УДК 517.518

Э. А. Стороженко*

РАЗНОСТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ПОЛИНОМОВ В L_0

E. A. Storozhenko. *Difference inequalities for polynomials in* L_0, Matematychni Studii, **22** (2004) 27–34.

The sharp estimates for the increment of trigonometric and algebraic polynomials are established in L_0 by means of the measures of these polynomials.

Э. А. Стороженко. *Разностные неравенства для полиномов в* L_0 // Математичні Студії. – 2004. – Т.22, №1. – С.27–34.

Получены точные оценки приращения тригонометрических и алгебраических полиномов в L_0 посредством мер самих полиномов.

1. Среди всевозможных неравенств С. Н. Бернштейна для тригонометрических полиномов T_n обратим внимание на более позднюю оценку (см. [1])

$$\|T_n(x+h)-T_n(x-h)\|_C \le 2\sin nh \quad \|T_n\|_C, \qquad 0<h\le \frac{\pi}{2n}, \tag{1}$$

из которой при $h\to 0$ вытекает ставшее уже классическим неравенство

$$\|T_n'\|_C \le n\|T_n\|_C. \tag{2}$$

Так как оценка (1) получена значительно позже (1948), чем (2) (1912), то первенство в приложениях получило неравенство (2). Однако в некоторых вопросах использование (1) более естественно (например, при доказательстве теорем, обратных теоремам Джексона). Неравенства (1) и (2) обобщались в разных направлениях, в частности на пространства L_p. Напомним, что

$$\|T_n\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |T_n(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad 0<p<\infty$$

а для крайнего случая

$$\|T_n\|_0 = \lim_{p\to 0}\|T_n\|_p = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|T_n(t)|dt\right).$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 30C10, 30C15.

*Работа частично поддержана ДФФД, грант Ф7/329-2001

Неравенство (2) имеет место в L_p для произвольного $p \geq 0$, а неравенство (1) для $p \geq 1$ (см. [2], а также обзорную статью [3]). Если же $p \in (0,1)$, то применяя формулу Тейлора и многократно оценку (2), несложно доказать справедливость аналога (1) в форме

$$\|T_n(x+h) - T_n(x)\|_p \leq C_p nh \|T_n\|_p, \qquad 0 < h \leq \frac{1}{n}, \tag{3}$$

где константа C_p неограниченно увеличивается при $p \to 0$. Здесь и всюду ниже вместо симметрической разности будем рассматривать обычную.

Возникает вопрос, является ли указанная зависимость C_p от p результатом метода доказательства или она по существу? Ответ можно получить при помощи аналога оценки (3) в L_0. В данной работе доказана следующая теорема

Теорема 1. *Для любого тригонометрического полинома $T_n(t)$ выполняется неравенство*

$$\|T_n(t+h) - T_n(t)\|_0 \leq 2\sin\frac{nh}{2}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2n} - \frac{h}{4}\right)\|T_n\|_0, \quad 0 < h \leq \frac{\pi}{n}, \tag{4}$$

которое при $h = \frac{\pi}{n}$ для полинома $T_n = (1+\cos t)^n$ обращается в равенство.

На основании этой теоремы становится ясно, что если бы в оценке (3) константа C_p была ограничена, то в силу непрерывности функционала $\|\cdot\|_p$ при $p = +0$ в правой части (4) для $h = \pi/n$ отсутствовал бы неограниченный при $n \to \infty$ множитель $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2n} - \frac{h}{4}\right)$.

Доказательство теоремы 1 проводится путем перехода от тригонометрического полинома $T_n(t)$ к алгебраическому $P_{2n}(e^{it})$ степени $2n$ с комплексными коэффициентами.

В связи с рассмотрением алгебраических полиномов $P_n(z)$ возник вопрос о приращениях этого полинома как вдоль дуги, так и вдоль радиуса единичной окружности. Именно об этом следующая теорема.

Теорема 2. *Для любого полинома $P_n(z)$ справедливы неравенства*

$$\|P_n(z) - P_n(ze^{ih})\|_0 \leq 2\left(n\sin\frac{nh}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\|P_n\|_0, \qquad 0 < h \leq \frac{\pi}{n}, \tag{5}$$

$$\|P_n(z) - P_n(rz)\|_0 \leq \|P_n\|_0 \begin{cases} n(1-r), & 1-r \leq 4\sin^2\dfrac{\pi}{n}, & (6)\\[2mm] e(1-r^n), & 1-r \leq \dfrac{2}{n+1}. & (6')\end{cases}$$

На полиномах $C(1+ze^{i\alpha})$, $C \in \mathbb{Z}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ в (5) и (6) достигается знак равенства, когда $h = \frac{\pi}{n}$ и $1 - r \leq 4\sin^2\frac{\pi}{n}$.

Сравним правые части оценок (4) и (5) при $h = \pi/n$ по порядку относительно n: в (4) он равен 1, а в (5) — $\frac{1}{2}$. Более высокий порядок в (4) объясняется вложением

$$\left\{P_n\left(e^{it}\right)\right\} \subset \left\{T_n\left(e^{it}\right)\right\}.$$

В теоремах 1 и 2 предполагается, что $h \in (0, \pi/n]$, как это обычно принято разными авторами. Вероятно было бы интересно выяснить, как изменятся оценки для $h > \pi/n$. Ещё С. Б. Стечкин в статье [5] обратил внимание на аналогичный вопрос, но при рассмотрении другой задачи. Частичный ответ содержится в следующей теореме.

Теорема 3. *Если T_n и P_n соответственно тригонометрический и алгебраический полиномы, то при $\frac{\pi}{n} < h < \frac{2\pi}{n}$*

$$\|T_n(x+h) - T_n(x)\|_0 \le 2\|T_n\|_0 \sin\frac{nh}{2} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{n} - \frac{h}{4}\right) \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2n} - \frac{h}{4}\right), \tag{7}$$

$$\|P_n(ze^{ih}) - P_n(z)\|_0 \le$$
$$\le 2\|P_n\|_0 \sin\frac{nh}{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{n} - \frac{h}{2}\right)\right)^{-1} \begin{cases} 1, & n - \textit{четное}, \\ \cos\frac{\pi}{2n}, & n - \textit{нечетное}. \end{cases} \tag{8}$$

а при $h = \frac{2\pi}{n}$

$$\|T_n(x+h) - T_n(x)\|_0 \le 4\|T_n\|_0 n \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n}, \tag{9}$$

$$\|P_n(ze^{ih}) - P_n(z)\|_0 \le 2\|P_n\|_0 \begin{cases} n, & n - \textit{четное}, \\ n\cos\frac{\pi}{2n}, & n - \textit{нечетное}. \end{cases} \tag{10}$$

Доказательства теорем основаны на свойствах нулей алгебраических полиномов P_n. Усилиями многих математиков: G. Szegő, E. Laguerre, J. Grace, N. de Bruijne, T. A. Springer, K. Mahler и др. были получены результаты, которые впоследствии В. В. Арестов в своих работах [2] и [4] развил, дополнил и привел к удобному для применения виду. Именно исследования В. В. Арестова позволили доказать замечательную оценку

$$\|T_n'\|_p \le n\|T_n\|_p, \qquad 0 \le p \le 1 \tag{11}$$

и тем самым распространить неравенство С. Н. Бернштейна на все L_p с $0 \le p \le \infty$. В более поздних работах других авторов, где также доказано неравенство (11) новых идей нет.

2. Здесь приводятся те сведения, на которые в дальнейшем будут ссылки.

Алгебраический полином $P_n(z)$ степени n с комплексными коэффициентами удобно записывать в виде:

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a_k z^k.$$

Если a_k, b_k, c_k — коэффициенты соответственно трех полиномов P_n, Q_n и R_n удовлетворяют условию $c_k = a_k \cdot b_k$, то полином R_n образует композицию (по Сегё) P_n и Q_n: $R_n = P_n \otimes Q_n$.

Величину $\|P_n\|_0$ называют мерой полинома P_n. Удобным в приложениях является неравенство

$$\|R_n\|_0 \le \|P_n\|_0 \cdot \|Q_n\|_0,$$

которое, как обратил внимание В. Арестов [4], следует из теоремы 7 в работе [6].

Если устанавливается соотношение между мерами полиномов R_n и P_n, то мера Q_n является в этом неравенстве коэффициентом.

Мера полинома Q_n наряду с определением может быть вычислена по формуле Йенсена:

$$\|Q_n\|_0 = |b_n| \prod_{|z_k|>1} |z_k|, \qquad \text{где} \quad z_k - \text{нули } Q_n. \tag{12}$$

Пусть T_n — тригонометрический полином порядка n с комплексными коэффициентами, т. е.

$$T_n(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k \cos kt + B_k \sin kt$$

Записывая T_n в экспоненциальной форме $\sum_{k=-n}^{n} C_k e^{ikt}$, поставим в соответствие T_n полином $P_{2n} = e^{int} T_n(e^{it})$. Тогда P_{2n} есть значение алгебраического полинома $P_{2n}(z) = z^n \sum_{k=-n}^{n} C_k z^k = \sum_{m=0}^{2n} C_m z^m$ на единичной окружности. Тем самым установлено взаимно-однозначное соответствие между T_n и P_{2n}, позволяющее всякое утверждение для T_n записать в терминах полинома P_{2n} и наоборот.

3. Перейдем к доказательству основных теорем 1 и 2.

Доказательство теоремы 1. Если $T_n(t)e^{int} = P_{2n}(z) = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k a_k z^k$, $z = e^{it}$, то

$$[T_n(t+h) - T_n(t)] \cdot e^{int} = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k a_k \left(e^{ih(k-n)} - 1\right) z^k = R_{2n}(z), \qquad z = e^{it}$$

и полином $R_{2n}(z)$ образует композицию с полиномами $Q_{2n}(z) = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k \left(e^{ih(k-n)} - 1\right) z^k$ и $P_{2n}(z)$. Нули $Q_{2n}(z)$ определяются из равенства $1 - e^{-i\left(\frac{h}{2} - \frac{\pi k}{n}\right)} = z\left(e^{i\left(\frac{\pi k}{n} + \frac{h}{2}\right)} - 1\right)$,

$$|z_k| = \frac{\left|\sin\left(\frac{\pi k}{2n} - \frac{h}{4}\right)\right|}{\sin\left(\frac{\pi k}{2n} + \frac{h}{4}\right)}, \qquad k \in \{0, 1, ..., 2n-1\} \tag{13}$$

Тогда $|z_k| > 1$ для $k \in \{n+1, ..., 2n-1\}$ и

$$\prod_{|z_k|>1} |z_k| = \prod_{k=n+1}^{2n-1} \frac{\sin\left(\frac{\pi k}{2n} - \frac{h}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi k}{2n} + \frac{h}{4}\right)} \tag{14}$$

Пусть $h = \frac{\pi}{n}$; так как при этом $\sin\left(\frac{\pi k}{2n} + \frac{\pi}{4n}\right) = \sin\left(\frac{\pi(k+1)}{2n} - \frac{\pi}{4n}\right)$, то

$$\prod_{k=n+1}^{2n-1} |z_k| = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4n}\right)}{\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4n}\right)} = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4n}.$$

Поэтому, согласно (12) $\|Q_n\|_0 = |e^{i\pi} - 1| \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4n} = 2 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4n}$, что и приводит к нужной оценке (4).

Если же $h < \frac{\pi}{n}$, то в произведении (14) каждый числитель равный $\sin\left(\frac{\pi(n+k)}{2n} - \frac{h}{4}\right)$ начиная с $k = (n+2)$ заменяем знаменателем $\sin\left(\frac{\pi(n+k-1)}{2n} + \frac{h}{4}\right)$ предыдущего множителя.

Так как $\frac{\pi(n+k)}{2n} - \frac{h}{4} > \frac{\pi(n+k-1)}{2n} + \frac{h}{4}$, то в результате замены все произведение увеличится и $\prod_{k=n+1}^{2n-1} |z_k| < \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2n} - \frac{h}{4}\right)$. Следовательно, $\|Q_n\|_0 \le 2 \sin \frac{nh}{2} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2n} - \frac{h}{4}\right)$ и неравенство (4) доказано.

Из самого доказательства легко видно, что при $h = \frac{\pi}{n}$ для полинома

$$T_n(t) = e^{-int} \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k e^{ikt} = 2^n (1 + \cos t)^n$$

в (4) имеет место знак равенства. Теорема 1 доказана. □

Доказательство теоремы 2. Начнем с приращения полинома вдоль дуги единичной окружности. Полином $P_n(z) - P_n\left(ze^{ih}\right)$ образует композицию с полиномами $P_n(z)$ и $Q_n(z) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(1 - e^{ikh}\right) z^k$. Вычислим $\|Q_n\|_0$. Нули $Q_n(z)$ определяются условием $(1+z) = e^{i\frac{2\pi k}{n}}\left(1 + ze^{ih}\right)$. Поэтому $|z_k| = \sin\frac{\pi k}{n} / \sin\left(\frac{\pi k}{n} + \frac{h}{2}\right)$, $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ и

$$\prod_{|z_k|>1} |z_k| = \prod_{k=\left[\frac{n+1}{2}\right]}^{n-1} \frac{\sin\frac{\pi k}{n}}{\sin\left(\frac{\pi k}{n} + \frac{h}{2}\right)}. \tag{15}$$

Предположим, что $h = \frac{\pi}{n}$. Следующее равенства очевидны

$$\prod_{k=\left[\frac{n+1}{2}\right]}^{n-1} \sin\frac{\pi k}{n} = \prod_{k=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]-1} \sin\frac{\pi k}{n} \tag{16}$$

и

$$\prod_{k=\left[\frac{n+1}{2}\right]}^{n-1} \sin\left(\frac{\pi k}{n} + \frac{\pi}{2n}\right) = \sin\frac{\pi}{2n} \prod_{k=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]-1} \sin\left(\frac{\pi k}{n} + \frac{\pi}{2n}\right) \tag{17}$$

Разделив равенство (16) на (17) с учетом (15), получим

$$\prod_{|z_k|>1} |z_k| = \left(\sin\frac{\pi}{2n}\right)^{-1} \prod_{|z_k|<1, z_k\neq 0} |z_k|.$$

Отсюда

$$\prod_{|z_k|>1} |z_k|^2 = \left(\sin\frac{\pi}{2n}\right)^{-1} \prod_{k=1}^{n-1} |z_k|.$$

Так как $\prod_{k=1}^{n-1} |z_k| = n\sin\frac{\pi}{2n}$, то $\prod_{|z_k|>1} |z_k| = \sqrt{n}$ и $\|Q_n\|_0 = 2\sqrt{n}$

Пусть теперь $0 < h < \frac{\pi}{n}$.

В силу равенства $\sin\left[\frac{\pi}{n}(n-k) + \frac{h}{2}\right] = \sin\left[\frac{\pi k}{n} + \frac{h}{2}\right]$ и условия $\frac{\pi}{n} - \frac{h}{2} > \frac{h}{2}$ очевидны соотношения:

$$\prod_{k=\left[\frac{n+1}{2}\right]}^{n-1} \sin\left(\frac{\pi k}{n} + \frac{h}{2}\right) = \prod_{k=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \sin\left(\frac{\pi k}{n} - \frac{h}{2}\right) = \prod_{k=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \sin\left(\frac{\pi(k-1)}{n} + \frac{\pi}{n} - \frac{h}{2}\right) >$$

$$> \prod_{k=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \sin\left(\frac{\pi(k-1)}{n} + \frac{h}{2}\right) = \sin\frac{h}{2} \prod_{k=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]-1} \sin\left(\frac{\pi k}{n} + \frac{h}{2}\right).$$

Следовательно,

$$\prod_{k=\left[\frac{n+1}{2}\right]}^{n-1} \sin\left(\frac{\pi k}{n} + \frac{h}{2}\right) > \sin\frac{h}{2} \prod_{k=1}^{\left[\frac{n+1}{2}-1\right]} \sin\left(\frac{\pi k}{n} + \frac{h}{2}\right). \tag{18}$$

Остается разделить (15) на (18):

$$\prod_{|z_k|>1} |z_k| < \left(\sin\frac{h}{2}\right)^{-1} \prod_{|z_k|<1, z_k\neq 0} |z_k|.$$

Далее рассуждаем по аналогии с предыдущим случаем:

$$\prod_{k=1}^{n} |z_k| < n\sin\frac{h}{2}\left(\sin\frac{nh}{2}\right)^{-1} \quad \text{и} \quad \prod_{|z_k|>1} |z_k| = \left(\frac{n}{\sin\frac{nh}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{19}$$

Таким образом

$$\|Q_n\|_0 = 2\left(n\sin\frac{nh}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

и неравенство (5) доказано.

Перейдем к приращению полинома P_n вдоль радиуса.

Полином $P_n(z) - P_n(rz)$ образует композицию полиномов $Q_n(z) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k(1-r^k)z^k$ и $P_n(z)$. Нули $Q_n(z)$:

$$|z_k| = \frac{2\sin\frac{\pi k}{n}}{\sqrt{(1-r)^2 + 4r\sin^2\frac{\pi k}{n}}}, \qquad k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Легко проверить, что все нули, кроме $z_0 = 0$, как только $1 - r \le 4\sin^2\frac{\pi}{n}$ находятся вне единичного круга. Поэтому $\|Q_n\|_0 = (1-r^n)\prod_{k=1}^{n-1}|z_k| = n(1-r)$. Если же $1 - r < \frac{2}{n+1}$, то $|z_k| \le \frac{2}{1+r}$ или $|z_k| \le 1 + \frac{1}{n}$ для всех k, и тогда $\prod_{k=1}^{n-1}|z_k| \le e$, а

$$\|Q_n\|_0 \le e(1-r^n). \tag{20}$$

Можно проверить, что на многочленах $c\,(1+ze^{i\alpha})^n$ Неравенства (5) и (6) обращаются в равенства соответственно при $h = \frac{\pi}{n}$ и $1-r \le 4\sin^2\frac{\pi}{n}$. Теорема 2 полностью доказана. $\square$

Замечание 1. Аналогично доказательству предыдущей теоремы можно оценить приращение полинома P_n в общем случае, т. е. одновременно по радиусу и по дуге. Находим нули полинома Q_n, играющего роль “коэффициента”:

$$|z_k| = \frac{2\sin\frac{\pi k}{n}}{\sqrt{(1-r)^2 + 4r\sin^2\left(\frac{\pi k}{n} + \frac{h}{2}\right)}}, \qquad k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Если ограничиться значениями $h \le \pi/n$ и $1 - r \le 2/(n+1)$, то записывая $|z_k|$ в виде

$$|z_k| = \frac{\sin\frac{\pi k}{n}}{\sin\left(\frac{\pi k}{n} + \frac{h}{2}\right)} \cdot \frac{2\sin\left(\frac{\pi k}{n} + \frac{h}{2}\right)}{\sqrt{(1-r)^2 + 4r\sin^2\left(\frac{\pi k}{n} + \frac{h}{2}\right)}}.$$

с учетом оценок (19) и (20) будем иметь

$$\prod_{|z_k|>1} |z_k| < e\left(\frac{n}{\sin\frac{nh}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Тогда

$$\|P_n(z) - P_n(re^{ih}z)\|_0 \le 2e\left(\frac{n}{\sin\frac{nh}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\|P_n\|_0.$$

Доказательство теоремы 3. Оценим меры полиномов Q_{2n} и Q_n, которые играют роль коэффициентов в неравенствах (7)–(10). Начнем с доказательства оценок (7) и (9). Пусть сначала $h = 2\pi/n$. Тогда у полинома $Q_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k\left(e^{ih(k-n)} - 1\right)z^k$ коэффициент при z^{2n} равен нулю, старший коэффициент по модулю равен $4n\sin\frac{\pi}{n}$ и число нулей $2n-1$, т. е. в равенстве (13) $k \in \{0, 1, \ldots, 2n-2\}$. Далее, на основании (14)

$$\prod_{|z_k|>1}|z_k| = \prod_{k=n+1}^{2n-2}\frac{\sin\frac{\pi(k-1)}{2n}}{\sin\frac{\pi(k+1)}{2n}} = \left(\sin\frac{\pi}{n}\right)^{-1}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n}$$

и следовательно, $\|Q_{2n}\|_0 = 4n\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n}$. Если же $\frac{\pi}{n} < h < \frac{2\pi}{n}$, то в произведении (14) каждый числитель, начиная с третьего множителя

$$\sin\left(\frac{\pi(n+1+m)}{2n} - \frac{h}{4}\right)$$

заменяем знаменателем

$$\sin\left(\frac{\pi(n+1+m-2)}{2n} + \frac{h}{4}\right), \qquad m \in \{2, 3, \ldots, n-2\}$$

и так как

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi(m+1)}{2n} - \frac{h}{4} > \frac{\pi}{2} + \frac{\pi(m-1)}{2n} + \frac{h}{4},$$

то всё произведение увеличится и останутся два первых множителя в числителе ($k \in \{n+1, n+2\}$) и последних два в знаменателе ($k \in \{2n-2, 2n-1\}$). Таким образом

$$\prod_{|z_k|>1}|z_k| \le \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{n} - \frac{h}{4}\right)\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2n} - \frac{h}{4}\right)$$

и

$$\|Q_{2n}\|_0 \le 2\sin\frac{nh}{2}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{n} - \frac{h}{4}\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2n} - \frac{h}{4}\right).$$

Теперь установим справедливость неравенств (8) и (10).

Когда $h = 2\pi/n$ коэффициент при z^n у полинома $Q_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\left(e^{ikh} - 1\right)z^k$ равен нулю, старший коэффициент по модулю равен $2n\sin\frac{\pi}{n}$, число нулей $n-1$. Дальнейший результат зависит от четности n. На основании (15) (с заменой верхнего индекса $n-1$ на $n-2$) Если же n — четное, то

$$\prod_{|z_k|>1}|z_k| = \prod_{k=\frac{n}{2}}^{n-2}\frac{\sin\frac{\pi k}{n}}{\sin\frac{\pi(k+1)}{n}} = \left(\sin\frac{\pi}{n}\right)^{-1},$$

а при n — нечетном

$$\prod_{|z_k|>1}|z_k| = \prod_{k=\frac{n+1}{2}}^{n-2}\frac{\sin\frac{\pi k}{n}}{\sin\frac{\pi(k+1)}{n}} = \left(\sin\frac{\pi}{n}\right)^{-1}\cos\frac{\pi}{2n}.$$

Следовательно,

$$\|Q_n\|_0 = \begin{cases} 2n, & n - \text{четное}, \\ 2n\cos\frac{\pi}{2n}, & n - \text{нечетное}. \end{cases}$$

При четном n в числителе произведения (15) каждый множитель, начиная со второго заменяем большим предыдущим множителем в знаменателе, тогда $\prod_{|z_k|>1}|z_k| < \left(\sin\left(\frac{\pi}{n}-\frac{h}{2}\right)\right)^{-1}$. Если n — нечетное, то производится другая замена: каждый множитель знаменателя заменяется большим числителем следующего; в результате

$$\prod_{|z_k|>1}|z_k| < \cos\frac{\pi}{2n}\cdot\left(\sin\left(\frac{\pi}{n}-\frac{h}{2}\right)\right)^{-1}.$$

Таким образом

$$\|Q_n\|_0 \le 2\sin\frac{nh}{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{n}-\frac{h}{2}\right)\right)^{-1}\begin{cases} 1, & n - \text{четное}, \\ \cos\frac{\pi}{2n}, & n - \text{нечетное}. \end{cases}$$

Теорема 3 полностью доказана. $\square$

Замечание 2. Пределы при $h \to 2\pi/n - 0$ коэффициентов правых частей неравенств (7) и (8) соответственно равны коэффициентам правых частей оценок (9) и (10).

Замечание 3. Сравнивая результаты теорем 1 и 2 с теоремой 3, видим, что при $\frac{\pi}{n} < h < \frac{\pi}{2n}$ правые части неравенств по порядку относительно n выше, чем для $0 < h \le \frac{\pi}{n}$ вдвое.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бернштейн С. Н. *Распространение неравенства С.Б. Стечкина на целые функции конечной степени* // ДАН СССР. – 1948. – Т.16. – С.1487–1490.
2. Арестов В. В. *Об интегральных неравенствах для тригонометрических полиномов и их производных* // Изв. АН СССР, серия матем. – 1981. – Т.45, №1. – С.3–22.
3. Горин Е. А. *Неравенства Бернштейна с точки зрения операторов* // Вестник Харьковского университета. – 1980. – Т.45, №205. – С.77–104.
4. Арестов В. В. *Интегральные неравенства для алгебраических многочленов на единичной окружности* // Матем. заметки. – 1990. – Т 48, №4. – С.7–18.
5. Стечкин С. Б. *Обобщение некоторых неравенств С. Н. Бернштейна* // ДАН СССР. – 1948. – Т.60, №9. – С.1511–1514.
6. De Bruijn N. Y., Springer T. A. *On the zeros of composition polynomials* // Proc. Niderl. Acad. Wetensch. 1947. – V.50. – P.895–903.

Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова
jurish@te.net.ua

Поступило 26.01.2004