УДК 512.64

В. М. Петричкович

ПРО ПОДІЛЬНІСТЬ ТА ФАКТОРИЗАЦІЮ МАТРИЦЬ

V. M. Petrychkovych. *On divisibility and factorization of matrices*, Matematychni Studii, **22** (2004) 115–120.

The conditions under which the divisibility of the product of matrices by a matrix over the adequate rings yields the divisibility of factor matrices by this matrix are established. The conditions of parallelity of factorizations of matrix polynomials are proposed. We also present a method for constructing such factorizations.

В. М. Петричкович. *О делимости и факторизации матриц* // Математичні Студії. – 2004. – Т.22, №2. – С.115–120.

Установлены условия, при которых из делимости произведения матриц на матрицу над адекватным кольцом, следует делимость матриц-сомножителей на эту матрицу. Предложены также условия параллельности факторизаций матричных многочленов, их существования и метод построения.

Нехай R — адекватне кільце [1]. Через $M(n,R)$ позначатимемо кільце $n\times n$ матриць над R, через D^A — канонічну діагональну форму (форму Сміта) матриці $A\in M(n,R)$, тобто $D^A = UAV = \operatorname{diag}(\mu_1^A,\dots,\mu_r^A,0,\dots,0)$, $\mu_r^A \neq 0$, $\mu_1^A|\mu_2^A|\cdots|\mu_r^A$ для деяких матриць $U,V\in GL(n,R)$. Набори матриць $(A_1,...,A_k)$ і $(B_1,...,B_k)$, де $A_i,B_i\in M(n,R)$, $i\in\{1,\dots,k\}$ називаються узагальнено еквівалентними, якщо $A_i = UB_iV_i$ для деяких матриць $U,V_i\in GL(n,R)$, $i\in\{1,...,k\}$. Набір матриць $(A_1,...,A_k)$ називаємо діагоналізовним, якщо він є узагальнено еквівалентним до набору діагональних матриць $(D^{A_1},\dots,D^{A_k})$. Діагональна матриця $\Phi=\operatorname{diag}(\varphi_1,\dots,\varphi_s,0,\dots,0)$ називається d-матрицею [2], якщо $\varphi_1|\varphi_2\dots|\varphi_s$.

Нехай матриця A розкладена на множники

$$A = B_1\cdots B_q. \tag{1}$$

Тоді цій факторизації матриці A відповідає така факторизація її канонічної діагональної форми

$$D^A = \Phi_1\dots\Phi_q, \tag{2}$$

що кожна матриця $\Psi_p=\Phi_1\dots\Phi_p, p\in\{1,\dots,q-1\}$ є d-матрицею. Якщо кожна матриця B_i еквівалентна до Φ_i, $i\in\{1,\dots,q\}$, то факторизація (1) матриці A називається паралельною до факторизації (2) її канонічної діагональної форми D^A або просто паралельною факторизацією. Матричний многочлен $A(x)=\sum_{i=0}^m A_ix^i, A_i\in M(n,P), i\in$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 15A33, 15A21, 15A23.

$\{1, \ldots, m\}$ називається регулярним, якщо A_m — неособлива матриця, і унітальним, якщо $A_m = I$ — одинична матриця.

Задачу про розкладність матричного многочлена на унітальні множники розв'язано лише в окремих випадках. Так в [2] встановлено критерій зображення многочлена у вигляді добутку множників, характеристичні многочлени яких попарно взаємно прості або мають деякий спільний дільник, в [3] — коли канонічна діагональна форма многочленної матриці дорівнює добутку канонічних діагональних форм співмножників у випадку коли P — алгебраїчно замкнене поле характеристики нуль.

У цій статті наведені умови розкладності матричного многочлена над полем у добуток довільного числа унітальних множників, паралельно до розкладу його канонічної діагональної форми, які охоплюють ширші від відомих наведених вище типів факторизацій. При цьому встановлено зв'язок між подільністю добутку матриць та матриць-співмножників на матрицю та запропоновано спосіб регуляризації матричних многочленів. Результати цієї статті узагальнюють результати статті [4].

Лема 1. *Нехай $A, B, C \in M(n, R)$ і пара матриць (A, B) — діагоналізовна. Тоді трійка матриць (A, B, C) узагальнено еквівалентна до трійки (D^A, D^B, T^C), де T^C — нижня трикутна матриця з головною діагоналлю D^C.*

Доведення. Трійка матриць (A, B, C) узагальнено еквівалентна до трійки (D^A, D^B, C_1), тобто $UAV_1 = D^A$, $UBV_2 = D^B$, $UC = C_1$. На основі леми 1 із [5] для матриці C_1 існують верхня унітрикутна матриця U_1 і оборотна матриця V_3 такі, що $U_1C_1V_3 = T^C$, де T^C — нижня трикутна матриця з головною діагоналлю D^C. Тоді $U_1D^AV_4 = D^A$, $U_1D^BV_5 = D^B$ для деяких матриць $V_4, V_5 \in GL(n, R)$. Лему доведено. ☐

Відзначимо, що критерій діагоналізовності пари матриць наведено в [5].

Нехай $B, C, H \in M(n, R)$ і матриця H є лівим дільником добутку BC матриць B і C. За яких умов матриця H є лівим дільником матриці B? Необхідною умовою для цього є те, що D^H є дільником D^B.

Лема 2. *Нехай B, C, H — неособливі матриці із $M(n, R)$, матриця H є лівим дільником добутку матриць $BC = A$ і D^H — дільник D^B, тобто*

$$A = BC = HF \tag{3}$$

і тоді відповідно

$$D^A = D^B\Psi = D^H\Phi, \tag{4}$$

де $\Psi = \operatorname{diag}(\psi_1, \ldots, \psi_n)$, $\Phi = \operatorname{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$. Якщо виконується принаймні одна з умов: а) матриця C еквівалентна до матриці Ψ і

$$\left(\frac{\mu_n^H}{\mu_i^H}, \psi_i\right) = 1,\ i \in \{1, \ldots, n-1\}; \tag{5}$$

б) матриця F еквівалентна до Φ і $D^{BC} = D^BD^C$, — то матриця H є лівим дільником B.

Доведення. а) На основі леми 1 і теореми 2 з [6], яка справедлива і для матриць над адекватним кільцем R, трійка матриць (A, B, H) узагальнено еквівалентна до трійки (D^A, D^B, T^H), тобто $UAV_1 = D^A$, $UBV_2 = D^B$, $UHV_3 = T^H$ для деяких матриць $U, V_1, V_2, V_3 \in GL(n, R)$. Тоді з рівності (3) одержуємо рівність

$$D^A = D^B \Psi = T^H F_1, \tag{6}$$

де F_1 — нижня трикутна матриця з головною діагоналлю Φ. З (6), за умови (5), одержуємо, що Ψ є правим дільником F_1, тобто $F_1 = F_2 \Psi$. Тому із (6) матимемо, що $D^B = T^H F_2$ або, враховуючи (4), $B = HG$, де $G = V_3 F_2 V_2^{-1}$.

б) З рівності $D^{BC} = D^B D^C$ маємо, що матриця C з (3) еквівалентна до Ψ з (4). Тому, міркуючи як і в попередньому випадку, з рівності (3) одержуємо рівність (6), де $\Psi = D^C$. Нижня трикутна матриця F_1 з (6) еквівалентна до діагональної матриці Φ. З результатів статті [7] випливає, що існують нижні унітрикутні матриці S і W, для яких $SF_1W = \Phi$. Тоді з рівності (6) матимемо $D^B \Psi W = T^H S^{-1} \Phi$ або $D^B W_1 \Psi = T^H S^{-1} \Phi$, де W_1 — нижня унітрикутна матриця. З останньої рівності, після скорочення на Ψ, легко одержуємо, що H є лівим дільником B. Лему доведено. □

Теорема 1. *Нехай канонічна діагональна форма D^A неособливої матриці $A \in M(n, R)$ зображається у вигляді добутку (2), де $\Phi_i = \operatorname{diag}(\varphi_{i1}, \dots, \varphi_{in})$ і кожна матриця $\Psi_p = \Phi_1 \dots \Phi_p$, $p \in \{1, \dots, q-1\}$ є d-матрицею. Якщо*

$$\left(\frac{\varphi_{1k} \cdots \varphi_{pk}}{\varphi_{1r} \cdots \varphi_{pr}},\ (\varphi_{p+1,k}, \varphi_{p+1,r}) \right) = 1$$

для всіх $p \in \{1, \dots, q-1\}$, $k, r \in \{1, \dots, n\}$, $k > r$, то кожна факторизація (1) матриці A є паралельною до факторизації (2) її канонічної діагональної форми D^A.

Доведення. Для $q = 2$ теорему доведено в [8] у випадку, коли R — комутативна область головних ідеалів. З огляду на результати статті [5], теорема з [8] справедлива і для матриць над адекватними кільцями. Завершується доведення застосуванням індукції за q. □

Кажуть, що матричний многочлен $A(x)$ регуляризується справа, якщо існує матриця $V(x) \in GL(n, P[x])$ така, що $A(x)V(x) = B(x)$ — регулярний, зокрема унітальний матричний многочлен. Відомі різні способи регуляризації матричних многочленів залежно від їхнього вигляду [9,10] та основного поля [2, 11, 12]. Вкажемо ще один (на наш погляд, простий) спосіб регуляризації матричних многочленів.

Многочленні матриці $A(x), B(x) \in M(n, P[x])$ називаються напівскалярно еквівалентними, якщо $B(x) = UA(x)V(x)$ для деяких матриць $U \in GL(n, P)$ і $V(x) \in GL(n, P[x])$. Матриця $A(x) \in M(n, P_n[x])$, $\det A(x) \neq 0$ у випадку нескінченого поля P напівскалярними еквівалентними перетвореннями зводиться до спеціального трикутного вигляду $T^A(x)$, тобто

$$T^A(x) = UA(x)V(x) = \operatorname{triang}(\mu_1^A(x), \dots, \mu_n^A(x)) = \left\| \begin{matrix} \mu_1^A(x) & 0 & \dots & 0 \\ a_{21}(x) & \mu_2^A(x) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & \mu_n^A(x) \end{matrix} \right\|, \tag{7}$$

де $\deg a_{ij} < \deg \mu_i^A$, якщо $\deg \mu_i^A > 0$ і $a_{ij}(x) \equiv 0$, якщо $\deg \mu_i^A = 0$, $i, j \in \{1, \dots n\}$, $i > j$. У випадку, коли P — скінченне поле, у статті [10] наведені умови, за яких таке зведення матриці $A(x)$ можливе. Очевидно, якщо трикутна форма $T^A(x)$ матриці $A(x)$ регуляризується справа, то і $A(x)$ регуляризується і навпаки.

Нехай $T(x) = \operatorname{triang}(\mu_1(x), \dots, \mu_n(x))$ — трикутна матриця вигляду (7). Покладемо $\deg \mu_i = m_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Оскільки $\mu_i | \mu_{i+1}$, $i \in \{1, \dots, n-1\}$, то $0 \leqslant m_1 \leqslant m_2 \leqslant \dots \leqslant m_n = l$. Запишемо $T(x)$ у вигляді матричного многочлена $T(x) = T_0 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=m_{i-1}+1}^{m_i} T_j x^j$, при цьому покладаємо $m_0 = 0$. Зауважимо, що деякі суми можуть дорівнювати нулю, тобто при $m_k = m_{k-1}$, $\sum_{j=m_{k-1}+1}^{m_k} T_j x^j = 0$. Тепер неважко побачити, що у кожній матриці $T_{m_k+1}, T_{m_k+2}, \dots, T_{m_{k+1}}$, $k \in \{1, \dots, n-1\}$ перші k рядків нульові. Надалі через $T_r^{(n-k)}$ позначатимемо $(n-k) \times n$-матрицю, одержану із матриці T_r, викресленням її k перших рядків.

Нехай $\sum_{i=1}^{n} m_i = sn$. Запишемо матрицю M_T, що відповідає многочлену $T(x)$: $M_T = \| H_n \ H_{n-1} \dots H_1 \|^{t_B}$, де t_B — символ блочного транспонування і

$$H_k = \begin{Vmatrix} T_{m_k}^{(n-(k-1))} & T_{m_k+1}^{(n-(k-1))} & \dots & T_{m_k+(s-1)}^{(n-(k-1))} \\ T_{m_k-1}^{(n-(k-1))} & T_{m_k}^{(n-(k-1))} & \dots & T_{m_k+(s-2)}^{(n-(k-1))} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_{m_{k-1}+1}^{(n-(k-1))} & T_{m_{k-1}+2}^{(n-(k-1))} & \dots & T_{m_{k-1}+s}^{(n-(k-1))} \end{Vmatrix},$$

$k \in \{1, \dots, n\}$. При цьому покладаємо $m_0 = 0$ і при $m_j + i > m_n$, $T_{m_j+i}^{(n-l)} = 0$ — нульова матриця розмірів $(n-l) \times n$. При $m_k = 0$, H_k — порожня матриця, тобто матриця розміру $0 \times n$. Матриця H_k має розміри $(m_k - m_{k-1})(n-(k-1)) \times sn$, а тому M_T — квадратна матриця порядку sn.

Нехай в трикутній матриці $T(x) = \operatorname{triang}(\mu_1(x), \dots, \mu_n(x))$, $\mu_1(x) = \mu_2(x) = \dots = \mu_p(x) = 1$, $0 \le p < n$ і $T(x)$ — регуляризується, тобто $T(x)V(x) = L(x)$ — унітальний матричний многочлен. Тоді, як випливає з [9], $\deg V \le s$, тобто $V(x) = \sum_{i=0}^{s} V_i x^i$, причому $V_s = \operatorname{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{p}, 0, \dots, 0)$.

Лема 3. *Матричний многочлен $T(x)$ трикутного вигляду (7) регуляризується справа, тобто*

$$T(x)V(x) = L(x) = Ix^s + L_{s-1}x^{s-1} + \dots + L_1 x + L_0 \tag{8}$$

тоді і тільки тоді, коли $\sum_{i=1}^{n} \deg \mu_i = sn$ і відповідна йому матриця M_T неособлива. При цьому

$$L_k = \sum_{i=0}^{k} T_i V_{k-i}, \quad k \in \{0, 1, \dots, s-1\}, \tag{9}$$

де $\| V_{s-1} \ V_{s-2} \ \dots \ V_0 \|^{t_B} = -M_T^{-1} \| T_{l-1}V_s \dots T_1 V_s \ \ T_0 V_s - I \|^{t_B}$.

Доведення. Доведення першої частини леми одержується з результатів статті [9] та леми 1 з [10]. Формула (9) випливає із співвідношення (8) і розв'язності рівняння

$$M_T \| V_{s-1} \ V_{s-2} \ \dots \ V_0 \|^{t_B} = \| T_{l-1}V_s \dots T_1 V_s \ \ T_0 V_s - I \|^{t_B}.$$

□

Нехай $A(x) = \sum_{i=0}^{m} A_i x^i$— матричний многочлен над полем P, тобто $A_i \in P_n$. Нехай далі його канонічна діагональна форма $D^A(x) = \operatorname{diag}(\mu_1(x), \dots, \mu_n(x))$ зображена у вигляді добутку

$$D^A(x) = \prod_{i=1}^{q} \Phi_i(x), \tag{10}$$

де $\Phi_i(x) = \mathrm{diag}(\varphi_{i1}(x), \dots, \varphi_{in}(x))$, причому $\deg\det\Phi_i = s_i n$, $i \in \{1, \dots, q-1\}$ і кожна матриця $\Psi_p(x) = \prod_{i=1}^{p} \Phi_i(x) = \mathrm{diag}(\psi_{p1}, \dots, \psi_{pn}(x))$, $\quad p \in \{1, \dots, q-1\}$ є d – матрицею. Через $\Lambda_{q-p}(x)$ позначимо діагональну матрицю $\Lambda_{q-p}(x) = \prod_{i=1}^{q-p} \Phi_{p+i}(x) = \mathrm{diag}(\lambda_{q-p,1}(x), \dots, \lambda_{q-p,n}(x))$, $p \in \{1, \dots, q-1\}$, а через $K_p(x)$, подібно, як у [13] матрицю

$$K_p(x) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\mu_2(x)}{\mu_1(x)} k_{21}(x) & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\mu_n(x)}{\mu_1(x)} k_{n1}(x) & \frac{\mu_n(x)}{\mu_2(x)} k_{n2}(x) & \dots & 1 \end{Vmatrix},$$

де $k_{ij} = k_{ij}^{(0)} + k_{ij}^{(1)} x + \dots + k_{ij}^{(r_{ij})} x^{r_{ij}}$, причому $k_{ij} \equiv 0$, якщо $\psi_{pi} | \psi_{pj}$, і $r_{ij} = \deg\psi_{pi} - \deg\psi_{pj} - 1$, якщо ψ_{pi} не ділить ψ_{pi}, $i > j$, $k_{ij}^{(r_{ij})}$ — незалежні змінні, тобто $K_p(x)$ — матриця над кільцем $P(k)[x]$, де $P(k)$ — розширення поля P, одержане приєднанням $k_{ij}^{(r_{ij})}$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i > j$, до поля P.

Нехай далі $T^A(x)$— трикутна форма вигляду (7) матричного многочлена $A(x)$, яку запишемо так $T^A(x) = H(x)\,\mathrm{diag}(\mu_1(x), \dots, \mu_n(x))$, $H(x) \in GL(n, P[x])$.

Тепер розглянемо добуток матриць $H(x)K_p(x)\Psi_p(x)$. Правими елементарними перетвореннями зведемо цю матрицю до вигляду (7), тобто для деякої матриці $S(x) \in GL(n, P(k)[x])$ $\; T_p(x) = H(x)K(x)\Phi_p(x)S(x) = \mathrm{triang}(\psi_{p1}, \dots, \psi_{pn}(x))$.

Теорема 2. *Нехай канонічна діагональна форма $D^A(x)$ матричного многочлена $A(x)$, $\det A(x) \neq 0$ зображена у вигляді добутку (10) і*

$$\left(\lambda_{q-p,i}(x), \frac{\psi_{p-1,n}(x)}{\psi_{p-1,i}(x)}\right) = 1, \quad \text{або} \quad \left(\lambda_{q-p,i}(x), \frac{\psi_{pn}(x)}{\psi_{pi}(x)}\right) = 1,$$

$i \in \{1, \dots, n-1\}$, $p \in \{2, \dots, q-1\}$. *Тоді матричний многочлен $A(x)$ зображається у вигляді добутку*

$$A(x) = \prod_{i=1}^{q} B_i(x), \tag{11}$$

де $B_i(x)$, $i \in \{1, \dots, q-1\}$ — унітальні многочлени степенів s_i і матриця $C_p(x) = \prod_{i=1}^{p} B_i(x)$ еквівалентна до $\Phi_p(x)$, а $F_{q-p}(x) = \prod_{i=1}^{q-p} B_{p+i}(x)$ еквівалентна до $\Lambda_{q-p}(x)$, $p \in \{1, \dots, q-1\}$ у тому і тільки у тому випадку, коли кожний матричний многочлен $T_p(x)$, $p \in \{1, \dots, q-1\}$ регуляризується справа над кільцем $P(k)[x]$, тобто відповідні їм матриці M_{T_p}, $p \in \{1, \dots, q-1\}$ неособливі.

Доведення. Доведення теореми проводимо за індукцією. При $q = 2$ теорема випливає з теореми 2 [14] та леми 3. Припустимо справедливість твердження теореми для $q - 1$ і доведемо, що звідси випливає справедливість твердження.

Нехай матриці $T_{q-2}(x)$ і $T_{q-1}(x)$ регуляризуються справа. Це означає, що $A(x) = C_{q-2}(x)F_2(x)$, і $A(x) = C_{q-1}(x)F_1(x)$, де $C_{q-2}(x)$ і $C_{q-1}(x)$ — унітальні многочлени і, очевидно, $D^{C_{q-2}} | D^{C_{q-1}}$. Тоді за лемою 2 матимемо, що $C_{q-1}(x) = C_{q-2}(x)B_{q-1}(x)$. Згідно з припущенням індукції $C_{q-2}(x) = B_1(x) \dots B_{q-2}(x)$, тобто $A(x) = B_1(x) \dots B_{q-2}(x)$ $B_{q-1}(x)F_1(x)$, $B_i(x)$, $(i \in \{1, \dots, q-1\})$ — унітальні многочлени. Теорему доведено. $\square$

Унітальні множники $B_i(x)$ в розкладі (11) матричного многочлена $A(x)$ знаходяться за формулами (9). Надаючи змінним $k_{ij}^{(r_{ij})}$ допустимих значень з поля P, одержимо розклади вигляду (12) на унітальні множники матричного многочлена $A(x)$.

Зауважимо, що якщо в розкладі (10) канонічної діагональної форми D^A кожна матриця Φ_i, $i \in \{1, \ldots q\}$ є d-матрицею, то $K_p(x) = I$ — одинична матриця для всіх $p \in \{1, \ldots , q-1\}$. Звідси як наслідок ми одержуємо критерій розкладності на унітальні множники матричного многочлена, канонічна діагональна форма якого дорівнює добутку канонічних діагональних форм множників [3], причому така факторизація матричного многочлена, паралельна до даної факторизації його канонічної діагональної форми, — єдина.

ЛІТЕРАТУРА

1. Helmer O. *The elementary divisor theorem for certain rings without chain conditions* // Bull. Amer. Math. Soc.– 1943.– V. 49.– P. 225–236.
2. Казімірський П. С. Розклад матричних многочленів на множники.– К.: Наук. думка, 1981.– 224 с.
3. Зелиско В.Р. *О разложении матричного многочлена в произведение линейных множителей* // Укр. мат. журн.– 1980.– Т. 32, №6.– С. 807–810.
4. Петричкович В.М. *Про розкладність матричних многочленів в добуток унітальних множників* // Алгебра і топологія.– Львів: ЛДУ, 1996.– С.112–124.
5. Petrychkovych V. *Standard form of pairs of matrices with respect to generalized equivalence* // Вісник Львів. ун-ту., сер. мех-мат.– 2003.– Вип.61.– С. 148-155.
6. Петричкович В. М. *Звідність пар матриць узагальнено еквівалентними перетвореннями до трикутних та діагональних форм і їх застосування* // Мат. методи і фіз.- мех. поля.- 2000.– Т. 43, №2.– С. 15–22.
7. Feinberg R.B. *Equivalence of partioned matrices* // J. Res. bur. Stand. Sect.– 1976.– V.80, N1.– P. 89–97.
8. Петричкович В. М. *Про паралельні факторизації матриць над кільцями головних ідеалів* // Мат. методи і фіз.- мех. поля.– 1997.– V. 40, N 4.– С. 96–100.
9. Bell J.H. *Left associates of monic matrices with an application to unilateral matrices equation* // Amer. Journ. Math. – 1949.– V. 71.– P. 249–257.
10. Петричкович В. М. *Полускалярная эквивалентность и факторизация многочленных матриц* // Укр. мат. журн.– 1990.– Т. 42, №5.– С. 644–649.
11. Петричкович В. М., Прокип В.М. *О факторизации многочленных матриц над произвольным полем* // Укр. мат. журн.– 1986.– Т. 38, №4.– С. 478–483.
12. Прокип В.М. *О делимости и односторонней эквивалентности многочленных матриц* // Укр. мат. журн.– 1990.– Т. 42, №9.– С. 1213–1219.
13. Зелиско В.Р. *О строении одного класса обратимых матриц* // Мат. методы и физ.-мех. поля.– 1980.– Т. 12.– С. 14–21.
14. Петричкович В.М. *Паралельні факторизації многочленних матриць* // Укр. мат. журн.– 1992.– Т. 44, №9.– С. 1228–1233.

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С.Підстригача НАН України, Львів
vpetrych@iapmm.lviv.ua

Надійшло 16.09.2004