні компоненти матимуть вигляд

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

де в останньому рядку, можливо, є одна одиниця. Тоді максимальне дійсне власне число таких компонент буде не більше за 1. Причому елементи з цих нерозкладних компонент завжди виражаються через елементи першої компоненти.

Отже, всі $d(A_n^i, A_n^j)$ мають однакове зростання, яке еквівалентне до λ^n, де λ — найбільший додатний корінь многочлена $\lambda^m - \lambda - 2$.

Наведемо приклад групи у якої існують відстані $d(A_n^i, A_n^j)$, що мають різне зростання.

Група $\mathfrak{K}(010, 011)$. В цій групі P містить 6 слів, а саме $A^1 = \dots 110010$, $A^2 = \dots 11001$, $A^3 = \dots 1100$, $A^4 = \dots 110110$, $A^5 = \dots 11011$, $A^6 = \dots 1101$ і $\tau(A^6) = A^4$. Матриця відповідної рекурентної системи матиме розмірність 15×15. Для нас важливі лише дві її нерозкладні компоненти. Перша нерозкладна компонента має вигляд

$$\begin{gathered} d(A_n^1, A_n^4) = d(A_{n-1}^2, A_{n-1}^5), \quad d(A_n^2, A_n^5) = d(A_{n-1}^3, A_{n-1}^6), \\ d(A_n^3, A_n^6) = 2d(A_{n-1}^1, A_{n-1}^4) + 1. \end{gathered} \tag{8}$$

Отже, $d(A_n^1, A_n^4) \sim d(A_n^2, A_n^5) \sim d(A_n^3, A_n^6) \sim (\sqrt[3]{2})^n$. Друга нерозкладна компонента

$$\begin{gathered} d(A_n^1, A_n^2) = d(A_{n-1}^1, A_{n-1}^2) + d(A_{n-1}^1, A_{n-1}^3) + 1, \quad d(A_n^1, A_n^3) = d(A_{n-1}^2, A_{n-1}^4), \\ d(A_n^2, A_n^4) = d(A_{n-1}^1, A_{n-1}^3) + d(A_{n-1}^1, A_{n-1}^5) + 1, \\ d(A_n^1, A_n^5) = d(A_{n-1}^1, A_{n-1}^2) + d(A_{n-1}^1, A_{n-1}^6) + 1, \\ d(A_n^1, A_n^6) = d(A_{n-1}^1, A_{n-1}^2) + d(A_{n-1}^1, A_{n-1}^4) + 1, \end{gathered} \tag{9}$$

Нерозкладна матриця цієї системи має число Перона більше за $\sqrt[3]{2}$. Тому доданок $d(A_{n-1}^1, A_{n-1}^4)$ в останньому рядку (9) не впливає на зростання компонент цієї системи. Отже, $d(A_n^1, A_n^2) \sim d(A_n^1, A_n^3) \sim d(A_n^2, A_n^4) \sim d(A_n^1, A_n^5) \sim d(A_n^1, A_n^6) \sim \lambda^n$, де $\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ — найбільший корінь многочлена $\lambda^5 - \lambda^4 - \lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1$.

Всі інші відстані $d(A_n^i, A_n^j)$ виражаються через відстані з системи (9). Тому вони мають зростання, як λ^n.

Отже, $\lambda_o = \sqrt[3]{2} \approx 1,2599$ і $\lambda_d = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,6180$. Тому $D_n \sim (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$ і $\rho_d = \frac{2}{1+\sqrt{5}} \approx 0,6180$, а $\rho_o = \sqrt[3]{2}^{-1} \approx 0,7937$. Отже, орбітальний граф Шрайєра $\Gamma(\mathfrak{K}(\nu, \omega), 11\dots)$ має степінь зростання $\frac{\log 2}{\log(1+\sqrt{5})-\log 2} \approx 1,4404$, а оцінка зверху в наслідку 14.1 дорівнює $\frac{\log 2}{\log \sqrt[3]{2}} = 3$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Островский А. М. Решение уравнений и систем уравнений.– Москва: Изд. иностр. лит., 1963. – 219 с.
2. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц.– Москва: Наука, 1966. – 576 с.
3. Валеев К. Г. Расщепление спектра матриц.– Киев: Вища Школа, 1986. – 269 с.
4. Гайдуш И. В. Системы с дискретным временем.– Минск: Ин-т мат. НАН Беларуси, 2001.
5. Bartholdi L. Counting path in graphs // Enseignement Math.– 1999.– V.45.– P.83–131.
6. Bartholdi L., Ceccherini-Silberstein T. G. Growth series and random walks on some hyperbolic graphs.– Preprint, 2001. – 22 p.
7. Bartholdi L., Grigorchuk R. *On the spectrum of Hecke type operators related to some fractal groups.* Proc. of the Steklov Institute of Mathematics.– 2000.– V.231.– P.5–45.
8. Bartholdi L., Nekrashevych V. Iterated monodromy groups of quadratic polynomials.– Preprint, 2003.
9. Gaubert S., Gunawardena J. The Perron-Frobenius theorem for homogeneous, monotone functions.– Preprint, 2003.– 20 p.
10. Grigorchuk R., Żuk A. *On the asymptotic spectrum of random walks on infinite families of graphs.* In M. Picardello and W. Woess, editors, *Proceedings of the Conference "Random Walks and Discrete Potential Theory", (Cortona)*, №22 in Symposia Mathematica, p. 188–204. Cambridge University Press, 1999.
11. Grigorchuk R., Żuk A. *The lamplighter group as a group generated by a 2-state automaton and its spectrum // Geom. Dedicata 87*, **1-3** (2001), 209–244.
12. Grigorchuk R., Żuk A. *The Ihara zeta function of infinite graphs, the KNS spectral measure and integrable maps* // Proc. of the Conference "Random walks in Vienne", to appear, 2003.– 39 p.
13. Krön R. Growth of self-similar graphs.– Vienna: Preprint ESI 1125, 2002.– 14 p.
14. Bartholdi L., Grigorchuk R., Nekrashevych V. *From fractal groups to fractal sets.* In Peter Grabner and Wolfgang Woess, editors, Fractals in Graz 2001. Analysis – Dynamics – Geometry – Stochastics, P.25–118, 2003.
15. Nekrashevych V. Iterated monodromy group.– Preprint, Geneva University, 2002.– 31 p.
16. Nekrashevych V. Limit spaces of self-similar group actions.– Preprint, Geneva University, 2002.– 33 p.
17. Nekrashevych V. *Virtual endomorphism of groups* // Algebra and Discrete Mathematics.– 2002.– V.1, №1.– P. 96–136.
18. Previte J. P. *Graph substitutions* // Ergodic Theory Dynam. Systems.– 1998.– V.18, №3.– P. 661–685.
19. Nekrashevych V., Grigorchuk R., Sushchanskii V.I. *Automata, dynamical systems and groups* // Proc. of the Steklov Institute of Mathematics.– 2000.– V.231.– P. 128–203.
20. Woess W. Random walks on infinite graphs and groups // Cambridge Tracts in Mathematics, 138.– Cambridge University Press, 1999.

Механіко-математичний факультет,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
bond@mail.univ.kiev.ua

Надійшло 28.04.2004