УДК 517.53

О. А. Волох, М. М. Шеремета

# ПРО ФОРМАЛЬНІ СТЕПЕНЕВІ РЯДИ, ПОХІДНІ ГЕЛЬФОНДА-ЛЕОНТЬЄВА ЯКИХ ЗАДОВОЛЬНЯЮТЬ СПЕЦІАЛЬНУ УМОВУ

O. A. Volokh, M. M. Sheremeta. *On formal power series whose Gelfond-Leont'ev derivatives satisfy a special condition*, Matematychni Studii, **22** (2004) 87–93.

For a formal power series a condition on Gelfond-Leont'ev derivatives under which the series represents an analytic function in the disk is found.

А. А. Волох, М. Н. Шеремета. *О формальных степенных рядах, производные Гельфонда-Леонтьева которых удовлетворяют специальному условию* // Математичні Студії. – 2004. – Т.22, №1. – С.87–93.

Для формального степенного ряда найдено условие на производные Гельфонда-Леонтьева, при выполнении которого этот ряд представляет функцию, аналитическую в круге.

**1. Вступ.** Нехай $(f_k)_{k=0}^{\infty}$ — довільна послідовність комплексних чисел. Для $0 < R \le +\infty$ через $A(R)$ позначимо клас аналітичних в крузі $\{z : |z| < R\}$ функцій

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k, \tag{1}$$

а запис $f \in A(0)$ надалі означатиме, що або $f \in A(R)$ для деякого $R > 0$, або ряд (1) збіжний тільки в точці $z = 0$. Іншими словами, $A(0)$ – клас формальних степеневих рядів. Зрозуміло, що $A(R_2) \subset A(R_1)$ для всіх $0 \le R_1 \le R_2 \le +\infty$. Говоритимемо, що $f \in A^+(0)$, якщо $f \in A(0)$ і $f_k > 0$ для всіх $k \ge 0$.

Для $f \in A(0)$ і $l(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} l_k z^k \in A^+(0)$ формальний степеневий ряд

$$D_l^n f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{l_k}{l_{k+n}} f_{k+n} z^k, \tag{2}$$

називається ([1, 2]) $n$-ою похідною Гельфонда-Леонтьєва. Якщо $l(z) = e^z$, тобто $l_k = 1/k!$ і $f \in A(R)$, $R \ne 0$, то $D_l^n f(z) = f^{(n)}(z)$ — звичайна $n$-та похідна функції $f$. Вважатимемо надалі, що $l_0 = 1$.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 30B10.

© О. А. Волох, М. М. Шеремета, 2004

Через $\Lambda$ позначимо клас додатних числових послідовностей $\lambda = (\lambda_k)$, $\lambda_1 \geq 1$. Як і в [2], казатимемо, що $f \in A_\lambda(0)$, якщо $f \in A(0)$ і $|f_k| \leq \lambda_k |f_1|$ для всіх $k \geq 1$. Нарешті, нехай $N$ — клас зростаючих до $+\infty$ послідовностей $(n_p)$ цілих невід'ємних чисел $(n_0 = 0)$.

У [2] доведено таку теорему.

**Теорема А.** *Нехай $(n_p) \in N$. Для того, щоб для довільних $\lambda \in \Lambda$, $f \in A(0)$ і $l \in A^+(\infty)$ із виконання для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ умови $D_l^{n_p} f \in A_\lambda(0)$ випливало, що $f \in A(\infty)$, необхідно і досить, щоб*

$$\varlimsup_{p \to \infty} (n_{p+1} - n_p) < +\infty. \tag{3}$$

Метою цього повідомлення є знайти умови на $l \in A^+(0)$ і $(n_p) \in N$, за яких з умови $(\forall p \in \mathbb{Z}_+)\{D_l^{n_p} f \in A_\lambda(0)\}$ випливає, що $f \in A(R)$, $R > 0$. Зокрема, ми доведемо, що умова (3) є необхідною і достатньою для того, щоб для довільних $\lambda \in \Lambda$, $f \in A(0)$ і $l \in A^+(R)$, $0 < R < +\infty$, з умови $(\forall p \in \mathbb{Z}_+)\{D_l^{n_p} f \in A_\lambda(0)\}$ випливала аналітичність $f$ у деякому околі точки $z = 0$. У доведенні основних результатів використовуватимемо наступну лему ([2]).

**Лема 1.** *Якщо $\lambda \in \Lambda$, $(n_p) \in N$, $f \in A(0)$, $l \in A^+(0)$ і $D_l^{n_p} f \in A_\lambda(0)$ для всіх $p \in \mathbb{Z}_+$, то*

$$|f_{n_p+k}| \leq |f_1| l_1^p l_{n_p+k} \frac{\lambda_k}{l_k} \prod_{j=1}^{p} \frac{\lambda_{n_j - n_{j-1}+1}}{l_{n_j - n_{j-1}+1}} \tag{4}$$

*для всіх $p \in \mathbb{N}$ і $k \in \{2, \ldots, n_{p+1} - n_p + 1\}$.*

**2. Основні теореми.** Нехай $R[f]$ і $R[l]$ — радіуси збіжності степеневих розвинень функцій $f$ і $l$.

**Теорема 1.** *Нехай $(n_p) \in N$. Умова (3) є необхідною і достатньою для того, щоб для довільних $\lambda \in \Lambda$, $f \in A(0)$ і $l \in A^+(0)$ з умови $(\forall p \in \mathbb{Z}_+)\{D_l^{n_p} f \in A_\lambda(0)\}$ випливала нерівність $R[f] \geq P R[l]$ з деякою сталою $P > 0$.*

*Доведення.* Почнемо з достатності умови (3), з якої випливає існування числа $m \in \mathbb{N}$ такого, що $n_{p+1} - n_p \leq m$ для всіх $p \in \mathbb{Z}_+$. Тому для всіх $k$,

$$2 \leq k \leq n_{p+1} - n_p + 1 \leq m + 1$$

маємо

$$\frac{\lambda_k}{l_k} \prod_{j=1}^{p} \frac{\lambda_{n_j - n_{j-1}+1}}{l_{n_j - n_{j-1}+1}} \leq \left( \max \left\{ \frac{\lambda_k}{l_k} : 2 \leq k \leq m+1 \right\} \right)^{p+1} = K^{p+1} \tag{5}$$

і, отже, з (5) отримуємо

$$\frac{1}{n_p + k} \ln \frac{1}{|f_{n_p+k}|} \geq \frac{1}{n_p + k} \ln \frac{1}{l_{n_p+k}} - \frac{p \ln\, l_1 + \ln\, |f_1| + (p+1) \ln\, K}{n_p + k} \geq$$
$$\geq \frac{1}{n_p + k} \ln \frac{1}{l_{n_p+k}} - \ln\,(l_1 K) + o(1) \quad (p \to +\infty).$$

Звідси випливає, що $\ln R[f] \geq \ln R[l] - \ln(l_1 K)$, тобто

$$R[f] \geq PR[l], \quad P = \frac{1}{l_1 \max\{\lambda_k/l_k : 2 \leq k \leq m+1\}}. \tag{6}$$

Достатність умови (3) доведено.

У [2] доведено, що якщо $\overline{\lim\limits_{p\to\infty}}(n_{p+1} - n_p) = +\infty$, то існують послідовність $\lambda \in \Lambda$ та $f \in A(0)$ і $l \in A^+(0)$ такі, що $(\forall p \in \mathbb{Z}_+)\{D_l^{n_p} f \in A_\lambda(0)\}$, але $R[f] = 1$ і $R[l] = +\infty$. Звідси випливає необхідність умови (3). $\square$

Зауважимо, що з використаного у доведенні необхідності умови (3) твердження з [2] випливає також наступний результат.

**Твердження 1.** *Якщо* $\overline{\lim\limits_{p\to\infty}}(n_{p+1} - n_p) = +\infty$, *то для кожного* $R \in (0, +\infty)$ *існують* $\lambda^* \in \Lambda$, $f^* \in A(0)$ *і* $l^* \in A^+(0)$ *такі, що* $(\forall p \in \mathbb{Z}_+)\{D_{l^*}^{n_p} f^* \in A_\lambda(0)\}$, *але* $R[f^*] = R$ *і* $R[l^*] = +\infty$.

Справді, нехай $\lambda$, $l$, $f$ — такі, як в [2], а $\lambda_k^* = \lambda_k R^{-k+1}$, $l_k^* = l_k R^{-k}$, $f_k^* = f_k R^{-k}$. Тоді $R[f^*] = R$, $R[l^*] = +\infty$ і

$$\frac{l_k^*|f_{n_p+k}^*|}{l_{n_p+k}^*} = \frac{l_k|f_{n_p+k}|}{R^k l_{n_p+k}} \leq \frac{\lambda_k l_1 |f_{n_p+1}|}{R^k l_{n_p+1}} = \frac{\lambda_k^* l_1^* |f_{n_p+1}^*|}{l_{n_p+1}^*},$$

тобто $(\forall p \in \mathbb{Z}_+)\{D_{l^*}^{n_p} f^* \in A_\lambda(0)\}$.

**Теорема 2.** *Нехай* $(n_p) \in N$. *Умова (3) є необхідною і достатньою для того, щоб для довільних* $\lambda \in \Lambda$, $f \in A(0)$ *і* $l \in A^+(R)$, $0 < R < +\infty$, *з умови* $(\forall p \in \mathbb{Z}_+)\{D_l^{n_p} f \in A_\lambda(0)\}$ *випливала аналітичність* $f$ *у деякому околі точки* $z = 0$.

Достатність умови (3) в теоремі 2 випливає з достатності цієї умови в теоремі 1, а необхідність випливає з наступного твердження.

**Твердження 2.** *Якщо* $\overline{\lim\limits_{p\to\infty}}(n_{p+1} - n_p) = +\infty$, *то для кожного* $R \in (0, +\infty)$ *існують* $\lambda \in \Lambda$, $f \in A(0)$ *і* $l \in A^+(0)$ *такі, що* $(\forall p \in \mathbb{Z}_+)\{D_l^{n_p} f \in A_\lambda(0)\}$, *але* $R[f] = 0$ *і* $R[l] = R$.

*Доведення.* Приймемо $l_k = R^{-k}$ і розглянемо формальний степеневий ряд

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{n_k+1} z^{n_k+1}. \tag{7}$$

Оскільки для цього ряду

$$D_l^{n_p} f(z) = \sum_{k=p}^{\infty} \frac{l_{n_k-n_p+1}}{l_{n_k+1}} f_{n_k+1} z^{n_k-n_p+1} = R^{n_p} \sum_{k=p}^{\infty} f_{n_k+1} z^{n_k-n_p+1}, \tag{8}$$

то $D_l^{n_p} f \in A_\lambda(0)$ для всіх $p \in \mathbb{Z}_+$ тоді і тільки тоді, коли для всіх $p \in \mathbb{Z}_+$ і $k \geq p$

$$f_{n_k+1} \leq \lambda_{n_k-n_p+1} f_{n_p+1}. \tag{9}$$

Вважаючи, що всі $\lambda_k \geq 1$, приймемо $f_1 = 1$ і $f_{n_p+1} = \prod_{j=1}^{p} \lambda_{n_j-n_{j-1}+1}$ для $p \geq 1$. Тоді умова (9) виконується, якщо

$$\sum_{j=p+1}^{k} \ln \lambda_{n_j-n_{j-1}+1} \leq \ln \lambda_{n_k-n_p+1} \quad (k > p), \tag{10}$$

а $R[f] = 0$, якщо

$$\overline{\lim_{p\to\infty}} \frac{1}{n_p} \sum_{j=1}^{p} \ln \lambda_{n_j-n_{j-1}+1} = +\infty. \tag{11}$$

Отже, треба вказати послідовність $\lambda \in \Lambda$, для якої всі $\lambda_k \geq 1$ і виконуються умови (10) і (11).

Припустимо, що $\varphi$ — неспадна на $[0, +\infty)$, додатна і неперервна функція, і означимо $\ln \lambda_k = (k-1)\varphi(k-1)$. Тоді

$$\sum_{j=p+1}^{k} \ln \lambda_{n_j-n_{j-1}+1} = \sum_{j=p+1}^{k} (n_j - n_{j-1})\varphi(n_j - n_{j-1}) \leq$$

$$\leq \varphi(n_k - n_p) \sum_{j=p+1}^{k} (n_j - n_{j-1}) = (n_k - n_p)\varphi(n_k - n_p) = \ln \lambda_{n_k-n_p+1},$$

тобто виконується (10), і нам залишилось вибрати функцію $\varphi$ так, щоб

$$\overline{\lim_{p\to\infty}} \frac{\sum\limits_{j=1}^{p}(n_j - n_{j-1})\varphi(n_j - n_{j-1})}{\sum\limits_{j=1}^{p}(n_j - n_{j-1})} = +\infty.$$

Оскільки $\overline{\lim\limits_{p\to\infty}}(n_p - n_{p-1}) = +\infty$, то існує зростаюча послідовність $(p_k)$ натуральних чисел така, що $n_{p_k} - n_{p_k-1} \uparrow +\infty$ і $n_j - n_{j-1} \leq n_{p_k} - n_{p_k-1}$ для $j \leq p_k$. Для такої послідовності $(p_k)$ маємо

$$\frac{\sum\limits_{j=1}^{p_k}(n_j - n_{j-1})\varphi(n_j - n_{j-1})}{\sum\limits_{j=1}^{p_k}(n_j - n_{j-1})} \geq \frac{(n_{p_k} - n_{p_k-1})\varphi(n_{p_k} - n_{p_k-1})}{p_k(n_{p_k} - n_{p_k-1})}$$

і, отже, нам досить вибрати неспадну на $[0, +\infty)$, додатну і неперервну функцію $\varphi$ так, щоб $\varphi(n_{p_k} - n_{p_k-1})/p_k \to +\infty$ $(k \to \infty)$. Останню вимогу нескладно задовольнити для фіксованої послідовності $p_k \uparrow +\infty$ $(k \to +\infty)$. Твердження 2, а з ним і теорему 2 доведено.

**3. Зауваження та доповнення.** У зв'язку з твердженнями 1 та 2 виникає запитання, чи у випадку, коли умова (3) не виконується, існують $\lambda \in \Lambda$, $f \in A(0)$ і $l \in A^+(0)$ такі, що $(\forall p \in \mathbb{Z}_+)\{D_l^{n_p} f \in A_\lambda(0)\}$, але $R[f] = 0$ і $R[l] = +\infty$. Позитивна відповідь на це запитання міститься у наступному твердженні.

**Твердження 3.** *Якщо* $\overline{\lim_{p\to\infty}}(n_{p+1}-n_p)=+\infty$, *то існують* $\lambda\in\Lambda$, $f\in A(0)$ *і* $l\in A^+(0)$ *такі, що* $(\forall p\in\mathbb{Z}_+)\{D_l^{n_p}f\in A_\lambda(0)\}$, *але* $R[f]=0$ *і* $R[l]=+\infty$.

*Доведення.* Як і у доведенні твердження 2, розглянемо формальний степеневий ряд (7). Для цього ряду з (8) отримуємо, що $(\forall p\in\mathbb{Z}_+)\{D_l^{n_p}f\in A_\lambda(0)\}$ тоді і тільки тоді, коли для всіх $p\in\mathbb{Z}_+$ і $k>p$

$$\frac{l_{n_k-n_p+1}}{l_{n_k+1}}|f_{n_k+1}|\le\lambda_{n_k-n_p+1}\frac{l_1}{l_{n_p+1}}|f_{n_p+1}|. \tag{12}$$

Легко перевірити, що якщо $f_1>0$ і

$$f_{n_p+1}=f_1l_1^pl_{n_p+1}\prod_{j=1}^{p}\frac{\lambda_{n_j-n_{j-1}+1}}{l_{n_j-n_{j-1}+1}},\quad p\ge0, \tag{13}$$

то (12) виконується тоді і тільки тоді, коли для всіх $p\in\mathbb{Z}_+$ і $k>p$

$$\prod_{j=p+1}^{k}\frac{\lambda_{n_j-n_{j-1}+1}}{l_{n_j-n_{j-1}+1}}\le l_1^{-k+p+1}\frac{\lambda_{n_k-n_p+1}}{l_{n_k-n_p+1}}.$$

Виберемо, $l_1=1$. Тоді, якщо для всіх $p\in\mathbb{Z}_+$ і $k>p$

$$\prod_{j=p+1}^{k}\frac{\lambda_{n_j-n_{j-1}+1}}{l_{n_j-n_{j-1}+1}}\le\frac{\lambda_{n_k-n_p+1}}{l_{n_k-n_p+1}}, \tag{14}$$

то $(\forall p\in\mathbb{Z}_+)\{D_l^{n_p}f\in A_\lambda(0)\}$.

З (13) випливає, що

$$\ln R[f]=\underline{\lim_{p\to\infty}}\frac{1}{n_p+1}\left(\ln\frac{1}{l_{n_p+1}}-\sum_{j=1}^{p}\ln\frac{\lambda_{n_j-n_{j-1}+1}}{l_{n_j-n_{j-1}+1}}\right).$$

Тому нам треба так побудувати послідовності $(l_k)$ і $(\lambda_k)$, щоб виконувалась умова (14), а також умови

$$\underline{\lim_{p\to\infty}}\frac{1}{n_p+1}\ln\frac{1}{l_{n_p+1}}=+\infty, \tag{15}$$

$$\underline{\lim_{p\to\infty}}\frac{1}{n_p+1}\left(\ln\frac{1}{l_{n_p+1}}-\sum_{j=1}^{p}\ln\frac{\lambda_{n_j-n_{j-1}+1}}{l_{n_j-n_{j-1}+1}}\right)=-\infty. \tag{16}$$

Оскільки $\overline{\lim_{p\to\infty}}(n_p-n_{p-1})=+\infty$, то існує зростаюча послідовність $(p_k)$ натуральних чисел така, що $n_{p_k}-n_{p_k-1}\uparrow+\infty$ і $n_j-n_{j-1}\le n_{p_k}-n_{p_k-1}$ для $j\le p_k$.

Виберемо неспадну до $+\infty$ на $[0,+\infty)$, додатну і неперервну функцію $\varphi$ так, щоб

$$\frac{(n_{p_k}-n_{p_k-1})\varphi(n_{p_k}-n_{p_k-1})}{n_{p_k}}\to+\infty\ (k\to+\infty), \tag{17}$$

а послідовність $(\lambda_k)$ виберемо так, щоб $\lambda_k\ge1$ для всіх $k\ge1$,

$$\varphi(n_{p_k})-\frac{\ln\lambda_{n_{p_k}+1}}{n_{p_k}}=\frac{(n_{p_k}-n_{p_k-1})\varphi(n_{p_k}-n_{p_k-1})}{2n_{p_k}} \tag{18}$$

і

$$\varphi(n_p) - \frac{\ln\, \lambda_{n_p+1}}{n_p} \to +\infty \quad (p \to +\infty). \tag{19}$$

Нарешті, означимо $l_k = \lambda_k \exp\{-(k-1)\varphi(k-1)\}$, $k \geq 2$. Тоді

$$\sum_{j=p+1}^{k} \ln\, \frac{\lambda_{n_j-n_{j-1}+1}}{l_{n_j-n_{j-1}+1}} = \sum_{j=p+1}^{k} (n_j - n_{j-1})\varphi(n_j - n_{j-1}) \leq (n_k - n_p)\varphi(n_k - n_p) = \frac{\lambda_{n_k-n_p+1}}{l_{n_k-n_p+1}},$$

тобто виконується умова (14). Далі, з (19) випливає, що

$$\varliminf_{p\to\infty} \frac{1}{n_p+1} \ln\, \frac{1}{l_{n_p+1}} = \varliminf_{p\to\infty} \frac{1}{n_p+1}(n_p\varphi(n_p) - \ln\, \lambda_{n_p+1}) = +\infty,$$

тобто виконується умова (15). Нарешті, з (18) отримуємо

$$\begin{aligned} &\varliminf_{p\to\infty} \frac{1}{n_p+1} \left( \ln\, \frac{1}{l_{n_p+1}} - \sum_{j=1}^{p} \ln\, \frac{\lambda_{n_j-n_{j-1}+1}}{l_{n_j-n_{j-1}+1}} \right) = \\ &= \varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{n_{p_k}} \left( n_{p_k}\varphi(n_{p_k}) - \ln\, \lambda_{n_{p_k}+1} - \sum_{j=1}^{p_k} (n_j - n_{j-1})\varphi(n_j - n_{j-1}) \right) \leq \\ &\leq \varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{n_{p_k}} \left( n_{p_k}\varphi(n_{p_k}) - \ln\, \lambda_{n_{p_k}+1} - (n_{p_k} - n_{p_k-1})\varphi(n_{p_k} - n_{p_k-1}) \right) = \\ &= -\varliminf_{k\to\infty} \frac{(n_{p_k} - n_{p_k-1})\varphi(n_{p_k} - n_{p_k-1})}{2n_{p_k}} = -\infty, \end{aligned}$$

тобто виконується (16). Твердження 3 доведено. □

На завершення зробимо ще два зауваження.

*Зауваження 1.* Оцінка (6) у теоремі 1 точна.

Справді, неважко перевірити, що якщо $f_1 > 0$ і для всіх $p \in \mathbb{Z}_+$ і $k \in \{2, 3, \ldots, n_{p+1} - n_p + 1\}$

$$f_{n_p+k} = f_1 l_1^p l_{n_p+k} \frac{\lambda_k}{l_k} \prod_{j=1}^{p} \frac{\lambda_{n_j-n_{j-1}+1}}{l_{n_j-n_{j-1}+1}},$$

то $D_l^{n_p} f \in A_\lambda(0)$ для всіх $p \in \mathbb{Z}_+$. Припустимо, що $n_p = p + \left[\sqrt{p}\right]$. Тоді

$$2 \leq n_{p+1} - n_p + 1 = 2 + \left[\sqrt{p+1}\right] - [\sqrt{p}] \leq 3$$

і, якщо приймемо $l_2 = l_3 = l_*$, $l_k = R^{-k}$ $(k \geq 4)$ і $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_*$, то матимемо

$$\frac{1}{n_p+k} \ln\, \frac{1}{f_{n_p+k}} = \frac{p}{n_p+k} \ln\, \frac{1}{l_1} + \frac{1}{n_p+k} \ln\, \frac{1}{l_{n_p+k}} + \frac{1}{n_p+k} \sum_{j=1}^{p} \ln\, \frac{l_*}{\lambda_*} + o(1) \quad (p \to +\infty),$$

звідки випливає, що $\ln\, R[f] = -\ln\, l_1 + \ln\, R[l] - \ln\,(\lambda_*/l_*)$, тобто нерівність (6) перетворюється у рівність з $P = l_*/(l_1\lambda_*) = (l_1 \max\{\lambda_k/l_k : 2 \leq k \leq 3\})^{-1}$.

*Зауваження 2.* У теоремі 2 умова $l \in A^+(R)$, $0 < R < +\infty$, не є необхідною.

Справді, легко побачити, що для функції

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{2k+1} z^{2k+1} \tag{20}$$

умова $(\forall p \in \mathbb{Z}_+)\{D_l^{2p} f \in A_\lambda(0)\}$ виконується тоді і тільки тоді, коли для всіх $p \in \mathbb{Z}_+$ і $j \geq p$

$$|f_{2j+1}| \leq \frac{l_1 \lambda_{2(j-p)+1} l_{2j+1}}{l_{2(j-p)+1} l_{2p+1}} |f_{2p+1}|. \tag{21}$$

Тому, якщо виберемо $\lambda_k = 1$, $l_{2k+1} = R^{2k+1}$, $l_{2k} = k^{2k}$ і $f_{2k+1} = k^{-(2k+1)}$, то (21) виконується, $R[l] = 0$ і $R[f] = +\infty$.

Приклад ряду (20) вказує також на те, що, взагалі кажучи, не існує сталої $P_1 > 0$ такої, що $R[f] \leq P_1 R[l]$ (див. теорему 1).

## ЛІТЕРАТУРА

1. Гельфонд А. О., Леонтьев А. Ф. *Об одном обобщении ряда Фурье* // Матем. сб. – 1951. – Т.29, №3. – С.477–500.

2. Шеремета М. Н. *О степенных рядах Дирихле с удовлетворяющими специальному условию производными Гельфонда-Леонтьева* // Мат. физика, анализ, геометрия. – 1996. – Т.3, №3/4. – С.423–445.

Львівський національний університет,
механіко-математичний факультет
tftj@franko.lviv.ua

*Надійшло 2.10.2003*