УДК 517.5

Р. В. Хаць

ПРО АСИМПТОТИЧНЕ ПОВОДЖЕННЯ КАНОНІЧНОГО ДОБУТКУ ЦІЛОГО ПОРЯДКУ

R. V. Khats'. *On asymptotic behaviour of canonical product of entire order*, Matematychni Studii, **22** (2004) 105–110.

For a canonical product L of entire order $\rho \in (0; +\infty)$ $\rho \in (0; +\infty)$ which equals the genus of the product we prove that if the counting function of the zeros satisfies $n(t) = \Delta t^\rho + o(t^{\rho_1})$ $(t \to +\infty)$, $\rho_1 \in (0, \rho)$, then $\ln|L(z)| = \frac{1}{\rho}\operatorname{Re}\left\{z^\rho \sum_{\lambda_n \le r} \lambda_n^{-\rho}\right\} - \Delta |z|^\rho \left(\frac{1}{\rho}\cos\rho\varphi + (\varphi - \pi)\sin\rho\varphi\right) + o(|z|^{\rho_2})$ $(|z| \to +\infty)$, $\rho_2 \in (0; \rho)$.

Р. В. Хаць. *Об асимптотическом поведении канонического произведения целого порядка* // Математичні Студії. – 2004. – Т.22, №1. – С.105–110.

Для канонического произведения L целого порядка $\rho \in (0; +\infty)$, равного роду произведения, доказано, что если для считающей функции последовательности нулей выполняется условие $n(t) = \Delta t^\rho + o(t^{\rho_1})$ $(t \to +\infty)$, $\rho_1 \in (0, \rho)$, то $\ln|L(z)| = \frac{1}{\rho}\operatorname{Re}\left\{z^\rho \sum_{\lambda_n \le r} \lambda_n^{-\rho}\right\} - \Delta |z|^\rho \left(\frac{1}{\rho}\cos\rho\varphi + (\varphi - \pi)\sin\rho\varphi\right) + o(|z|^{\rho_2})$ $(|z| \to +\infty)$, $\rho_2 \in (0; \rho)$.

Нехай $\Delta \in [0; +\infty)$, (λ_n) — послідовність додатних чисел таких, що $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_n \to +\infty$ $(n \to +\infty)$ і $n(t) = \sum_{\lambda_n \le t} 1$. Відомо [1, 2], що якщо $\rho \in (0; +\infty)$ — ціле число і послідовність додатних чисел (λ_n) задовольняє умову $n(t) = \Delta t^\rho + o(t^\rho)$ $(t \to +\infty)$, то для канонічного добутку

$$L(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{\lambda_n}; p\right), \quad E(u;p) = (1-u)\exp\left(u + u^2/2 + \cdots + u^p/p\right) \tag{1}$$

порядку ρ зовні деяких виняткових множин виконується співвідношення

$$\ln|L(z)| = \Lambda(z) + o(|z|^\rho) \quad (z = re^{i\varphi} \to \infty),$$

де

$$\Lambda(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\operatorname{Re}\Big\{z^\rho \sum\limits_{\lambda_n \le r} \lambda_n^{-\rho}\Big\} - \Delta|z|^\rho\left(\dfrac{1}{\rho}\cos\rho\varphi + (\varphi-\pi)\sin\rho\varphi\right), & \rho = p, \\ 0, \quad \rho = p+1. \end{cases} \tag{2}$$

В ряді праць [3–7] вивчались тонші асимптотичні оцінки для цілих функцій. Метою даної статті є доведення наступного твердження, яке доповнює результат, отриманий для нецілого порядку в [5].

2000 *Mathematics Subject Classification:* 30D15.

Теорема 1. *Нехай $\rho \in (0;+\infty)$ — ціле число, і при деякому $\rho_1 \in (0;\rho)$ неспадна до $+\infty$ послідовність додатних чисел (λ_n) задовольняє умову*

$$d(t) \overset{\text{def}}{=} n(t) - \Delta t^{\rho} = o(t^{\rho_1}) \quad (t \to +\infty). \tag{3}$$

Тоді існують $\rho_2 \in (0;\rho)$ і система U кругів в $\mathbb{C}$ із скінченною сумою радіусів такі, що при $U \not\ni z = re^{i\varphi} \to \infty$ і $\varphi \in [0;2\pi)$ для цілої функції (1) виконується

$$\ln|L(z)| = \Lambda(z) + o(|z|^{\rho_2}),$$

де $\Lambda(z)$ визначена формулою (2).

Через $c_0, c_1, c_2, \ldots$ позначаємо деякі додатні сталі. Для доведення теореми 1 потрібні наступні допоміжні твердження.

Лема 1. *Нехай виконуються умови теореми 1 і*

$$L_r(z) = \prod_{\lambda_n \le r} E\left(\frac{z}{\lambda_n};\rho-1\right) \prod_{\lambda_n > r} E\left(\frac{z}{\lambda_n};\rho\right).$$

Тоді

$$\ln|L_r(z)| = -\Delta|z|^{\rho}\left(\frac{1}{\rho}\cos\rho\varphi + (\varphi-\pi)\sin\rho\varphi\right) + \eta(z), \tag{4}$$

при цьому $\eta(z) = o(|z|^{\rho_3})$, $E_\varepsilon \not\ni z \to \infty$ для будь-якого $\varepsilon \in (0;(\rho-\rho_1)/2)$ і для будь-якого $\rho_3 \in (\rho_1+2\varepsilon;\rho)$, де $E_\varepsilon = \{z : |\arg z| < 1/|z|^{\varepsilon}\}$.

Доведення. Нехай $z = re^{i\varphi}$, $\varphi \in (0;2\pi)$. Тоді, за умови (3), при $r \to +\infty$ отримуємо ([1, с. 91], [3, с. 106])

$$\ln|L_r(re^{i\varphi})| = -\frac{\Delta}{\rho}r^{\rho}\cos\rho\varphi + (\pi-\varphi)\Delta r^{\rho}\sin\rho\varphi + I_1 + I_2 + o(r^{\rho_1}), \tag{5}$$

де

$$I_1 = r^{\rho}\int_0^r d(t)\frac{r\cos(\rho-1)\varphi - t\cos\rho\varphi}{t^{\rho}(t^2-2rt\cos\varphi+r^2)}\,dt, \quad I_2 = r^{\rho+1}\int_r^{+\infty} d(t)\frac{r\cos\rho\varphi - t\cos(\rho+1)\varphi}{t^{\rho+1}(t^2-2rt\cos\varphi+r^2)}\,dt,$$

при цьому $d(t) = o(t^{\rho_1})$ $(t \to +\infty)$ і $|d(t)| \le c_0 t^{\rho_1}$ $(t \in [0;+\infty))$. Подібно, як у доведенні леми 1 з [5, с. 142], для будь-якого $\rho_3 \in (\rho_1+2\varepsilon;\rho)$, матимемо

$$|I_1+I_2| \le \frac{c_0 r^{\rho_1}}{\sin^2\frac{\varphi}{2}}\left(\int_0^1 \frac{u^{\rho_1-\rho}}{u+1}\,du + \int_1^{+\infty}\frac{u^{\rho_1-\rho-1}}{u+1}\,du\right) \le c_1 r^{\rho_3} \quad (r \to +\infty).$$

Звідси і з (5) випливає (4). $\square$

Лема 2. *Нехай послідовність додатних чисел (λ_n) задовольняє умову (3), $0 < \rho_1 < \rho_3 < \rho$, $\beta > \rho - \rho_3$, $R_k = k^{1/\beta}$ і*

$$\psi_k(z) = \prod_{R_{k-1} < \lambda_n \le R_{k+2}} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right) \quad (k \in \mathbb{N}). \tag{6}$$

Тоді для всіх $k \in \mathbb{N}$ і всіх $z \in \mathbb{C}$ виконується

$$\ln|\psi_k(z)| \le c_2 R_k^{\rho_3} \ln(1 + |z|/R_{k-1}), \tag{7}$$

і, крім цього, існує така система U виняткових кругів із скінченною сумою радіусів, що

$$(\exists c_2)\ (\forall k \in \mathbb{N})\ (\forall z \in \mathbb{C} \setminus U) : \ln|\psi_k(z)| \ge -c_2 R_k^{\rho_3}. \tag{8}$$

Доведення. Нерівність (8) доведено в лемі 4 з [5, с. 143, 144]. Доведемо (7). Оскільки в (6) $\lambda_n > R_{k-1}$, то $|1 - z/\lambda_n| \le 1 + |z|/R_{k-1}$. Тому для всіх $k \in \mathbb{N}$ і всіх $z \in \mathbb{C}$

$$\ln|\psi_k(z)| \le n_k \ln(1 + |z|/R_{k-1}),$$

де

$$n_k = n(R_{k+2}) - n(R_{k-1}) = \Delta(R_{k+2}^{\rho} - R_{k-1}^{\rho}) + o(R_k^{\rho_1}) =$$
$$= \frac{3\rho\Delta}{\beta}(1 + o(1))R_k^{\rho-\beta} + o(R_k^{\rho_1}) \quad (k \to +\infty).$$

З останньої нерівності випливає (7). □

Лема 3. *Нехай $\rho \in (0; +\infty)$ — ціле число, $\rho_1 \in (\rho - 1; \rho)$ і послідовність додатних чисел (λ_n) задовольняє умову (3). Тоді для цілої функції (1)*

$$(\forall \rho_3 \in (\rho_1; \rho))\ (\exists c_3)\ (\forall z \in \mathbb{C}) : \ln|L(z)| \le \Lambda(z) + c_3|z|^{\rho_3}, \tag{9}$$

і для кожного $\varepsilon \in (0; (\rho - \rho_1)/2)$ існує в $\mathbb{C}$ система U кругів із скінченною сумою радіусів така, що для кожного $\rho_3 \in (\rho_1 + 2\varepsilon; \rho)$ при $\widetilde{E}_\varepsilon \not\ni z \to \infty$ виконується

$$\ln|L(z)| \ge \Lambda(z) - c_3|z|^{\rho_3}, \tag{10}$$

де $\Lambda(z)$ задається формулою (2), $\widetilde{E}_\varepsilon = E_\varepsilon \cap U$, $\varphi = \arg z \in [0; 2\pi)$, і E_ε визначене у формулюванні леми 1.

Доведення. Спочатку доведемо, що для (1) виконується (9). Виберемо β, R_k так, як і в лемі 2. Згідно з лемою 1, нерівність (9) досить довести для $z \in E_\varepsilon$. Для кожного $z = re^{i\varphi} \in E_\varepsilon$ існує $k \in \mathbb{N}$, для якого $R_k \le |z| < R_{k+1}$. Нехай $p = \rho$. Подібно, як і в лемі 5 з [5, с. 144], маємо

$$\ln|L(z)| = \frac{1}{\rho}\,\mathrm{Re}\Big\{z^{\rho} \sum_{\lambda_n \le r} \lambda_n^{-\rho}\Big\} + I_3 + I_4 + \ln|\psi_k(z)| + I_5 + I_6 + I_7, \tag{11}$$

де

$$I_3 = -\frac{r^{\rho}}{\rho}\cos\rho\varphi \sum_{R_{k-1} < \lambda_n \le r} \lambda_n^{-\rho}, \quad I_4 = \sum_{R_{k-1} < \lambda_n \le R_{k+2}} \left(\sum_{\nu=1}^{\rho} \frac{r^{\nu}\cos\nu\varphi}{\nu\lambda_n^{\nu}}\right);$$

$$I_5 = \mathrm{Re}\left\{-z^{\rho}\int_0^{R_{k-1}} \frac{n(t)dt}{t^{\rho}(t-z)} - z^{\rho+1}\int_{R_{k+2}}^{+\infty} \frac{n(t)dt}{t^{\rho+1}(t-z)}\right\};$$

$$I_6 = \frac{1}{2}\left(n(R_{k-1})\ln\left(1 - \frac{2r}{R_{k-1}}\cos\varphi + \frac{r^2}{R_{k-1}^2}\right) - n(R_{k+2})\ln\left(1 - \frac{2r}{R_{k+2}}\cos\varphi + \frac{r^2}{R_{k+2}^2}\right)\right);$$

$$I_7 = n(R_{k-1})\sum_{\nu=1}^{\rho-1}\frac{r^\nu\cos\nu\varphi}{\nu R_{k-1}^\nu} - n(R_{k+2})\sum_{\nu=1}^{\rho}\frac{r^\nu\cos\nu\varphi}{\nu R_{k+2}^\nu}.$$

Далі, зауважимо, що $\dfrac{z^{\rho+1}}{t(t-z)} = z^\rho\left(\dfrac{1}{t-z}-\frac{1}{t}\right)$,

$$-\frac{z^{\rho+1}}{t^{\rho+1}(t-z)} = -\frac{z^\rho}{t^\rho(t-z)}+\frac{z^\rho}{t^{\rho+1}},\quad -\frac{z^{\rho+1}}{t^{\rho+1}(t-z)} = -\frac{z}{t(t-z)}+\frac{1}{t^{\rho+1}}\sum_{j=1}^{\rho}z^j t^{\rho-j},$$

і для $t\in\mathbb{R}$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z^m}{t-z}\right) = \frac{r^\rho(t\cos m\varphi - r\cos{(m-1)\varphi})}{t^2-2rt\cos\varphi+r^2}\quad (m\in\mathbb{Z}_+),$$

Внаслідок цього, враховуючи (3), отримуємо

$$I_5 = \operatorname{Re}\left\{-\lim_{\delta\to0+}\Delta z^\rho\left(\int_0^{r-\delta}\frac{dt}{t-z}+z\int_{r+\delta}^{+\infty}\frac{dt}{t(t-z)}\right) - z^\rho\int_0^{R_{k-1}}d(t)\frac{dt}{t^\rho(t-z)} - \right.$$
$$\left. -z^{\rho+1}\int_{R_{k+2}}^{+\infty}d(t)\frac{dt}{t^{\rho+1}(t-z)} + \lim_{\delta\to0+}\Delta z^\rho\left(\int_{R_{k-1}}^{r-\delta}\frac{dt}{t-z}+z\int_{r+\delta}^{R_{k+2}}\frac{dt}{t(t-z)}\right)\right\} =$$
$$= \Delta r^\rho\lim_{\delta\to0+}\left(\int_0^{1-\delta/r}\frac{\cos{(\rho-1)\varphi}-u\cos\rho\varphi}{u^2-2u\cos\varphi+1}\,du + \int_{1+\delta/r}^{+\infty}\frac{\cos\rho\varphi-u\cos{(\rho+1)\varphi}}{u(u^2-2u\cos\varphi+1)}\,du\right) +$$
$$+I_{5,1}+I_{5,2}+\lim_{\delta\to0+}(I_{5,3}+I_{5,4}) = \Delta r^\rho(\pi-\varphi)\sin\rho\varphi + I_{5,1}+I_{5,2}+\lim_{\delta\to0+}(I_{5,3}+I_{5,4}), \tag{12}$$

де $I_{5,1}=\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3+\sigma_4+\sigma_5$;

$$\sigma_1 = \int_0^{R_{k-1}}\frac{d(t)}{t^{\rho+1}}\sum_{j=1}^{\rho-1}t^{\rho-j}r^j\cos j\varphi\,dt,\quad \sigma_2 = \int_{R_{k+2}}^{2R_{k+2}}\frac{d(t)}{t^{\rho+1}}\sum_{j=1}^{\rho}t^{\rho-j}r^j\cos j\varphi\,dt,$$

$$\sigma_3+\sigma_4 = r\left(\int_0^{R_{k-1}}+\int_{R_{k+2}}^{2R_{k+2}}\right)d(t)\frac{r-t\cos\varphi}{t(t^2-2rt\cos\varphi+r^2)}\,dt,$$

$$\sigma_5 = r^{\rho+1}\int_{2R_{k+2}}^{+\infty}d(t)\frac{r\cos\rho\varphi-t\cos{(\rho+1)\varphi}}{t^{\rho+1}(t^2-2rt\cos\varphi+r^2)}\,dt;$$

$$I_{5,2} = \Delta r^\rho\quad v.p.\int_{R_{k-1}}^{R_{k+2}}\frac{t\cos\rho\varphi-r\cos{(\rho-1)\varphi}}{t^2-2rt\cos\varphi+r^2}\,dt;$$

$$I_{5,3} = -\Delta r^\rho\cos\rho\varphi\int_{r+\delta}^{R_{k+2}}\frac{dt}{t};\quad I_{5,4} = -\Delta r^\rho\int_{r-\delta}^{r+\delta}\frac{t\cos\rho\varphi-r\cos{(\rho-1)\varphi}}{t^2-2rt\cos\varphi+r^2}\,dt.$$

Позаяк $r \in [R_k; R_{k+1})$, то з (7) випливає, що для всіх $z \in \mathbb{C}$ при $k \to +\infty$

$$\ln|\psi_k(z)| \le o(R_k^{\rho_3}), \tag{13}$$

і, як в [5, с. 145, 146, 148], отримуємо

$$I_8 = |I_4 + \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_5| \le o(r_k^{\rho_3}) \quad (k \to +\infty). \tag{14}$$

Оскільки $|\varphi| < 1/r^\varepsilon$, то $\Delta r^\rho \sin\rho\varphi = o(R_k^{\rho_3})$ $(k \to +\infty)$, і подібно до [5, с. 147]

$$I_{5,2} = -\frac{\Delta}{2} r^\rho \cos\rho\varphi \ln \frac{R_{k-1}^2 - 2rR_{k-1}\cos\varphi + r^2}{R_{k+2}^2 - 2rR_{k+2}\cos\varphi + r^2} + o(R_k^{\rho_3}) \quad (k \to +\infty).$$

До того ж,

$$I_{5,4} = -\frac{\Delta}{2} r^\rho \cos\rho\varphi \ln \frac{(r+\delta)^2 - 2r(r+\delta)\cos\varphi + r^2}{(r-\delta)^2 - 2r(r-\delta)\cos\varphi + r^2} + o(R_k^{\rho_3}) \quad (k \to +\infty).$$

Крім того, $I_{5,3} = \Delta r^\rho \cos\rho\varphi \ln((r+\delta)/R_{k+2})$, і, за умови (3), маємо

$$I_3 = -\Delta r^\rho \cos\rho\varphi \ln(r/R_{k-1}) + o(R_k^{\rho_3}) \quad (k \to +\infty).$$

Тому

$$I_9 = I_3 + \lim_{\delta\to 0+}(I_{5,3} + I_{5,4}) = \Delta r^\rho \cos\rho\varphi \ln(R_{k-1}/R_{k+2}) + o(R_k^{\rho_3}) \quad (k \to +\infty).$$

Далі, подібно як в [5, с. 147, 148], для $r \in [R_k; R_{k+1})$ при $k \to +\infty$

$$\begin{aligned} I_{10} = |I_9 + I_6 + I_{5,2}| \le \Delta R_{k+1}^\rho \sin^2\frac{\rho\varphi}{2}\left(2\ln\frac{R_{k+2}}{R_{k-1}} + \left|\ln\frac{R_{k-1}^2 - 2rR_{k-1}\cos\varphi + r^2}{R_{k+2}^2 - 2rR_{k+2}\cos\varphi + r^2}\right|\right) + \\ +(n(R_{k+2}) - \Delta R_k^\rho)\left(\ln\frac{R_{k+2}}{R_{k-1}} + \frac{1}{2}\left|\ln\frac{R_{k-1}^2 - 2rR_{k-1}\cos\varphi + r^2}{R_{k+2}^2 - 2rR_{k+2}\cos\varphi + r^2}\right|\right) + \\ +\frac{1}{2}(n(R_{k-1}) - n(R_{k+2}))\left|\ln\left(1 - \frac{2r}{R_{k-1}}\cos\varphi + \frac{r^2}{R_{k-1}^2}\right)\right| + o(R_k^{\rho_3}) = o(R_k^{\rho_3}). \end{aligned} \tag{15}$$

Крім цього, подібно до [5, с. 148], для $r \in [R_k; R_{k+1})$ при $k \to +\infty$

$$I_7 = -\frac{\Delta}{\rho} r^\rho \cos\rho\varphi + o(R_k^{\rho_3}). \tag{16}$$

Об'єднуючи (11)–(16), отримуємо

$$\ln|L(z)| \le \frac{1}{\rho}\,\mathrm{Re}\Big\{z^\rho \sum_{\lambda_n \le r} \lambda_n^{-\rho}\Big\} - \frac{\Delta}{\rho} r^\rho \cos\rho\varphi + (\pi - \varphi)\Delta r^\rho \sin\rho\varphi + o(r^{\rho_3}) \quad (r \to +\infty),$$

тобто виконується (9). Доведемо (10). Для цього, подібно до леми 4 з [5, с. 144], побудуємо систему U виняткових кругів із скінченною сумою радіусів. Згідно з лемою 1, нерівність (10) досить довести для $z \in E_\varepsilon \setminus U$. Для кожного $z = re^{i\varphi} \in E_\varepsilon \setminus U$ існує

$k \in \mathbb{N}$, для якого $R_k \le |z| < R_{k+1}$. Тому, використовуючи (8), (11), (12), (14)–(16), як і вище отримуємо

$$\ln|L(z)| \ge \frac{1}{\rho}\,\mathrm{Re}\Big\{z^\rho \sum_{\lambda_n \le r} \lambda_n^{-\rho}\Big\} + (\pi-\varphi)\Delta r^\rho \sin\rho\varphi + I_7 - (I_8 + I_{10}) + o(R_k^{\rho_3}) \ge$$

$$\ge \frac{1}{\rho}\,\mathrm{Re}\Big\{z^\rho \sum_{\lambda_n \le r} \lambda_n^{-\rho}\Big\} - \frac{\Delta}{\rho} r^\rho \cos\rho\varphi + (\pi-\varphi)\Delta r^\rho \sin\rho\varphi + o(r^{\rho_3}) \quad (\widetilde{E}_\varepsilon \not\ni z = re^{i\varphi} \to \infty).$$

Отже, виконується (10). Нехай тепер $p = \rho - 1$. Тоді

$$\ln|L(z)| = -\frac{1}{\rho}\Bigg(\sum_{R_{k-1}<\lambda_n\le R_{k+2}} + \sum_{\lambda_n > R_{k+2}}\Bigg)\mathrm{Re}\{z/\lambda_n^\rho\} + I_3 + I_4 + \ln|\psi_k(z)| + I_5 + I_6 + I_7,$$

де I_3, I_4, I_5, I_6, I_7 — визначені у випадку $\rho = p$. Оскільки в даному випадку ряд $\sum_n \lambda_n^{-\rho}$ є збіжним, і $n(t) = o(t^{\rho_1})$ $(t \to +\infty)$, то при $k \to +\infty$

$$-\frac{1}{\rho}\sum_{R_{k-1}<\lambda_n\le R_{k+2}} \mathrm{Re}\,\{z/\lambda_n^\rho\} - \frac{1}{\rho}\sum_{\lambda_n > R_{k+2}} \mathrm{Re}\,\{z/\lambda_n^\rho\} = o(R_k^{\rho_3}).$$

Внаслідок цього, робимо висновок, що у випадку $\rho = p+1$ потрібне твердження випливає із доведення випадку $\rho = p$. Лему 3 повністю доведено. □

Теорема 1 безпосередньо випливає з леми 3.

ЛІТЕРАТУРА

1. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. – М.: Гостехиздат, 1956.– 632 с.
2. Гришин А. Ф. *О регулярности роста субгармонических функций* // Теория функций, функц. анализ и их прилож. (Харьков).– 1968.– Вып. 6.– С.3–29.
3. Гольдберг А. А., Островский И. В. Распределение значений мероморфных функций.– М.: Наука, 1970.– 591 с.
4. Субханкулов М. А. Тауберовы теоремы с остатком.– М.: Наука, 1976.– 399 с.
5. Винницький Б. В., Хаць Р. В. *Про асимптотичну поведінку цілих функцій нецілого порядку* // Матем. студії.– 2004.– Т. 21, № 2.– С. 140–150.
6. Агранович П. З., Логвиненко В. Н. *Аналог теоремы Валирона-Титчмарша для двучленных асимптотик субгармонической функции с массами на конечной системе лучей* // Сиб. мат. ж.– 1985.– Т. 26, № 5.– С. 3–19.
7. Логвиненко В. Н. *О целых функциях с нулями на полупрямой. I* // Теория функций, функц. анализ и их прилож. (Харьков).– 1972.– Вып. 16. – С. 154–158.

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка,
Інститут фізики, математики та інформатики
mathanalys@mail.ru

Надійшло 13.05.2004
Після переробки 07.10.2004