УДК 519.61

С. М. Шахно

# ЗАСТОСУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ МАЖОРАНТ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ МЕТОДУ ХОРД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

S. M. Shakhno. *Application of nonlinear majorants for investigation of the secant method for solving nonlinear equations*, Matematychni Studii, **22** (2004) 79–86.

Two nonlinear majorants for nonlinear operator are constructed depending on the conditions imposed on it. In both cases, semilocal convergence of the secant method is investigated, a priori and a posteriori bounds for error of the method are received.

С. М. Шахно. *Применение нелинейных мажорант для исследования метода секущих решения нелинейных уравнений* // Математичні Студії. – 2004. – Т.22, №1. – С.79–86.

Построены две нелинейные мажоранты для нелинейного оператора в зависимости от наложенных на него условий. В обоих случаях проведено исследование полулокальной сходимости метода секущих, получены априорные и апостериорные оценки погрешности метода.

**1. Вступ.** Метод хорд є популярним методом розв'язування нелінійних рівнянь. Це пояснюється простотою методу, невеликою кількістю обчислень у кожній ітерації, використанням в ітераційній формулі методу тільки значення оператора з двох попередніх ітерацій. Дослідженню цього методу присвячено багато праць (див., наприклад, [1, 2, 5, 7, 8]). В [9] метод хорд застосований для розв'язування нелінійної задачі найменших квадратів.

Л. В. Канторович ([3]) для дослідження збіжності основного і модифікованого методів Ньютона побудував для нелінійного оператора мажорантну дійснозначну квадратичну функцію. Відповідно до цього ітераційна послідовність для нелінійного оператора мажорується збіжною послідовністю для нелінійного рівняння з однією змінною. Пізніше побудовані нелінійні мажоранти для дослідження інших методів ров'язування нелінійних функціональних рівнянь. В [6] за допомогою принципу мажорант досліджено метод з порядком збіжності $1.839\ldots$, який в своїй ітераційній формулі використовує значення оператора з трьох попередніх ітерацій. Зокрема, побудований дійснозначний поліном третього степеня, що мажорує заданий нелінійний оператор. При цьому накладаються умови Ліпшиця на оператор поділених різниць другого порядку [4, 6]. У цій статті ми досліджуємо метод хорд за різних умов, накладених на нелінійний оператор. Так, за умови Ліпшиця для поділених різниць першого порядку, побудовано квадратичну мажорантну функцію від однієї змінної, а за умови Ліпшиця для оператора другої поділеної різниці — кубічну мажорантну функцію. Метод хорд, застосований до цих

2000 *Mathematics Subject Classification:* 65J15, 47H17.

функцій, дає числові послідовності, які мажорують за нормою ітераційну послідовність, утворену від застосування методу хорд до нелінійного оператора. В обидвох випадках отримано апріорну та апостеріорну оцінки похибок методу хорд.

**2. Поділені різниці та їхні властивості.** Розглядатимемо нелінійне операторне рівняння вигляду

$$F(x) = 0,$$

де $F$ — нелінійний оператор, визначений у відкритій області $D$ банахового простору $X$ зі значеннями в банаховому просторі $Y$. Нехай $x$, $y$ та $z$ — три точки з області $D$. Лінійний оператор з $X$ в $Y$, позначуваний $F(x,y)$, називається поділеною різницею від $F$ за точками $x$ і $y$, якщо він задовольняє умову

$$F(x,y)(x-y) = F(x) - F(y). \tag{1}$$

Поділеною різницею другого порядку від функції $F$ за точками $x$, $y$ та $z$ називатимемо оператор $F(x,y,z)$, який задовольняє умову

$$F(x,y,z)(y-z) = F(x,y) - F(x,z).$$

Вважатимемо, що для $F(x,y)$ і $F(x,y,z)$ виконуються умови типу Ліпшиця в такій формі

$$\|F(x,y) - F(x,z)\| \le p\|y-z\|, \qquad x,y,z \in D, \tag{2}$$

$$\|F(y,x) - F(z,x)\| \le \bar{p}\|y-z\|, \qquad x,y,z \in D, \tag{3}$$

$$\|F(x,y,z) - F(u,y,z)\| \le q\|x-u\|, \qquad u,x,y,z \in D.$$

Якщо поділена різниця $F(x,y)$ від $F$ задовольняє (2) або (3), то оператор $F$ диференційовний за Фреше на $D$ і $F'(x) = F(x,x)$. Якщо ж (2) і (3) виконуються одночасно, то похідна Фреше неперервна за Ліпшицем на $D$ з константою Ліпшиця $k = p + \bar{p}$. Отже, надалі $F(\cdot,\cdot)$ і $F(\cdot,\cdot,\cdot)$ — відповідно поділена різниця та поділена різниця другого порядку від $F$.

**3. Напівлокальна збіжність методу хорд.**

**Теорема 1.** *Нехай $F$ — нелінійний оператор, який визначений на відкритій множині $D$ банахового простору $X$ зі значеннями в банаховому просторі $Y$. Припустимо, що лінійний оператор $A_0 = F(x_{-1}, x_0)$, де $x_0$ , $x_{-1} \in D$, має обернений і існують невід'ємні числа $a, c$ такі, що*

$$\|x_0 - x_{-1}\| \le a, \ \|A_0^{-1}F(x_0)\| \le c. \tag{4}$$

*Нехай в $D$ виконується умова Ліпшиця*

$$\|A_0^{-1}(F(x,y) - F(u,v))\| \le p_0(\|x-u\| + \|y-v\|). \tag{5}$$

*Якщо* $p_0 a \le 1$ , $r = \dfrac{1-p_0a}{2p_0}$, *для дійсного полінома* $h(t) = -p_0t^2 + (1-p_0a)t$ *виконується нерівність*

$$c \le h(r) = \frac{(1-p_0a)^2}{4p_0} \tag{6}$$

*і замкнена куля* $U_0 = U(x_0, r_0)$ *міститься в* $D$, *де* $r_0$ — *єдиний корінь рівняння* $h(t) = c$ *на* $(0, r]$, *то ітераційний процес*

$$x_{n+1} = x_n - (F(x_n, x_{n-1}))^{-1}F(x_n), \quad n \in \{0,1,2,\dots\} \tag{7}$$

*є добре визначений і генерована ним послідовність збігається до розв'язку* $x^*$ *рівняння* $F(x) = 0$. *Більше того, для всіх* $n \in \{-1, 0, 1, 2, \dots\}$ *правильна нерівність*

$$\|x_n - x^*\| \le t_n, \tag{8}$$

*де*

$$t_0 = r_0, \quad t_{-1} = r_0 + a, \tag{9}$$
$$t_{n+1} = t_n \cdot \frac{p_0t_{n-1}}{1 - p_0a - 2p_0r_0 + p_0(t_n + t_{n-1})}, \quad n \in \{0,1,2,\dots\}.$$

*Доведення.* Відзначимо, що послідовність $(t_n)_{n\ge0}$ отримується застосуванням ітераційної процедури (7) до полінома $f(t) = p_0t^2 + (1 - p_0a - 2p_0r_0)t$. Легко бачити, що ця послідовність монотонно збігається до нуля, а також

$$t_{n+1} - t_{n+2} = \Big(\frac{f(t_{n+1}) - f(t_n)}{t_{n+1} - t_n}\Big)^{-1} f(t_{n+1}) = \frac{p_0(t_{n-1} - t_{n+1})}{1 - p_0a - p_0(2t_0 - t_n - t_{n+1})}(t_n - t_{n+1}). \tag{10}$$

Доведемо за допомогою методу математичної індукції, що ітераційний процес є добре визначений і для кожного $n \in \{-1, 0, 1, 2, \dots\}$

$$\|x_n - x_{n+1}\| \le t_n - t_{n+1}. \tag{11}$$

Використовуючи (4), (6), (9) і той факт, що

$$t_0 - t_1 = \frac{t_{-1} - t_0}{f(t_{-1}) - f(t_0)} f(t_0)$$
$$= \frac{t_{-1} - t_0}{p_0(t_{-1}^2 - t_0^2) + (1 - p_0a - 2p_0r_0)(t_{-1} - t_0)} f(t_0) = f(r_0) = h(r_0) = c,$$

ми доводимо, що (11) виконується для $n \in \{-1, 0\}$. Нехай $k$ — невід'ємне число і для всіх $n \le k$ виконується (11). Якщо $A_{k+1} = F(x_{k+1}, x_k)$, то за умовою Ліпшиця (5) маємо

$$\|I - A_0^{-1}A_{k+1}\| = \|A_0^{-1}(A_0 - A_{k+1})\| =$$
$$= \|A_0^{-1}(F(x_0, x_{-1}) - F(x_0, x_0) + F(x_0, x_0) - F(x_0, x_k) + F(x_0, x_k) - F(x_{k+1}, x_k)\| \le$$
$$\le p_0a + p_0(\|x_0 - x_k\| + \|x_0 - x_{k+1}\|) \le p_0a + p_0(2t_0 - t_k - t_{k+1}) < p_0a + 2p_0t_0 \le$$
$$\le p_0a + 2p_0r \le p_0a + 2p_0\frac{1 - p_0a}{2p_0} = 1.$$

За теоремою Банаха маємо, що $A_{k+1}$ є оборотний і

$$\|A_{k+1}^{-1}A_0\| \le (1 - p_0 a - p_0(\|x_0 - x_{k+1}\| + \|x_0 - x_k\|))^{-1}. \tag{12}$$

Далі доведемо, що ітераційний процес є добре визначений для $n = k+1$. Маємо

$$\begin{aligned}\|x_{k+1} - x_{k+2}\| = \|A_{k+1}^{-1}F(x_{k+1})\| = \|A_{k+1}^{-1}(F(x_{k+1}) - F(x_k) - A_k(x_{k+1} - x_k))\| \le \\ \le \|A_{k+1}^{-1}A_0\|\|A_0^{-1}(F(x_{k+1}, x_k) - A_k)\|\|x_k - x_{k+1}\|.\end{aligned} \tag{13}$$

Використовуючи умову (5), отримаємо

$$\|A_0^{-1}(F(x_{k+1}, x_k) - A_k)\| \le p_0(\|x_k - x_{k+1}\| + \|x_{k-1} - x_k\|). \tag{14}$$

З (12), (13) і (14) випливає, що

$$\|x_{k+1} - x_{k+2}\| \le \frac{p_0(\|x_k - x_{k+1}\| + \|x_{k-1} - x_k\|)\|x_k - x_{k+1}\|}{1 - p_0 a - p_0(\|x_0 - x_{k+1}\| + \|x_0 - x_k\|)}.$$

Остаточно, використовуючи (10) і (11), ми отримаємо, що

$$\|x_{k+1} - x_{k+2}\| \le t_{k+1} - t_{k+2}.$$

Тобто ми довели, що ітераційний процес є добре визначений для кожного $n$. З цього випливає, що

$$\|x_n - x_k\| \le t_n - t_k \quad (-1 \le n \le k). \tag{15}$$

Дане твердження показує, що $(x_n)_{n\ge 0}$ є фундаментальною послідовністю, і в просторі $X$ вона є збіжною. З нерівності (15), здійснюючи граничний перехід при $k \to +\infty$, отримуємо (8). Легко бачити, що $x^*$ є коренем рівняння $F(x) = 0$, бо, згідно з (14), можна записати

$$\begin{aligned}\|A_0^{-1}F(x_{k+1})\| = \|A_0^{-1}(F(x_{k+1}, x_k) - A_k)(x_{k+1} - x_k)\| \\ \le p_0(\|x_k - x_{k+1}\| + \|x_k - x_{k-1}\|)\|x_k - x_{k+1}\|.\end{aligned} \tag{16}$$

Теорему доведено. □

У випадку, якщо додатково допустити, що існує друга поділена різниця від функції $F$, яка задовольняє умову Ліпшиця зі сталою $q_0$, то мажорантною функцією для $F(x)$ буде кубічний поліном. Справедлива наступна теорема.

**Теорема 2.** *Нехай $F$ — нелінійний оператор, який визначений на відкритій множині $D$ банахового простору $X$ зі значеннями в банаховому просторі $Y$. Припустимо, що лінійний оператор*

$$A_0 = F(x_0, x_{-1}),$$

*де $x_0\,, x_{-1} \in D$, оборотний і задовольняє наступні умови Ліпшиця*

$$\|A_0^{-1}(F(x,y) - F(u,v))\| \le p_0(\|x-u\| + \|y-v\|), \tag{17}$$

$$\|A_0^{-1}(F(x,y,z)-F(u,y,z))\| \le q_0(\|x-u\|). \tag{18}$$

*Нехай невід'ємні числа $a$ і $c$ такі, що*

$$\|x_0 - x_{-1}\| \le a, \qquad \|A_0^{-1}F(x_0)\| \le c. \tag{19}$$

*Якщо $p_0 a + q_0 a^2 \le 1$, для дійсного полінома*

$$h(t) = -q_0 t^3 - (p_0 + q_0 a)t^2 + [1 - p_0 a - q_0 a^2]t.$$

*виконується нерівність*

$$c \le h(r) = \frac{1}{3} \cdot \frac{p_0 + q_0 a + 2s}{1 - q_0 a^2}\Big(\frac{1 - p_0 a - q_0 a^2}{p_0 + q_0 a + s}\Big)^2, \tag{20}$$

*де*

$$s = \big\{(p_0 + q_0 a)^2 + 3q_0(1 - p_0 a - q_0 a^2)\big\}^{1/2}, \qquad r = \frac{1 - p_0 a - q_0 a^2}{p_0 + q_0 a + s},$$

*і замкнена куля $U_0 = U(x_0, r_0) \subset D$, де $r_0 \in (0, r]$ — корінь рівняння $h(t) = c(1 - q_0 a^2)$, то ітераційний процес (7) є добре визначений і генерована ним послідовність збігається до розв'язку $x^*$ рівняння $F(x) = 0$. Більше того, для всіх $n \in \{-1, 0, 1, 2, \dots\}$ виконується нерівність (8), де*

$$\begin{gathered} t_0 = r_0,\ t_{-1} = r_0 + a, \\ a_0 = p_0 + 3q_0 r_0 + q_0 a,\ b_0 = 3q_0 r_0^2 - 2a_0 r_0 - q_0 a^2 - p_0 a + 1, \\ t_{n+1} = t_n t_{n-1} \cdot \frac{a_0 - q_0(t_n + t_{n-1})}{b_0 + a_0(t_n + t_{n-1}) - q_0(t_n^2 + t_{n-1}t_n + t_{n-1}^2)}, \quad n \in \{0,1,2,\dots\}. \end{gathered} \tag{21}$$

*Доведення.* Відзначимо, що послідовність $(t_n)_{n\ge 0}$ отримується застосуванням ітераційної процедури (7) до полінома $f(t) = -q_0 t^3 + a_0 t^2 + b_0 t$. Очевидно, що ця послідовність монотонно збігається до нуля. Також ми маємо

$$t_{n+1} - t_{n+2} = \Big(\frac{f(t_{n+1}) - f(t_n)}{t_{n+1} - t_n}\Big)^{-1} f(t_{n+1}) =$$

$$= \frac{p_0(t_{n-1} - t_{n+1}) + q_0(t_{n-1} - t_n)^2 + q_0[2t_0 + t_{-1} + t_n + t_{n-1} + t_{n+1})]}{1 - p_0 a - q_0 a^2 - a_0(2t_0 - t_n - t_{n+1}) - q_0(t_{n+1}^2 + t_{n+1}t_n + t_n^2)}(t_n - t_{n+1}) \ge$$

$$\ge \frac{p_0(t_{n-1} - t_{n+1}) + q_0(t_{n-1} - t_n)^2}{1 - p_0 a - q_0 a^2 - p_0(2t_0 - t_n - t_{n+1})}(t_n - t_{n+1}) \tag{22}$$

Доведемо за допомогою методу математичної індукції, що ітераційний процес є добре визначений і що

$$\|x_n - x_{n+1}\| \le t_n - t_{n+1}. \tag{23}$$

Використовуючи (19), (20), (21) і той факт, що $t_0 - t_1 = h(r_0) = c$, ми доводимо, що (23) виконується для $n \in \{-1, 0\}$. Нехай $k$ — невід'ємне число і для всіх $n \le k$ виконується (23). Нехай $A_{k+1} = F(x_{k+1}, x_k)$. Відповідно до (17) і (18) маємо

$$\begin{gathered}\|I - A_0^{-1}A_{k+1}\| = \|A_0^{-1}(A_0 - A_{k+1})\| = \|A_0^{-1}(F(x_{k+1}, x_k) - F(x_k, x_k) + \\ +(F(x_k, x_{k-1}, x_k) - F(2x_k - x_{k-1}, x_{k-1}, x_k)) + F(2x_k - x_{k-1}, x_{k-1}) - \\ -F(x_{k-1}, x_{k-1}) + F(x_{k-1}, x_{k-1}) - F(x_0, x_{k-1}) + F(x_0, x_{k-1}) - F(x_0, x_{-1})\| \le \\ \le q_0\|x_k - x_{k-1}\|^2 + p_0(\|x_{k+1} - x_k\| + 2\|x_k - x_{k-1}\| + \|x_{k-1} - x_0\| + \|x_{k-1} - x_{-1}\|) < \\ < q_0a^2 + p_0a + p_0(2t_0 - t_{k+1} - t_k) < q_0a^2 + p_0a + 2p_0t_0 \le \\ \le q_0a^2 + p_0a + 2p_0r \le q_0a^2 + p_0a + 2p_0\frac{1 - q_0a^2 - p_0a}{2p_0} = 1.\end{gathered}$$

За теоремою Банаха отримаємо, що $A_{k+1}$ є оборотний і

$$\begin{gathered}\|A_{k+1}^{-1}A_0\| \le (1 - q_0\|x_k - x_{k-1}\|^2 - p_0(\|x_{k+1} - x_k\| + \\ +2\|x_k - x_{k-1}\| + \|x_{k-1} - x_0\| + \|x_{k-1} - x_{-1}\|))^{-1}.\end{gathered} \tag{24}$$

Тепер доведемо, що ітераційний процес є добре визначений для $n = k + 1$. Маємо

$$\begin{gathered}\|x_{k+1} - x_{k+2}\| == \|A_{k+1}^{-1}(F(x_{k+1}) - F(x_k) - A_k(x_{k+1} - x_k))\| \le \\ \le \|A_{k+1}^{-1}A_0\|\|A_0^{-1}(F(x_{k+1}, x_k) - A_k)\|\|x_k - x_{k+1}\|.\end{gathered} \tag{25}$$

Використовуючи нерівності (17) і (18), отримаємо

$$\begin{gathered}\|A_0^{-1}(F(x_{k+1}, x_k) - A_k)\| = \|A_0^{-1}(F(x_{k+1}, x_k) - F(x_k, x_k) + F(2x_k - x_{k-1}, x_{k-1}) - \\ -F(x_k, x_{k-1}) + (F(x_k, x_{k-1}, x_k) - F(2x_k - x_{k-1}, x_{k-1}, x_k))(x_k - x_{k-1}))\| \le \\ \le p_0(\|x_k - x_{k+1}\| + \|x_{k-1} - x_k\|) + q_0\|x_{k-1} - x_k\|^2.\end{gathered} \tag{26}$$

З (24), (25) і (26) випливає, що

$$\|x_{k+1} - x_{k+2}\| \le$$
$$\le \frac{(p_0(\|x_k - x_{k+1}\| + \|x_{k-1} - x_k\|) + q_0\|x_{k-1} - x_k\|^2)\|x_k - x_{k+1}\|}{1 - q_0\|x_k - x_{k-1}\|^2 - p_0(\|x_{k+1} - x_k\| + 2\|x_k - x_{k-1}\| + \|x_{k-1} - x_0\| + \|x_{k-1} - x_{-1}\|)}.$$

Остаточно, використовуючи (22) і (23), ми отримаємо, що

$$\|x_{k+1} - x_{k+2}\| \le t_{k+1} - t_{k+2}.$$

Отже, ми довели, що ітераційний процес добре визначений для кожного $n$. Звідси випливає, що

$$\|x_n - x_k\| \le t_n - t_k \quad (-1 \le n \le k),$$

тобто послідовність $(x_n)_{n \ge 0}$ фундаментальна і тому в просторі $X$ збіжна. Як і вище, звідси отримуємо нерівність (8). Легко бачити, що $x^*$ є коренем рівняння $F(x) = 0$, бо, згідно з (26), можна записати

$$\begin{gathered}\|A_0^{-1}F(x_{k+1})\| = \|A_0^{-1}(F(x_{k+1}, x_k) - A_k)(x_{k+1} - x_k)\| \le \\ \le p_0(\|x_k - x_{k+1}\| + \|x_{k-1} - x_k\|) + q_0\|x_{k-1} - x_k\|^2.\end{gathered}$$

Теорему доведено. □

**4. Апостеріорна оцінка похибки методу хорд.** Якщо відомі константи $a, c, p_0, q_0$, то ми можемо обчислити послідовність $(t_n)_{n\geq 0}$ перед отриманням послідовності $(x_n)_{n\geq 0}$ за ітераційним алгоритмом хорд. З допомогою нерівності (8) даються апріорні оцінки похибки методу хорд. Нижче ми отримаємо апостеріорні оцінки похибки, які точніші за апріорні.

**Теорема 3.** *Нехай виконуються умови теореми 1. Позначимо*

$$e_n = p_0(\|x_n - x_{n-1}\| + \|x_{n-1} - x_{n-2}\|)\|x_n - x_{n-1}\|, \quad g_n = 1 - p_0 a - 2p_0\|x_n - x_0\|.$$

*Тоді для $n \in \mathbb{N}$ виконуються нерівності*

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{2e_n}{g_n + (g_n^2 - 4p_0 e_n)^{\frac{1}{2}}} \leq t_n.$$

*Доведення.* З умови (5) отримаємо

$$\begin{gathered}\|I - A_0^{-1}F(x_n, x^*)\| = \\ = \|A_0^{-1}(F(x_0, x_{-1}) - F(x_0, x_0) + F(x_0, x_0) - F(x_n, x_0) + F(x_n, x_0) - F(x_n, x^*)\| \leq \\ \leq\ p_0(\|x_0 - x_{-1}\| + \|x_n - x_0\| + \|x_0 - x_*\|) \leq\ p_0 a + p_0(2\|x_n - x_0\| + \|x_n - x_*\|) \leq \\ \leq p_0 a + p_0(2t_0 - 2t_n + t_n) = p_0 a + 2p_0 t_0 - p_0 t_n < p_0 a + 2p_0 t_0.\end{gathered}$$

Легко бачити, що $p_0 a + 2p_0 t_0 \leq 1$. Тоді за теоремою Банаха існує обернений оператор до оператора поділеної різниці $F(x_n, x^*)$ і

$$\begin{gathered}\|F(x_n, x^*)^{-1}A_0\| \leq \\ \leq (1 - p_0(\|x_0 - x_{-1}\| + \|x_n - x_0\| + \|x_0 - x_*\|))^{-1} \leq (g_n - p_0\|x_n - x^*\|)^{-1}.\end{gathered} \tag{27}$$

З рівності, що визначає оператор поділеної різниці, можемо записати

$$x_n - x^* = F(x_n, x^*)^{-1}(F(x_n) - F(x^*) = (F(x_n, x^*)^{-1}A_0)A_0^{-1}F(x_n).$$

Використовуючи (16) і (27), отримаємо нерівність

$$\|x_n - x^*\| \leq (g_n - p_0\|x_n - x^*\|)^{-1}e_n,$$

звідки випливає

$$\|x_n - x^*\| \leq 2(g_n + (g_n^2 - 4p_0 e_n)^{\frac{1}{2}})^{-1}e_n,$$

а також

$$\begin{gathered}t_n = \frac{p_0 t_n^2 + (1 - p_0 a - 2p_0 r_0)t_n}{p_0 t_n + (1 - p_0 a - 2p_0 r_0)} = \frac{p_0(t_{n-2} - t_n)}{1 - p_0 a - 2p_0(t_0 - t_n) - p_0 t_n}(t_{n-1} - t_n) \geq \\ \geq \frac{e_n}{g_n - p_0\|x_n - x^*\|} \geq \|x_n - x^*\|.\end{gathered} \tag{28}$$

$\square$

У випадку, коли задано другу поділену різницю від функції $F$, що задовольняє умову Ліпшиця зі сталою $q_0$, отримаємо наступну теорему.

**Теорема 4.** *Нехай виконуються умови теореми 2. Для $n \in \mathbb{N}$ правильні нерівності*

$$\|x_n - x^*\| \le \frac{2e_n}{g_n + (g_n^2 - 4p_0e_n)^{\frac{1}{2}}} \le t_n,$$

*де*

$$e_n = p_0(\|x_n - x_{n-1}\| + \|x_{n-2} - x_{n-1}\|) + q_0\|x_{n-1} - x_{n-2}\|^2,$$
$$g_n = 1 - p_0a - q_0a^2 - 2p_0\|x_n - x_0\|.$$

*Доведення.* Доведення цієї теореми подібне до попередньої теореми, при цьому замість нерівностей (28) правильні наступні нерівності

$$t_n = \frac{-q_0t_n^3 + a_0t_n^2 + b_0t_n}{-q_0t_n^2 + a_0t_n + b_0} =$$

$$= \frac{p_0(t_{n-2} - t_n) + q_0(t_{n-2} - t_{n-1})^2 + q_0[2t_0 + t_{-1} + t_{n-1} + t_{n-2} + t_n)]}{1 - p_0a - q_0a^2 - 2p_0(t_0 - t_n) - p_0t_n - (3q_0r_0 + q_0a)(t_0 - t_n)^2 - q_0t_n^2 - q_0at_0} \ge$$

$$\ge \frac{p_0(t_{n-2} - t_n) + q_0(t_{n-2} - t_{n-1})^2}{1 - p_0a - q_0a^2 - 2p_0(t_0 - t_n) - p_0t_n} \ge \frac{e_n}{g_n - p_0\|x_n - x^*\|} \ge \|x_n - x^*\|.$$

□

## ЛІТЕРАТУРА

1. Дэннис Дж. мл., Шнабель Р. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. – М.: Мир, 1988. – 440 с.
2. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. – М.: Мир, 1975. – 558 с.
3. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ – М.: Наука, 1984, 752 с.
4. Ульм С. *Об обобщенных разделенных разностях* // Известия АН ЭССР. Физика. Математика. – 1967. – Т. 16. – С. 13–26, С. 146–156.
5. Трауб Дж. Итерационные методы решения уравнений/ Пер. с англ. Глинкина И. А.: Под ред. Сухарева А. Г. – М.: Мир, 1985.
6. Potra F. A. *On an iterative algorithm of order 1.839... for solving nonlinear operator equations* // Numer. Funct. Anal. and Optimiz. – 1984/85. – V.7, no 1. – P. 75–106.
7. Schwetlick H. Numerische Lösung Nichtlinearer Gleichungen. – Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1979.
8. Schmidt J.W. *Ein Übertragung der Regula falsi auf Gleichungen in Banachraumen* // ZAMM 34. – 1963. – Bd.34. – Part I. – S.1–8, Part II S.97–110.
9. Shakhno S., Gnatyshyn O. *Iterative-Difference Methods for Solving Nonlinear Least-Squares Problem,* in: Progress in Industrial Mathematics at ECMI 98. – Stuttgart: Verlag B.G. Teubner GMBH, 1999. – P.287–294.

Львівський національний університет імені Івана Франка,
факультет прикладної математики та інформатики

*Надійшло 8.09.2003*