УДК 517.95

Г. П. Лопушанська, О. Ю. Чмир

УЗАГАЛЬНЕНІ КРАЙОВІ ЗНАЧЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯННЯ $u_t = \Delta u + F_0(x,t,u)$

H. P. Lopushans'ka, O. Yu. Chmyr. *Generalized boundary values of solutions of the equation* $u_t = \Delta u + F_0(x,t,u)$, Matematychni Studii, **22** (2004) 45–56.

Conditions of the solvability for the equation $u_t = \Delta u + F_0(x,t,u)$ in the classes of functions which accept generalized boundary values on the boundary of a domain are established.

Г. П. Лопушанская, О. Ю. Чмыр. *Обобщённные краевые значения уравнения* $u_t = \Delta u + F_0(x,t,u)$ // Математичні Студії. – 2004. – Т.22, №1. – С.45–56.

Установлены условия разрешимости уравнения $u_t = \Delta u + F_0(x,t,u)$ в классах функций, принимающих на границе области обобщённные краевые значения.

У статті [1] наведено огляд відомих на той час результатів про розв'язність квазілінійних, зокрема півлінійних еліптичних та параболічних рівнянь у нормованих функціональних просторах Соболєва. У багатьох працях встановлювались умови існування невід'ємних розв'язків крайових задач для півлінійних рівнянь вигляду $u_t = \triangle u + f(x,u)$. Зокрема, в [2] для функції $f(x,u) = \varrho(x)u^{\Theta}$, де $\varrho \in \mathbb{L}^m((0,T);\mathbb{L}^r(\Omega))$, $\Theta \in (0,1)$ за однорідних крайових даних, доведено інтегровність невід'ємного розв'язку в $Q = (0,T)\times\Omega$; в [3, 4] для рівнянь $u_t = u_{xx} + (t+1)^{-\frac{\sigma}{2}}|x|^{\sigma}|u|^{p-1}u$ та $u_t = -(-\triangle)^m u + |u|^p$ відповідно встановлено умови існування глобального розв'язку та розв'язків, які трактуються як вибухи; в [5] для рівняння $u_t = \triangle u + |u|^{p-1}u$ досліджується множина S, на якій розв'язки необмежені всередині області. Ми розглядатимемо умови існування розв'язку задачі, який на межі області набуває узагальнених значень.

Нехай Ω_0 — область в $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, обмежена замкненою поверхнею S класу C^∞, $Q_0 = \Omega_0 \times (0,T]$, $Q_1 = S \times (0,T]$, $Q_2 = \Omega_0$; $D(\overline{Q}_i) = \mathbb{C}^\infty(\overline{Q}_i)$, $i \in \{0,1,2\}$;
$D^0(\overline{Q}_i) = \left\{\varphi \in D(\overline{Q}_i) :\ D_t^k\varphi\,|_{t=T} = 0,\ k \in \{0,1,\dots\}\right\}$, $i \in \{0,1\}$,
$D_0(\overline{\Omega_0}) = \{\varphi \in D(\overline{\Omega}_0) :\ \varphi\,|_S = \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\,|_S = 0\}$, ν — орт внутрішньої нормалі до S.

Штрихами позначатимемо простори лінійних неперервних функціоналів на відповідних функціональних просторах, а через $(\varphi, F)_i$ – значення узагальненої функції $F \in D'(\overline{Q}_i)$ на основній функції $\varphi \in D(\overline{Q}_i)$, $i \in \{1,2\}$, через $s(F)$ позначатимемо порядок сингулярності узагальненої функції F [6]. Через C, C_0, $C_1, \dots$, C', C'_0, C'_1 і т.д. позначатимемо додатні сталі.

Розглянемо задачу

$$Lu(x,t) \equiv \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \triangle u(x,t) = F_0(x,t,u(x,t)), \qquad (x,t) \in Q_0, \tag{1}$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 35J67.

© Г. П. Лопушанська, О. Ю. Чмир, 2004

$$u\,|_{Q_1} = F_1(x,t), \qquad (x,t) \in \overline{Q}_1, \tag{2}$$

$$u\,|_{t=0} = F_2(x), \qquad x \in \overline{\Omega_0}, \tag{3}$$

де функція F_0 визначена в $Q_0 \times (-\infty, +\infty)$, $F_1 \in D^{0\prime}(\overline{Q}_1)$, $F_2 \in D_0{}'(\overline{\Omega_0})$.

Нехай $\varrho(x,t) = \min[\varrho(x), \sqrt{t}]$, де $\varrho(x)$, $(x \in \overline{\Omega_0})$ — нескінченно диференційовна невід'ємна функція, додатна всередині Ω_0 і має порядок відстані $d(x)$ від точки x до S біля S, $\varrho_1 = \max_{(y,\tau)\in\overline{Q}_0} \varrho(y,\tau)$, $E_c(z,t) = \exp\{-cz^2t^{-1}\}$, $\tilde{\Phi}^k_c(z,t) = z^k E_c(z,t)$, $k \in \mathbb{R}$, $z > 0$, $t > 0$, $c > 0$, $\eta = (\eta_1, ..., \eta_n)$, $\overline{\eta} = (\eta_1, ..., \eta_n, \eta_0) = (\eta, \eta_0)$, $\eta_i \in \mathbb{Z}_+$, $i \in \{0, \ldots, n\}$, $|\eta|_1 = \eta_1 + ... + \eta_n$, $|\overline{\eta}| = |\eta|_1 + 2\eta_0$, $D^{\overline{\eta}}_{x,t} = \frac{\partial^{|\overline{\eta}|}}{\partial x_1^{\eta_1}\cdot\ldots\cdot\partial x_n^{\eta_n}\cdot\partial t^{\eta_0}}$, $Q_0 = Q_0^1 \cup Q_0^2$, де $Q_0^1 = \{(y,\tau) \in Q_0 : \varrho(y) \le \sqrt{\tau}\}$, $Q_0^2 = \{(y,\tau) \in Q_0 : \varrho(y) > \sqrt{\tau}\}$.

Введемо функціональні простори:
$X_k(\overline{Q}_0) = \{\psi \in D^0(\overline{Q}_0) : \psi\,|_{\overline{Q}_1} = 0, L^*\psi(x,t) = O(\varrho^k(x,t)E_c(\varrho(x,t),t)), \varrho(x,t) \to 0\}$, де $L^* = -(\frac{\partial}{\partial t} + \triangle)$, $k \in \mathbb{R}$,
$\mathcal{M}_k(Q_0)=\{\mathrm{v} : \|\mathrm{v}\|_k = \int_{Q_0}\varrho^k(x,t)E_c(\varrho(x,t),t)|\mathrm{v}(x,t)|\,dxdt < +\infty\}$,
$\mathcal{M}_{k,C}(Q_0) = \{\mathrm{v} \in \mathcal{M}_k(Q_0) : \|\mathrm{v}\|_k \le C\}$ — куля радіуса C у просторі $\mathcal{M}_k(Q_0)$.

Означення 1. *Розв'язком задачі* (1)–(3) називаємо функцію $u \in \mathcal{M}_k(Q_0)$ таку, що

$$\int\limits_{Q_0} L^*\psi{\cdot}u\,dxdt = \int\limits_{Q_0} F_0(x,t,u(x,t))\psi(x,t)\,dxdt + \left(\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial\nu}, F_1(x,t)\right)_1 + (\psi(x,0), F_2(x))_2 \tag{4}$$

для довільної $\psi \in X_k(\overline{Q}_0)$.

З означення 1 випливає необхідна умова розв'язності задачі (1)–(3)

$$\forall\psi \in X_k(\overline{Q}_0) : \int\limits_{Q_0} \psi(x,t)F_0(x,t,u(x,t))\,dxdt < +\infty.$$

Позначимо через $G(x,t,y,\tau)$ функцію Гріна задачі (1)–(3). Її існування та ряд властивостей знаходимо в [7, 8].

Оператори

$$(\widehat{G}_0\varphi)(y,\tau) = \int\limits_{\tau}^{T} dt \int\limits_{\Omega_0} \varphi(x,t)\cdot G(x,t;y,\tau)\,dx,$$

$$(\widehat{G}_1\varphi)(y,\tau) = \int\limits_{\tau}^{T} dt \int\limits_{\Omega_0} \frac{\partial G(x,t,y,\tau)}{\partial\nu_y}\cdot\varphi(x,t)\,dx, \ (\widehat{G}_2\varphi)(y) = \int\limits_{0}^{T} dt \int\limits_{\Omega_0} \varphi(x,t)\cdot G(x,t,y,0)\,dx$$

є спряженими операторами Гріна першої крайової задачі. Із властивостей цих операторів, встановлених у [7], випливає, що
$\widehat{G}_i \colon D(\overline{Q}_0) \to D(\overline{Q}_i)$, $D^0(\overline{Q}_0) \to D^0(\overline{Q}_i)$, $i \in \{0,1\}$; $D(\overline{Q}_0) \to D(\overline{\Omega_0})$, $i = 2$.

У статті [9] встановлено співвідношення

$$\begin{gathered}\widehat{G}_0(L^*\psi)(y,\tau) = \psi(y,\tau),\ (y,\tau) \in \overline{Q}_0,\ \psi \in X_k(\overline{Q}_0),\\ \widehat{G}_1(L^*\psi)(y,\tau) = (\frac{\partial\psi}{\partial\nu})(y,\tau),\ (y,\tau) \in \overline{Q}_1,\ \frac{\partial\psi}{\partial\nu} \in D^0(\overline{Q}_1),\\ \widehat{G}_2(L^*\psi)(y) = \psi(y,0) \in D(\overline{\Omega_0}).\end{gathered} \tag{5}$$

Звідси випливає, що

$$\widehat{G}_0\colon D^0(\overline{Q}_0) \to X_k(\overline{Q}_0), \quad \widehat{G}_1\colon D^0(\overline{Q}_0) \to D^0(\overline{Q}_1), \quad \widehat{G}_2\colon D^0(\overline{Q}_0) \to D(\overline{\Omega_0}).$$

Введемо позначення: $g_1(x,t) = (\frac{\partial}{\partial \nu_y} G(x,t;y,\tau), F_1(y,\tau))_1$, $g_2(x,t) = (G(x,t;y,0), F_2(y))_2$, $h(x,t) = g_1(x,t) + g_2(x,t)$.

Припустимо, що

1) $F_1 \in D^{0'}(\overline{Q}_1)$, $s(F_1) \le q_1$, $q_1 \ge 0$,
2) $F_2 \in D_0'(\overline{\Omega_0})$, $s(F_2) \le q_2$, $q_2 \ge 0$,
3) функція F_0 визначена в $Q_0 \times (-\infty, +\infty)$, (6)
4) $k > \max\{q_1, q_2 - 1\} + n$.

Лема 1. *Нехай виконуються умови припущення (6) щодо k та функцій F_1, F_2. Тоді*

1) $g_1(x,t) = O([\varrho(x,t)]^{-(n+q_1+1)} E_c(\varrho(x,t),t))$ *при* $\varrho(x,t) \to 0$*;*
$g_2(x,t) = O([\varrho(x,t)]^{-(n+q_2)} E_c(\varrho(x,t),t))$ *при* $\varrho(x,t) \to 0$*;*

2) $h \in \mathcal{M}_k(Q_0)$, *а саме, існує така стала* C_1, *що* $\|h\|_k \le C_1 < +\infty$.

Доведення. 1) За припущенням (6)

$$|g_1(x,t)| \le C_2' \max_{|\overline{\gamma}| \le q_1} \sup_{(y,\tau)\in \overline{Q}_1} \left| D^{\overline{\gamma}}_{y,\tau} \frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y} \right|, \ (x,t) \in \overline{Q}_0.$$

Враховуючи оцінки похідних функції Гріна [7, ст. 16, 120], одержуємо

$$|g_1(x,t)| \le C_3' \max_{|\overline{\gamma}| \le q_1} \sup_{(y,\tau)\in \overline{Q}_1} (|x-y|^2 + |t-\tau|)^{\frac{-n-|\overline{\gamma}|-1}{2}} E_c(\sqrt{|x-y|^2 + |t-\tau|}, |t-\tau|) \le$$
$$\le C_4' \sup_{(y,\tau)\in \overline{Q}_1} (|x-y|^2 + |t-\tau|)^{\frac{-(n+q_1+1)}{2}} E_c(\sqrt{|x-y|^2 + |t-\tau|}, |t-\tau|) \le$$
$$\le C_5' [\varrho(x,t)]^{-(n+q_1+1)} E_c(\varrho(x,t),t).$$

Отже, $g_1(x,t) = O([\varrho(x,t)]^{-(n+q_1+1)} E_c(\varrho(x,t),t))$ при $\varrho(x,t) \to 0$.

За припущенням (6)

$$|g_2(x,t)| \le C_2'' \max_{|\eta|_1 \le q_2} \sup_{y \in \overline{\Omega_0}} |D^{\eta}_y G(x,t;y,0)|, \ (x,t) \in \overline{Q}_0.$$

Тому, враховуючи оцінки похідних функції Гріна [7, с.16, 120], подібно одержуємо, що $g_2(x,t) = O([\varrho(x,t)]^{-(n+q_2)} E_c(\varrho(x,t),t))$ при $\varrho(x,t) \to 0$.

2) Розглянемо $\|h\|_k$.

$$\|h\|_k \le \int_{Q_0} \varrho^k(x,t) E_c(\varrho(x,t),t) |g_1(x,t)| \, dxdt + \int_{Q_0} \varrho^k(x,t) E_c(\varrho(x,t),t) |g_2(x,t)| \, dxdt.$$

З одержаних вище оцінок та неперервності $g_i(x,t)$, $i \in \{1,2\}$ всередині Q_0, одержуємо оцінку даного виразу

$$\|h\|_k \le C_5' \int_{Q_0} \max\{[\varrho(x,t)]^{k-(n+q_1+1)}; 1\} \exp\{-2c\varrho^2(x,t)t^{-1}\} \, dxdt +$$
$$+ C_5'' \int_{Q_0} \max\{[\varrho(x,t)]^{k-(n+q_2)}; 1\} \exp\{-2c\varrho^2(x,t)t^{-1}\} \, dxdt.$$

Розділяючи область Q_0 на дві підобласті Q_0^1 та Q_0^2, для k, що задовольняє умову 4) з (6), одержуємо $\|h\|_k \leq C_1 < +\infty$. □

Нехай

$$(H\mathrm{v})(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{\Omega_0} G(x,t;y,\tau) F_0(y,\tau,\mathrm{v}(y,\tau))\,dy, \quad H_1\mathrm{v} = H\mathrm{v} + h.$$

Розглянемо інтегральне рівняння

$$\mathrm{v} = H_1\mathrm{v}. \tag{7}$$

Означення 2. Нехай k задовольняє умову 4) з (6). *Розв'язком інтегрального рівняння (7) в просторі* $\mathcal{M}_k(Q_0)$ називаємо функцію $u \in \mathcal{M}_k(Q_0)$ таку, що $Hu \in \mathcal{M}_k(Q_0)$ і $\|u - H_1 u\|_k = 0$, тобто для функції u справедлива рівність

$$\int_{Q_0} \varrho^k(x,t) E_c(\varrho(x,t),t) |u(x,t) - (Hu)(x,t) - g_1(x,t) - g_2(x,t)|\,dxdt = 0.$$

Теорема 1. *Нехай функція F_0 задовольняє умову*

$$(\forall \psi \in X_k(\overline{Q}_0))(\forall \mathrm{v} \in \mathcal{M}_k(Q_0)) : \int_{Q_0} |\psi(x,t) F_0(x,t,\mathrm{v}(x,t))|\,dxdt < +\infty. \tag{8}$$

Тоді кожний розв'язок інтегрального рівняння (7) в $\mathcal{M}_k(Q_0)$ є розв'язком задачі (1)–(3).

Доведення. За означенням 2 $\varrho^k(x,t)E_c(\varrho(x,t),t)(u(x,t) - (Hu)(x,t) - g_1(x,t) - g_2(x,t)) = 0$ майже скрізь в Q_0. Для довільної $\psi \in X_k(\overline{Q}_0)$ також маємо $L^*\psi(x,t)(u(x,t) - (Hu)(x,t) - g_1(x,t) - g_2(x,t)) = 0$ майже скрізь в Q_0. Тоді

$$\int_{Q_0} L^*\psi \cdot u\,dxdt = \int_{Q_0} (L^*\psi)(x,t) \left(\int_0^t d\tau \int_{\Omega_0} G(x,t,y,\tau) F_0(y,\tau,u(y,\tau))\,dy \right) dxdt +$$

$$+ \int_{Q_0} (L^*\psi)(x,t) \times \left(\frac{\partial}{\partial \nu_y} G(x,t;y,\tau), F_1(y,\tau) \right)_1 dxdt + \int_{Q_0} (L^*\psi)(x,t) (G(x,t,y,0), F_2(y))_2\,dxdt.$$

З означення 2, умови (8), формул (5), теореми Фубіні та її аналогу випливає, що цю рівність можна записати у вигляді

$$\int_{Q_0} L^*\psi \cdot u\,dxdt = \int_{Q_0} \hat{G}_0(L^*\psi)(y,\tau) \cdot F_0(y,\tau,u(y,\tau))\,dyd\tau + (\hat{G}_1(L^*\psi)(y,\tau), F_1(y,\tau))_1 +$$

$$+ (\hat{G}_2(L^*\psi)(y), F_2(y))_2,$$

тобто у вигляді (4). Теорему 1 доведено. □

Теорема 2. *Нехай виконуються умови припущення (6) та існують такі додатні сталі M_1, M_2, що*

$$\int\limits_{Q_0} E_c(\varrho(y,\tau),\tau)|F_0(y,\tau,\mathrm{v}(y,\tau))|\,dyd\tau \le M_1,\ \mathrm{v} \in \mathcal{M}_k(Q_0), \tag{9}$$

$$\int\limits_{Q_0} E_c(\varrho(y,\tau),\tau)|F_0(y,\tau,\mathrm{v}(y,\tau)) - F_0(y,\tau,\mathrm{w}(y,\tau))|\,dyd\tau \le M_2\|\mathrm{v}-\mathrm{w}\|_k,\ \ \mathrm{v},\mathrm{w} \in \mathcal{M}_k(Q_0). \tag{10}$$

Тоді, при достатньо малому значенні ϱ_1, у просторі $\mathcal{M}_k(Q_0)$ існує єдиний розв'язок задачі (1)–(3).

Доведення. Розглянемо функцію $\psi(y,\tau) = \int_{Q_0} \varrho^k(x,t)E_c(\varrho(x,t),t)G(x,t;y,\tau)\,dxdt$. Ця функція є розв'язком такої задачі $L^*\psi(y,\tau) = \varrho^k(y,\tau)E_c(\varrho(y,\tau),\tau)$, $\psi\big|_{\overline{Q}_1} = 0$, $\psi\big|_{\tau=T} = 0$, тобто $\psi \in X_k(\overline{Q}_0)$. Розділяючи особливості підінтегрального виразу у зображенні функції ψ, знаходимо, що ([10])

$$\begin{aligned}&(\forall (y,\tau)\in Q_0):\int\limits_{Q_0} \varrho^k(x,t)E_c(\varrho(x,t),t)|G(x,t;y,\tau)|\,dxdt \le\\ &\le C_2E_c(\varrho(y,\tau),\tau)\cdot\begin{cases}[\varrho(y)]^{k+1-n} + \varrho_1^k[\varrho(y)]^2, & \varrho(y)\le\sqrt{\tau},\\ \tau^{\frac{k+2}{2}}, & \varrho(y) > \sqrt{\tau}.\end{cases}\end{aligned} \tag{11}$$

Отже,

$$|\psi(y,\tau)| \le C_2E_c(\varrho(y,\tau),\tau)\cdot\begin{cases}[\varrho(y)]^{k+1-n} + \varrho_1^k[\varrho(y)]^2, & \varrho(y)\le\sqrt{\tau},\\ \tau^{\frac{k+2}{2}}, & \varrho(y) > \sqrt{\tau}.\end{cases}$$

Тоді

$$\begin{aligned}&\int\limits_{Q_0} |\psi(x,t)F_0(x,t,\mathrm{v}(x,t))|\,dxdt \le C_2\int\limits_{Q_0^1} |F_0(x,t,\mathrm{v}(x,t))|E_c(\varrho(x,t),t)\times\\ &\times\Big([\varrho(x)]^{k+1-n} + \varrho_1^k[\varrho(x)]^2\Big)\,dxdt + C_2\int\limits_{Q_0^2} |F_0(x,t,\mathrm{v}(x,t))|E_c(\varrho(x,t),t)t^{\frac{k+2}{2}}\,dxdt.\end{aligned}$$

При $k > \max\{q_1, q_2-1\}+n$ з (9) випливає обмеженість цього виразу. Оскільки довільна $\psi \in X_k(\overline{Q}_0)$ задовольняє рівняння $L^*\psi = g$, де $g = O(\varrho^k(y,\tau)E_c(\varrho(y,\tau),\tau))$ при $\varrho(y,\tau)\to 0$ і $\psi\,|_{\overline{Q}_1} = 0$, $\psi\,|_{\tau=T} = 0$, то

$$\psi(y,\tau) = O\left(\int_{Q_0} \varrho^k(x,t)E_c(\varrho(x,t),t)G(x,t;y,\tau)\,dxdt\right)$$

і за доведеним щойно, вона задовольняє умову (8). Отже, з (9) випливає (8).

На підставі теореми 1 залишається довести існування і єдиність розв'язку інтегрального рівняння (7) у просторі $\mathcal{M}_k(Q_0)$. Використаємо принцип стиснених відображень: якщо оператор H_1 діє в повному метричному просторі і є оператором стиску, то він має єдину нерухому точку $\mathrm{v} = H_1\mathrm{v}$. Простір $\mathcal{M}_k(Q_0)$ є повним, оскільки $\varrho^k(x,t)E_c(\varrho(x,t),t)\mathrm{v}(x,t) \in \mathbf{L}_1(Q_0)$ при $\mathrm{v} \in \mathcal{M}_k(Q_0)$, а простір $\mathbf{L}_1(Q_0)$ повний.

1) Доведемо спочатку, що $H_1\colon \mathcal{M}_k(Q_0) \to \mathcal{M}_k(Q_0)$. Справді,

$$\|(H_1 \mathrm{v})\|_k \le \|(H\mathrm{v})\|_k + \|h\|_k = \int\limits_{Q_0} \varrho^k(x,t) E_c(\varrho(x,t),t)\times$$

$$\times \left| \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\Omega_0} G(x,t;y,\tau) F_0(y,\tau,\mathrm{v}(y,\tau))\, dy \right| dxdt + \|h\|_k.$$

Але зі скінченності інтегралу

$$\int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_0} |F_0(y,\tau,\mathrm{v}(y,\tau))| \left(\int\limits_\tau^T dt \int\limits_{\Omega_0} \varrho^k(x,t) E_c(\varrho(x,t),t) |G(x,t;y,\tau)|\, dx \right) dyd\tau \tag{12}$$

за теоремою Фубіні матимемо скінченність $\|(H\mathrm{v})\|_k$. З врахуванням (11) для (12) отримаємо оцінку

$$C_2 \int\limits_{Q_0^1} |F_0(y,\tau,\mathrm{v}(y,\tau))| E_c(\varrho(y,\tau),\tau) \Big([\varrho(y)]^{k+1-n} + \varrho_1^k [\varrho(y)]^2 \Big)\, dyd\tau +$$

$$+ C_2 \int\limits_{Q_0^2} |F_0(y,\tau,\mathrm{v}(y,\tau))| E_c(\varrho(y,\tau),\tau) \tau^{\frac{k+2}{2}}\, dyd\tau.$$

Враховуючи (9), одержуємо $\|H\mathrm{v}\|_k \le C_3(\varrho_1)\cdot M_1$, де $C_3(\varrho_1) = C_2\cdot(\varrho_1^{k+1-n} + 2\varrho_1^{k+2}) \to 0$ при $\varrho_1 \to 0$. За лемою 1, $\|h\|_k \le C_1 < +\infty$. Отже, $\|(H_1\mathrm{v})\|_k \le C_3(\varrho_1)\cdot M_1 + C_1 < +\infty$. Це означає, що оператор H_1 діє із простору $\mathcal{M}_k(Q_0)$ в $\mathcal{M}_k(Q_0)$.

2) Перевіримо тепер, чи оператор H_1 є стиском.

Для $\mathrm{v}, \mathrm{w} \in \mathcal{M}_k(Q_0)$ розглянемо

$$\|(H_1\mathrm{v}) - (H_1\mathrm{w})\|_k \le \int\limits_{Q_0} \varrho^k(x,t) E_c(\varrho(x,t),t) \left(\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\Omega_0} |G(x,t;y,\tau)| \cdot |F_0(y,\tau,\mathrm{v}(y,\tau)) - \right.$$

$$\left. - F_0(y,\tau,\mathrm{w}(y,\tau))|\, dy \right) dxdt. \tag{13}$$

Використовуючи (11) та (10), і те, що k задовольняє умову 4) з (6), отримуємо

$$\int\limits_{Q_0} |F_0(y,\tau,\mathrm{v}(y,\tau)) - F_0(y,\tau,\mathrm{w}(y,\tau))| \left(\int\limits_\tau^T dt \int\limits_{\Omega_0} \varrho^k(x,t) E_c(\varrho(x,t),t) |G(x,t;y,\tau)|\, dx \right) dyd\tau \le$$

$$\le C_2 \int\limits_{Q_0^1} |F_0(y,\tau,\mathrm{v}(y,\tau)) - F_0(y,\tau,\mathrm{w}(y,\tau))| E_c(\varrho(y,\tau),\tau) \Big([\varrho(y)]^{k+1-n} + \varrho_1^k [\varrho(y)]^2 \Big)\, dyd\tau +$$

$$+C_2 \int\limits_{Q_0^2} |F_0(y,\tau,\mathrm{v}(y,\tau)) - F_0(y,\tau,\mathrm{w}(y,\tau))| E_c(\varrho(y,\tau),\tau)\tau^{\frac{k+2}{2}}\, dyd\tau \le C_3(\varrho_1) M_2 \|\mathrm{v}-\mathrm{w}\|_k.$$

Звідси та з (13) за теоремою Фубіні $\|(H_1\mathrm{v}) - (H_1\mathrm{w})\|_k \le C_3(\varrho_1)\cdot M_2\|\mathrm{v}-\mathrm{w}\|_k$. Вибираючи ϱ_1 настільки малим, щоб $0 < C_3(\varrho_1)\cdot M_2 < 1$ одержуємо, що H_1 є оператором стиску. Теорему 2 доведено. □

Зауваження 1. При k, яке задовольняє умову 4) з (6), умова (10), зокрема, виконується за достатньо малого значення ϱ_1, якщо

$$(\forall \mathrm{v} \in \mathcal{M}_k(Q_0)) : \frac{\partial F_0(x,t,\mathrm{v}(x,t))}{\partial \mathrm{v}} \text{ — обмежена всередині } Q_0 \tag{14}$$

і

$$(\exists \varepsilon \ge 0)(\forall \mathrm{v} \in \mathcal{M}_k(Q_0)) : \frac{\partial F_0(x,t,\mathrm{v}(x,t))}{\partial \mathrm{v}} = O([\varrho(x,t)]^{k+\varepsilon}) \quad (\varrho(x,t) \to 0). \tag{15}$$

Справді, тоді одержуємо існування такої додатної сталої M_3, що

$$(\forall (y,\tau) \in \overline{Q}_0)\ (\forall \mathrm{v} \in \mathcal{M}_k(Q_0)) : \varrho^{-k-\varepsilon}(y,\tau)\left|\frac{\partial F_0(y,\tau,\mathrm{v}(y,\tau))}{\partial \mathrm{v}}\right| \le M_3.$$

Для $\mathrm{v},\mathrm{w} \in \mathcal{M}_k(Q_0)$

$$\int\limits_{Q_0} E_c(\varrho(y,\tau),\tau)|F_0(y,\tau,\mathrm{v}(y,\tau)) - F_0(y,\tau,\mathrm{w}(y,\tau))|\, dyd\tau \le$$

$$\le \int\limits_{Q_0} E_c(\varrho(y,\tau),\tau)\left|\int\limits_0^1 \frac{\partial F_0}{\partial \mathrm{v}}(y,\tau,\mathrm{v}(y,\tau) + \alpha(\mathrm{v}(y,\tau) - \mathrm{w}(y,\tau)))\, d\alpha(\mathrm{v}(y,\tau) - \mathrm{w}(y,\tau))\right| dyd\tau \le$$

$$\le \int\limits_{Q_0} \varrho^{-k-\varepsilon}(y,\tau)\varrho^{\varepsilon}(y,\tau)\varrho^{k}(y,\tau)E_c(\varrho(y,\tau),\tau)\times$$

$$\times \int\limits_0^1 \left|\frac{\partial F_0}{\partial \mathrm{v}}(y,\tau,\mathrm{v}(y,\tau) + \alpha(\mathrm{v}(y,\tau) - \mathrm{w}(y,\tau)))\right| d\alpha|(\mathrm{v}(y,\tau) - \mathrm{w}(y,\tau))|\, dyd\tau \le M_3\varrho_1^{\varepsilon}\|\mathrm{v}-\mathrm{w}\|_k.$$

З теореми 2 та зауваження 1 випливає наступне твердження

Наслідок 1. *Нехай виконуються умови (6), а функція F_0 задовольняє умови (9), (14), (15). Тоді, при достатньо малому значенні ϱ_1, у просторі $\mathcal{M}_k(Q_0)$ існує єдиний розв'язок задачі (1)–(3).*

Зауваження 2. Подібно до доведення теореми 2 одержуємо неперервність оператора H_1 за умови існування таких сталих $M_4 > 0$, $\mu > 0$, що

$$\int\limits_{Q_0} E_c(\varrho(y,\tau),\tau)|F_0(y,\tau,\mathrm{v}(y,\tau)) - F_0(y,\tau,\mathrm{w}(y,\tau))|\, dyd\tau \le M_4\|\mathrm{v}-\mathrm{w}\|_k^{\mu},\ \mathrm{v},\mathrm{w} \in \mathcal{M}_k(Q_0). \tag{16}$$

Лема 2. *Нехай виконуються умови 6) щодо функцій F_j, $j \in \{0,1,2\}$, а F_0, крім того, задовольняє умову (9) і $k > \max\{q_1+2, q_2+1\}+n$. Тоді оператор H_1 є відносно компактний в $\mathcal{M}_k(Q_0)$.*

Доведення. Оскільки $\varrho^k(x,t)E_c(\varrho(x,t),t)\mathrm{v}(x,t) \in \mathbf{L}_1(Q_0)$, при $\mathrm{v} \in \mathcal{M}_k(Q_0)$, то за теоремою Рісса [11, с.242] для компактності H_1 в $\mathcal{M}_k(Q_0)$ необхідно і досить, щоб виконувались умови:

a) існує така стала $C_4 > 0$, що $\|(H_1\mathrm{v})\|_k \le C_4$ для довільної $\mathrm{v} \in \mathcal{M}_{k,C}(Q_0)$;

b) для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що для таких $(z,s) \in Q_0$, що $|z| \le \delta$, $|s| \le \delta$ та довільної $\mathrm{v} \in \mathcal{M}_{k,C}(Q_0)$

$$\int\limits_{Q_0} |\tilde{\Phi}_c^k(\varrho(x+z,t+s),t+s)(H_1\mathrm{v})(x+z,t+s) - \tilde{\Phi}_c^k(\varrho(x,t),t)(H_1\mathrm{v})(x,t)|\,dxdt \le \varepsilon. \tag{17}$$

Доведення a) проведено у доведенні теореми 2.

Доведемо b). Ліву частину (17) записуємо у вигляді

$$\int\limits_{Q_0}\Bigg|\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\Omega_0} [\tilde{\Phi}_c^k(\varrho(x+z,t+s),t+s)G(x+z,t+s;y,\tau) - \tilde{\Phi}_c^k(\varrho(x,t),t)G(x,t;y,\tau)]\times$$

$$\times F_0(y,\tau,\mathrm{v}(y,\tau))\,dy\Bigg|\,dxdt + \int\limits_{Q_0}|\tilde{\Phi}_c^k(\varrho(x+z,t+s),t+s)h(x+z,t+s)-$$

$$-\tilde{\Phi}_c^k(\varrho(x,t),t)h(x,t)|dxdt=$$

$$= \int\limits_{Q_0}\Bigg|\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\Omega_0} \sum_{l=1}^n \int\limits_0^1 \frac{\partial}{\partial x_l}\big(\tilde{\Phi}_c^k(\varrho(x+\alpha z,t+\alpha s),t+\alpha s)G(x+\alpha z,t+\alpha s;y,\tau)\big)\,d\alpha\times$$

$$\times z_l \cdot F_0(y,\tau,\mathrm{v}(y,\tau))\,dy\Bigg|\,dxdt + \int\limits_{Q_0}\Bigg|\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\Omega_0}\int\limits_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\big(\tilde{\Phi}_c^k(\varrho(x+\alpha z,t+\alpha s),t+\alpha s)\times$$

$$\times G(x+\alpha z,t+\alpha s;y,\tau)\big)\,d\alpha\cdot s\cdot F_0(y,\tau,\mathrm{v}(y,\tau))\,dy\Bigg|\,dxdt+$$

$$+\int\limits_{Q_0}\Bigg|\sum_{l=1}^n\int\limits_0^1 \frac{\partial}{\partial x_l}\big(\tilde{\Phi}_c^k(\varrho(x+\alpha z,t+\alpha s),t+\alpha s)h(x+\alpha z,t+\alpha s)\big)\,d\alpha\cdot z_l\Bigg|\,dxdt+$$

$$+\int\limits_{Q_0}\Bigg|\int\limits_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\big(\tilde{\Phi}_c^k(\varrho(x+\alpha z,t+\alpha s),t+\alpha s)h(x+\alpha z,t+\alpha s)\big)\,d\alpha\cdot s\Bigg|\,dxdt.$$

Останні інтеграли оцінюємо подібно до того, як ми це робили у доведеннях теореми 2 та леми 1 і одержуємо (17) при $k > \max\{q_1+2, q_2+1\}+n$. Лему 2 доведено. □

Теорема 3. *Нехай для функцій виконуються умови (6) і $k > \max\{q_1+2, q_2+1\}+n$.*

1^0. *Якщо існують такі сталі $\mu \in (0,1)$, $M_4 > 0$, $M_5 > 0$, що виконується умова (16) і*

$$(\forall \mathrm{v} \in \mathcal{M}_{k,C}(Q_0)) : \int\limits_{Q_0} E_c(\varrho(y,\tau),\tau)|F_0(y,\tau,\mathrm{v}(y,\tau))|\,dyd\tau \le M_5\|\mathrm{v}\|_k^{\mu}, \tag{18}$$

то у просторі $\mathcal{M}_k(Q_0)$ існує розв'язок задачі (1)–(3).

2^0. *Якщо ж виконуються умова (16) зі сталою $\mu = 1$ та умова (18) при $\mu \in (0,1]$ або*

$$(\forall \mathrm{v} \in \mathcal{M}_k(Q_0)) : \int\limits_{Q_0} E_c(\varrho(y,\tau),\tau)|F_0(y,\tau,\mathrm{v}(y,\tau))|\,dyd\tau \le M_5' < +\infty, \tag{19}$$

то для достатньо малого значення ϱ_1 у просторі $\mathcal{M}_k(Q_0)$ існує єдиний розв'язок задачі (1)–(3).

Доведення. Доведення першого з тверджень теореми 3 проводимо за допомогою теореми Шаудера [11, с.291], а другого — за принципом стискуючих відображень.

Оператор H_1 відображає $\mathcal{M}_{k,C}(Q_0)$ на свою частину. 2) H_1 є цілком неперервним оператором в $\mathcal{M}_k(Q_0)$. Справді, міркуючи як і при доведенні теореми 2, використовуючи (18) та лему 1, одержуємо
$\|H_1\mathrm{v}\|_k \le C_3(\varrho_1)M_5\|\mathrm{v}\|_k^{\mu} + \|h\|_k \le C_3(\varrho_1)M_5C^{\mu} + C_1$ для $\mathrm{v} \in \mathcal{M}_{k,C}(Q_0)$ та $\mu \in (0,1)$. Для довільних додатних $C_3(\varrho_1)$, M_5, C_1 існує така стала $C_0 > 0$, що $C_3(\varrho_1)M_5C^{\mu} + C_1 < C$ для всіх $C > C_0$.

Доведемо тепер, що H_1 є цілком неперервним оператором в $\mathcal{M}_k(Q_0)$. Неперервність оператора H_1 випливає з (16) та зауваження 1. Оскільки з (18) випливає (9), то компактність оператора H_1 одержуємо за лемою 2.

Якщо у формулі (18) $\mu = 1$ (або виконується (19)), то, міркуючи подібно, як у доведенні теореми 2, одержуємо $\|H_1\mathrm{v}\|_k \le C_3(\varrho_1)M_5\|\mathrm{v}\|_k + \|h\|_k < +\infty$ для довільних $\mathrm{v} \in \mathcal{M}_k(Q_0)$ ($\|H_1\mathrm{v}\|_k \le C_3(\varrho_1)M_5' + \|h\|_k < +\infty$ для довільних $\mathrm{v} \in \mathcal{M}_k(Q_0)$).

Якщо ж у формулі (16) $\mu = 1$, то при доведенні теореми 2 встановлено, що оператор H_1 є оператором стиску для достатньо малого значення ϱ_1. Теорему 3 доведено. □

Зауваження 3. При $k > \max\{q_1+2, q_2+1\} + n$ функція $F_0(x,t,\mathrm{v}) = |\mathrm{v}|^{1+\beta}$, де $\beta \in (-1, -\frac{k}{k+1})$, задовольняє умови (16) та (18) зі сталою $\mu = 1+\beta$.

Перевіримо умову (16). Використовуючи нерівність Гельдера, отримуємо

$$\int\limits_{Q_0} E_c(\varrho(y,\tau),\tau)\left||\mathrm{v}(y,\tau)|^{1+\beta} - |\mathrm{w}(y,\tau)|^{1+\beta}\right|dyd\tau \le$$

$$\le \int\limits_{Q_0} E_c(\varrho(y,\tau),\tau)|\mathrm{v}(y,\tau) - \mathrm{w}(y,\tau)|^{1+\beta}\,dyd\tau =$$

$$= \int\limits_{Q_0} (\varrho^k(y,\tau)E_c(\varrho(y,\tau),\tau)|\mathrm{v}(y,\tau)-\mathrm{w}(y,\tau)|)^{1+\beta}[\varrho(y,\tau)]^{-k(1+\beta)}\exp\{c\varrho^2(y,\tau)\tau^{-1}\beta\}\,dyd\tau \le$$

$$\le \|\mathrm{v}-\mathrm{w}\|_k^{1+\beta}\left(\int\limits_{Q_0}[\varrho(y,\tau)]^{\frac{k(1+\beta)}{\beta}}E_c(\varrho(y,\tau),\tau)\,dyd\tau\right)^{-\beta}.$$

Подаючи Q_0 як Q_0^1 та Q_0^2 для $-1 < \beta < -\frac{k}{k+1}$, одержуємо

$$I = \int\limits_{Q_0} [\varrho(y,\tau)]^{\frac{k(1+\beta)}{\beta}} E_c(\varrho(y,\tau),\tau)\, dyd\tau < +\infty.$$

Отже, (16) виконується.

Перевіримо виконання умови (18). Проводячи подібні міркування з використанням нерівності Гельдера, одержуємо

$$\int\limits_{Q_0} E_c(\varrho(y,\tau),\tau)|\mathrm{v}(y,\tau)|^{1+\beta}\, dyd\tau \le$$

$$\le \left(\int\limits_{Q_0} [\varrho(y,\tau)]^{\frac{k(1+\beta)}{\beta}} E_c(\varrho(y,\tau),\tau)\, dyd\tau \right)^{-\beta} \|\mathrm{v}\|_k^{1+\beta} \le I\|\mathrm{v}\|_k^{1+\beta},$$

де інтеграл I збігається при $-1 < \beta < -\frac{k}{k+1}$.

Розглянемо приклад

$$Lu(x,t) \equiv \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \triangle u(x,t) = |u(x,t)|^{1+\beta}, \qquad (x,t) \in Q_0, \tag{20}$$

$$u\,|_{Q_1} = F_1(x,t), \qquad (x,t) \in \overline{Q}_1, \tag{21}$$

$$u\,|_{t=0} = F_2(x), \qquad x \in \overline{\Omega_0}, \tag{22}$$

де $-1 < \beta < 0$, $F_1 \in D^{0\prime}(\overline{Q}_1)$, $F_2 \in D_0{}'(\overline{\Omega_0})$.

Із зауваження 3 та теореми 3 випливає наступне твердження

Наслідок 2. *Нехай виконуються умови припущення (6) на функції* F_1, F_2, $k > \max\{q_1 + 2, q_2 + 1\} + n$, $\beta \in (-1, -\frac{k}{k+1})$. *Тоді у просторі* $\mathcal{M}_k(Q_0)$ *існує розв'язок задачі (20)–(22).*

Використовуючи наслідок 1, можна знайти характер поведінки розв'язку задачі (20)–(22) біля межі області залежно від порядків сингулярностей узагальнених функцій F_1 та F_2.

Введемо функціональний простір $\mathcal{M}_{k,\alpha_1,\alpha_2}(Q_0) = \mathcal{M}_{\alpha_1,\alpha_2}(Q_0,\, \partial Q_0) \cap \mathcal{M}_k(Q_0)$, де

$$\mathcal{M}_{\alpha_1,\alpha_2}(Q_0,\, \partial Q_0) = \{\mathrm{v} : |\mathrm{v}(y,\tau)| \le V_0(y,\tau)\},$$

а

$$V_0(y,\tau) = \begin{cases} \hat{C}\varrho^{\alpha_1}(y)E_c(\varrho(y),\tau), & \varrho(y) \le \sqrt{\tau}, \\ \hat{C}\tau^{\frac{\alpha_2}{2}}e^{-c}, & \varrho(y) > \sqrt{\tau}, \end{cases}$$

при $\varrho\,(y,\tau) \to 0$, $\hat{C} > 0$, $c > 0$ $k \in \mathbb{R}$, $\alpha_1 \in \mathbb{R}$, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$.

Оскільки для $\mathrm{v} \in \mathcal{M}_{\alpha_1,\alpha_2}(Q_0,\, \partial Q_0)$

$$\int\limits_{Q_0} \varrho^k(y,\tau)E_c(\varrho(y,\tau),\tau)|\mathrm{v}(y,\tau)|\, dyd\tau \le \hat{C}\int\limits_{Q_0^1} \varrho^{k+\alpha_1}(y)\exp\{-2c\varrho^2(y)\tau^{-1}\}\, dyd\tau +$$

$$+\hat{C}\int\limits_{Q_0^2} \tau^{\frac{k+\alpha_2}{2}} e^{-2c}\, dyd\tau < +\infty$$

при $k+\alpha_1 > -1$ та $\frac{k}{2}+\frac{\alpha_2}{2} > -1$, то $\mathcal{M}_{k,\alpha_1,\alpha_2}(Q_0) \neq \emptyset$ при $\alpha_i > -k-i$, $i \in \{1,2\}$. Нехай $\mathcal{M}_{k,\alpha_1,\alpha_2,C}(Q_0) = \{\mathrm{v} \in \mathcal{M}_{k,\alpha_1,\alpha_2}(Q_0) : \|\mathrm{v}\|_k \leq C\}$ — куля радіуса C в просторі $\mathcal{M}_{k,\alpha_1,\alpha_2}(Q_0)$.

Лема 3. *Нехай виконуються умови (6),* $\beta \in \left(-1, \min\left\{-1+\frac{1}{n+q_1+1}; -1+\frac{1}{n+q_2}\right\}\right)$, $\max\{-\frac{i}{1+\beta}, -k-i\} < \alpha_i \leq \min\{-\frac{m_i}{\beta}, -(n+q_1+1), -(n+q_2)\}$, $i \in \{1,2\}$, *де* $m_1 = 1-n$, $m_2 = 2$. *Тоді оператор* H_1 *відображає* $\mathcal{M}_{k,\alpha_1,\alpha_2}(Q_0)$ *в себе.*

Доведення. Для $\mathrm{v} \in \mathcal{M}_{k,\alpha_1,\alpha_2}(Q_0)$ маємо

$$|(H\mathrm{v})(x,t)| \leq \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\Omega_0} |G(x,t;y,\tau)| |\mathrm{v}(y,\tau)|^{\beta+1}\, dy.$$

Використовуючи (11), знаходимо, що при $\varrho(x) \leq \sqrt{t}$ та $-1 < \alpha_1(1+\beta) \leq 0$

$$|(H\mathrm{v})(x,t)| \leq C_5 E_c(\varrho(x),t)\Big([\varrho(x)]^{\alpha_1(1+\beta)+1-n} + [\varrho(x)]^{\alpha_1(1+\beta)+2}\Big),$$

а при $\varrho(x) > \sqrt{t}$

$$|(H\mathrm{v})(x,t)| \leq C_5 e^{-c} t^{\frac{\alpha_2(1+\beta)+2}{2}},$$

$\alpha_1 > -\frac{1}{1+\beta}$, $\alpha_2 > -\frac{2}{1+\beta}$.

Враховуючи твердження леми 1, одержуємо, що при $\varrho(x) \leq \sqrt{t}$ та $-1 < \alpha_1(1+\beta) \leq 0$

$$|(H_1\mathrm{v})(x,t)| \leq C_6 E_c\{\varrho(x),t\}\Big([\varrho(x)]^{\alpha_1(1+\beta)+1-n} + [\varrho(x)]^{\alpha_1(1+\beta)+2} +$$

$$+[\varrho(x)]^{-(n+q_1+1)} + [\varrho(x)]^{-(n+q_2)}\Big) = C_6 E_c\{\varrho(x),t\}[\varrho(x)]^{\alpha_1}\Big([\varrho(x)]^{\alpha_1\beta+1-n} + [\varrho(x)]^{\alpha_1\beta+2} +$$

$$+[\varrho(x)]^{-(n+q_1+1+\alpha_1)} + [\varrho(x)]^{-(n+q_2+\alpha_1)}\Big),$$

а при $\varrho(x) > \sqrt{t}$

$$|(H_1\mathrm{v})(x,t)| \leq C_6 e^{-c} t^{\frac{\alpha_2}{2}} \left(t^{\frac{\alpha_2\beta+2}{2}} + t^{-\frac{n+q_1+1+\alpha_2}{2}} + t^{-\frac{n+q_2+\alpha_2}{2}}\right).$$

Враховуючи обмеженість $\varrho(x,t)$ в Q_0, за умов

$$\begin{cases} -1 < \alpha_1(1+\beta) \leq 0 \\ \alpha_1\beta + 1 - n \geq 0 \\ \alpha_1\beta + 2 \geq 0 \\ -(n+q_1+1+\alpha_1) \geq 0 \\ -(n+q_2+\alpha_1) \geq 0 \end{cases} \quad \text{та} \quad \begin{cases} \frac{\alpha_2\beta+2}{2} \geq 0 \\ -\frac{n+q_1+1+\alpha_2}{2} \geq 0 \\ -\frac{n+q_2+\alpha_2}{2} \geq 0 \end{cases}, \tag{23}$$

знаходимо оцінку оператора H_1

$$|(H_1\mathrm{v})(x,t)| \leq C_7 \begin{cases} [\varrho(x)]^{\alpha_1}\exp\{-c\varrho^2(x)t^{-1}\}, & \varrho(x) \leq \sqrt{t}, \\ t^{\frac{\alpha_2}{2}} e^{-c}, & \varrho(x) > \sqrt{t}, \end{cases}$$

де $C_7 = C_7(\varrho_1)$ — додатна стала.

З попередніх оцінок для α_i, $i \in \{1,2\}$, системи нерівностей (23) виконуються при $\max\{-\frac{i}{1+\beta}, -k-i\} < \alpha_i \le \min\{-\frac{m_i}{\beta}, -(n+q_1+1), -(n+q_2)\}$, $i \in \{1,2\}$, де $m_1 = 1-n$, $m_2 = 2$ та $-1 < \beta < \min\{-1+\frac{1}{n+q_1+1}; -1+\frac{1}{n+q_2}\})$. Лему 3 доведено. □

Теорема 4. *Нехай виконуються умови (6) щодо функцій F_1, F_2, $k > \max\{q_1+2, q_2+1\}+n$, $\beta \in (-1, \min\{-1+\frac{1}{n+q_1+1}; -1+\frac{1}{n+q_2}; -\frac{k}{k+1}\})$, $\max\{-\frac{i}{1+\beta}, -k-i\} < \alpha_i \le \min\{-\frac{m_i}{\beta}, -(n+q_1+1), -(n+q_2)\}$, $i \in \{1,2\}$, де $m_1 = 1-n$, $m_2 = 2$. Тоді в просторі $\mathcal{M}_{k,\alpha_1,\alpha_2}(Q_0)$ існує розв'язок задачі (20)–(22).*

Доведення. Використаємо теорему Шаудера. За лемою 3 оператор H_1 відображає множину $\mathcal{M}_{k,\alpha_1,\alpha_2}(Q_0)$ в себе. Згідно з лемою 1 та зауваженням 3 $\|(H_1\mathrm{v})\|_k \le C_8\|\mathrm{v}\|_k^{1+\beta} + C_1$. Відомо, що при $0 < 1+\beta < 1$ існує така стала $C_0 > 0$, що $C_8C^{1+\beta} + C_1 < C$ для всіх $C > C_0$, тому одержуємо, що $\|(H_1\mathrm{v})\|_k \le C$ для довільної $\mathrm{v} \in \mathcal{M}_{k,C}(Q_0)$ при $C > C_0$. Звідси та із леми 3 одержуємо, що оператор H_1 відображає $\mathcal{M}_{k,\alpha_1,\alpha_2,C}(Q_0)$ в себе.

Із зауваження 3 та леми 2 випливає, що оператор H_1 є цілком неперервним в $\mathcal{M}_{k,\alpha_1,\alpha_2}(Q_0)$. Теорему 4 доведено. □

ЛІТЕРАТУРА

1. Дубинский Ю. А. *Квазилинейные эллиптические и параболические уравнения любого порядка* // Успехи мат. наук. – 1968. – Т. 23 (39), №1. – С.45–90.
2. Palmeri Maria Carla. *Existence and regularity results for some sublinear parabolic equations* // Commun. Appl. Anal. – 2002. – V.6, №3.– P.297–316.
3. Li Junfeng, Liu Weiau, Lu Gang. *Global existence and blow-up of signchanging solutions in semilinear parabolic equations* // Shuxue wuli xuebao. Ser A=Acta Math. Sci. – 2002. – V.22, №2. – P.150–156.
4. Galaktionov V.A., Pohozaev S.I. *Existence and blow-up for higher-order semilinear parabolic equations: majorizing order-preserving operators* // Indiana Univ. Math. J. – 2002. – V.51, No 6. – P.1321–1338.
5. Zaag Haten. *On the regularity of the blow-up set for semilinear heat equations* // Ann. Inst. H. Poincare. Anal. nonlineaire. – 2002. – V.19, №5. – P.505–542.
6. Владимиров B.C. Уравнения математической физики.—М.: Наука, 1988. – 512 с.
7. Ивасишен С.Д. Матрицы Грина параболических граничных задач. – К.: Выща школа, 1990. – 200 с.
8. Эйдельман С.Д. Параболические системы. – М.: Наука, 1964.– 443 с.
9. Лопушанская Г. П. *О решении с помощью матрицы Грина параболической граничной задачи в пространстве обобщенных функций* // Укр. мат. журн. – 1986. – Т.38, №6. – С.795–798.
10. Лопушанська Г.П., Чмир О.Ю. *Про деякі властивості спряжених операторів Гріна параболічної крайової задачі* // Науковий вісник Чернівецького університету. – 2004. – Вип.191–192. Математика.– С.82–88.
11. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. – М.: Наука, 1965. – 520 с.

Львівський національний університет імені Івана Франка
diffeq@franko.lviv.ua

Надійшло 11.12.2003
Після переробки 10.03.2004
Після переробки 20.06.2004