

УДК 512.552.12

Б. В. ЗАБАВСКИЙ

ПРОСТЫЕ КОЛЬЦА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ДЕЛИТЕЛЕЙ

B. V. Zabavskiy. *Simple elementary division rings*, Matematychni Studii, **22** (2004) 129–133.

It is proved that a simple Bezout domain is an elementary division ring if and only if this domain is 2-simple.

According to Kaplansky's definition, a ring R is an elementary division ring if every matrix over R is equivalent to a diagonal matrix with condition of complete divisibility of the diagonal elements. There are quite a few examples of noncommutative elementary division rings.

Б. В. Забавский. *Простые кольца элементарных делителей* // Математичні Студії. – 2004. – Т.22, №2. – С.129–133.

Доказано, что простая область Безу является областью элементарных делителей тогда и только тогда, когда она является 2-простой.

Согласно определению Капланского кольцо R является кольцом элементарных делителей, если любая матрица над R эквивалентна диагональной матрице с условием полной делимости диагональных элементов. Примеры некоммутативных колец элементарных делителей весьма немногочисленны.

Под кольцом R понимаем ассоциативное кольцо с $1 \neq 0$. Обозначим через R_n кольцо $n \times n$ матриц с элементами кольца R , а через $GL_n(R)$ группу единиц кольца R_n . Напомним, что $n \times m$ матрица $A = (a_{ij})$ называется диагональной, если $a_{ij} = 0$ для всех $i \neq j$. Матрицы A и B над кольцом R назовём эквивалентными (в обозначениях $A \sim B$), если над R существуют обратимые матрицы P и Q соответствующих размеров такие, что $B = PAQ$. Кольцо R называется кольцом элементарных делителей, если любая матрица над R эквивалентна некоторой канонически диагональной матрице, т.е. диагональной матрице d_{ij} , для которой $Rd_{i+1,i+1}R \subseteq d_{ii}R \cap Rd_{ii}$ для всех i , при этом включение $Rd_{i+1,i+1}R \subseteq d_{ii}R \cap Rd_{ii}$ означает, что элемент d_{ii} является полным делителем элемента $d_{i+1,i+1}$ [1]. Напомним, что кольцо R является правым (левым) эрмитовым, если любая 1×2 (2×1) матрица над R обладает диагональной редукцией. Кольцо, которое является правым и левым эрмитовым, называется эрмитовым кольцом. Согласно [7], кольцо R называется кольцом стабильного ранга 1, если из $aR + bR = R$ следует существование элемента $t \in R$ такого, что $(a+bt)R = R$. Под кольцом Безу понимаем кольцо, в котором любой односторонний конечнопорожденный идеал является главным.

Пусть R — простое кольцо, тогда $RaR = R$ для любого ненулевого $a \in R$. Отсюда, поскольку $1 \in R$, существуют такие элементы $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n \in R$, что $u_1av_1 + \dots + u_nav_n = 1$. Если для всех ненулевых элементов $a \in R$ найдется такое натуральное число n , что $u_1av_1 + \dots + u_nav_n = 1$ для некоторых элементов $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n \in R$,

2000 *Mathematics Subject Classification*: 16U80, 16S50.

Keywords: simple Bezout domain, elementary division ring, diagonal matrix

doi:10.30970/ms.22.2.129-133

© Б. В. Забавский, 2004

причем число n является наименьшим из всех возможных, тогда кольцо R называется n -простым [6]. В [8] доказано, что кольцо P_n , где P — поле, n -простое, но не $(n-1)$ -простое. Примером 2-простого кольца может служить дифференциальное кольцо от n -дифференцирований [9].

Предложение 1. Если R является n -простой областью, тогда для любых элементов $a_1, a_2, \dots, a_n \in R$ существуют элементы $u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_n \in R$, такие, что $u_1 a_1 v_1 + u_2 a_2 v_2 + \dots + u_n a_n v_n = 1$.

Доказательство. Так как элементы $a_1, a_2, \dots, a_n$ ненулевые и R — область, то $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n \neq 0$, поэтому $R a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n R = R$. Поскольку R — n -простое кольцо, то существуют такие $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n \in R$, что

$$x_1 a_1 a_2 \cdot \dots \cdot a_n y_1 + x_2 a_1 a_2 \cdot \dots \cdot a_n y_2 + \dots + x_n a_1 a_2 \cdot \dots \cdot a_n y_n = 1.$$

Если обозначить $x_1 = u_1, a_2 \cdot \dots \cdot a_n y_1 = v_1, x_2 a_1 = u_2, a_3 \cdot \dots \cdot a_n y_2 = v_2, \dots, x_1 a_1 a_2 \cdot \dots \cdot a_{n-1} = u_n, y_n = v_n$, то получим $u_1 a_1 v_1 + u_2 a_2 v_2 + \dots + u_n a_n v_n = 1$, что и требовалось доказать. $\square$

Теорема 1. Простая область Безу является областью элементарных делителей тогда и только тогда, когда она 2-простая.

Доказательство. Пусть R — простая область элементарных делителей и a — произвольный ненулевой элемент из R . Поскольку R — область элементарных делителей, то для матрицы $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ существуют такие обратимые матрицы $P = (p_{ij}) \in GL_2(R)$, $Q = (q_{ij}) \in GL_2(R)$ и такая матрица $\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, где $RbR \subseteq zR \cap Rz$, что имеет место равенство

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} P = Q \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Так как R — простая область, то возможны два случая: $b = 0$ или z — обратимый элемент области R . Если $b = 0$, то согласно (1) получим

$$ap_{12} = 0, \quad ap_{22} = 0. \quad (2)$$

В силу того, что R — область и $a \neq 0$, из (2) следует $p_{12} = 0$ и $p_{22} = 0$, что невозможно, так как $P \in GL_2(R)$. Поэтому z — обратимый элемент R . С точностью до эквивалентности матриц можно считать, что $z = 1$. Тогда из (1) имеем

$$ap_{11} = q_{11}, \quad ap_{21} = q_{21}. \quad (3)$$

Поскольку $Q \in GL_2(R)$, то $Rq_{11} + Rq_{22} = R$, откуда $uq_{11} + vq_{21} = 1$ для некоторых $u, v \in R$. Тогда согласно (3) получим $uap_{11} + vap_{21} = 1$, т. е. элемент a является 2-простым. Необходимость доказана.

Теперь пусть R — 2-простая область Безу и A — произвольная 2×2 матрица над R . Известно, что область Безу является областью Эрмита [1], поэтому с точностью до эквивалентности матриц можем считать, что A — треугольная матрица. Если A имеет вид $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ для некоторых $a, b \in R$, то поскольку R — область Безу [1], очевидно, что матрица A эквивалентна матрице $\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ для некоторого $d \in R$. Матрица

A также может иметь следующий вид: $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$, где $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$. Поскольку область Безу является областью Орэ [1], то для ненулевых элементов $a, b \in R$ можно найти такие $x, y \in R$, что $bx = -cy \neq 0$. Тогда для матрицы A существует матрица $T \in R_2$ такая, что $AT = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ для некоторых ненулевых элементов $d, k \in R$. В качестве матрицы T можно выбрать, например, матрицу $T = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix}$. Элементы d, k ненулевые, тогда согласно предложению 1 верно равенство

$$u_1 dv_1 + u_2 kv_2 = 1. \quad (4)$$

Равенство (4) можно записать следующим образом

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 1.$$

В силу того, что $u_1 R + u_2 R = R$ и R кольцо Эрмита, строку $(u_1 \ u_2)$ можно дополнить до обратимой матрицы $U \in GL_2(R)$ [10]. Пусть $T \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$. Так как $\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = 1$, то $Rw_1 + Rw_2 = R$, поэтому столбец $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ можно дополнить до обратимой матрицы $W \in GL_2(R)$ [10]. Тогда $UAV = \begin{pmatrix} 1 & * \\ * & * \end{pmatrix}$. Элементарными преобразованиями столбцов и строк матрицу UAV приводим к виду $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix}$, т.е. матрица A эквивалентна канонически диагональной матрице. Индукция по размерам матрицы завершает доказательство теоремы 1.

Теорема доказана полностью. $\square$

Рассмотрим случай простой области Безу стабильного ранга 1.

Определение 1. Кольцо R называется *кольцом Казимирского*, если для любых ненулевых элементов $a, b \in R$ существуют элементы $s, t \in R$ и обратимый элемент $u \in U(R)$ такие, что $as + ubt = 1$.

Отметим, что такие кольца впервые по-видимому рассматривал проф. П.С. Казимирский [9].

Предложение 2. 2-простая область стабильного ранга 1 является областью Казимирского.

Доказательство. Пусть R 2-простая область. Согласно предложению 1 для любых ненулевых элементов $a, b \in R$ существуют $u_1, u_2, v_1, v_2 \in R$ такие, что $u_1 av_1 + u_2 bv_2 = 1$. Тогда $u_1 aR + u_2 bR = R$. Так как R — кольцо стабильного ранга 1, то существует $x \in R$, для которого $u_1 a + u_2 bx$ — обратимый элемент кольца. Отсюда $Ra + Rbx = R$. Учитывая, что R — кольцо стабильного ранга 1, получим $a + ybx = u$ — обратимый элемент R для некоторого $y \in R$. Отсюда $aR + yR = R$. Элемент $as + y = w$ для некоторого $s \in R$ — также обратимый элемент кольца R . Отсюда $y = w - as$ и для данного y из равенства $a + ybx = u$ получим $a + wbx - asbx = a(1 - sbx) + wbx = u$. Отсюда $a(1 - sbx)u^{-1} + wbxu^{-1} = 1$, т.е. $as + wbt = 1$ для некоторых $s, t \in R$ и обратимого элемента $w \in R$, а значит R — область Казимирского. Предложение доказано. $\square$

Заметим, что область Казимирского также является 2-простой. Как следствие теоремы 1 получим следующий результат.

Теорема 2. *Простая область Безу стабильного ранга 1 является областью элементарных делителей тогда и только тогда, когда она есть областью Казимирского.*

Хенриксен [10] доказал, что над единично-регулярным кольцом любая матрица эквивалентна диагональной. Выясним, когда простое единично-регулярное кольцо является кольцом элементарных делителей.

Теорема 3. *2-простое единично-регулярное кольцо является кольцом элементарных делителей.*

Доказательство. Так как над единично-регулярным кольцом любая матрица эквивалентна диагональной [11], то в силу [1] для доказательства теоремы достаточно показать, что матрица $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, где $a, b \in R$ обладает канонически диагональной редукцией. Согласно [11] для элементов a и b существуют обратимые элементы $u, v \in R$ и идемпотенты $e, f \in R$ такие, что $e = au, f = bv$. Тогда $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}$. Понятно, что $\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \in GL_2(R)$. Поэтому с точностью до эквивалентности матриц можем считать, что наша матрица имеет вид $\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}$, где $e^2 = e$ и $f^2 = f$.

Случай, когда $e = 0$ или $f = 0$, тривиальный. Рассмотрим сначала случай, когда $ef = fe = 0$ и покажем, что $eR + fR = (e + f)R$ и $Re + Rf = R(e + f)$. Действительно $e = (e + f)e$, $f = (e + f)f$, $e = e(e + f)$, $f = f(e + f)$. Отсюда $eR \subseteq (e + f)R$, $fR \subseteq (e + f)R$, и аналогично $Re \subseteq R(e + f)$, $Rf \subseteq R(e + f)$. Следовательно $eR + fR \subseteq (e + f)R$ и $Re + Rf \subseteq R(e + f)$. Так как $e + f \in eR + fR$, $e + f \in Re + Rf$, то $(e + f)R \subseteq eR + fR$ и $R(e + f) \subseteq Re + Rf$. Откуда $Re + Rf = R(e + f)$ и $eR + fR \subseteq (e + f)R$. Тогда

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -f & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -f \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e + f & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом матрица $\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}$ элементарными преобразованиями строк и столбцов приводится к виду $\begin{pmatrix} e + f & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Если же $ef \neq 0$ или $fe \neq 0$, то тогда в R существуют элементы $x, y \in R$ такие, что $ex + yf = u$ — обратимый элемент R . Действительно, если $ef \neq 0$, то $RefR = R$. Поскольку R является 2-простым кольцом, то найдутся $u_1, u_2, v_1, v_2 \in R$ такие, что $u_1efv_1 + u_2efv_2 = 1$. Единично-регулярное кольцо — это кольцо стабильного ранга 1 [11], поэтому из равенства $u_1eR + u_2efR = R$ получим, что $u_1ex + u_2ef$ — обратимый элемент R для некоторого элемента $x \in R$. Отсюда $Re x + Rf = R$, и аналогично $ex + fy$ — обратимый элемент R . Если $ef = 0$, но $fe \neq 0$, то приводим аналогичные рассуждения для элемента fe .

Пусть $ex + yf = u$ — обратимый элемент R . Тогда

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & f \\ e & ex + yf \end{pmatrix}.$$

Так как $ex + yf = u$ — обратимый элемент R , то матрица $\begin{pmatrix} 0 & f \\ e & u \end{pmatrix}$, а значит и матрица $\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}$ эквивалентна матрице $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix}$ для некоторого элемента $\Delta \in R$. Таким образом мы доказали, что R является кольцом элементарных делителей. Теорема доказана. $\square$

Достаточные условия, при которых простое единично-регулярное кольцо является кольцом элементарных делителей, отображены в [12].

ЛИТЕРАТУРА

1. Kaplansky I. *Elementary divisors and modules* // Trans. Amer. Math. Soc. — 1949. — V.66. — P.464–491.
2. Teichmüller O. Der Elementarteilsatz für nichtkommutative Ringe // Abh. Preuss. Acad. Wiss. Phys.-Math. Kl. — 1937. — S.169–177.
3. Cohn P.M. *Right principal Bezout domains* // J. London Math. Soc. — 1987. — V.35, № 2. — P.251–162.
4. Дубровин Н.И. *О кольцах с элементарными делителями* // Изв. вуз. Мат. — 1986, №11. — С.14–20.
5. Забавский Б.В., Комарницкий Н.Я. *О дистрибутивных кольцах элементарных делителей* // Укр. мат. ж. — 1990. — Т. 42, №7. — С.1002–1004.
6. Туганбаев А.А. *Кольца элементарных делителей и дистрибутивные кольца* // Успехи мат. наук. — 1991. — Т. 46, №6. — С.219–220.
7. Vaserstein L.N. *Bass's first stable range condition* // J. of Pure and Appl. Alg. — 1984. — V.34. — P.319–320.
8. Olszewski J. *On ideals of products of rings* // Demonstrativ mathematica. — 1994. — V.1. — P.1–7.
9. Казимирский П.С. *Теорема об элементарных делителях для дифференциальных операторов* // Укр. мат. ж. — 1964. — Т.26, №3. — С.1271–1278.
10. Zabavsky B. *Diagonalization of matrices over ring with finite stable rank* // Вісник Львів. ун-ту, сер. мех.-мат. — 2003. — Вип.61. — С.206–210.
11. Henriksen M. *On a class of regular rings that are elementary divisor rings* // Arch. Math. — 1973. — V.24. — P.133–141.
12. Забавский Б.В. *О простых единично-регулярных кольцах элементарных делителей* // Мат. студії. Праці Львів. мат. т-ва. — 1993. — Вип.2. — С.43–45.

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
механико-математический факультет,
ул. Университетская 1, 79602, г. Львов

Поступило 15.04.2004