УДК 515.12

Т. В. Дубровина, Н. И. Дубровин*

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА ФОРМАЛЬНЫХ СУММ

T. V. Dubrovina, N. I. Dubrovin. *Topological linear spaces of formal sums*, Matematychni Studii, **21** (2004) 209–220.

In addition to the Tychonoff topology on the direct product of discrete skew fields a variety of other topologies which correspond to given filters on the support are defined and studied. The main result is a description of the continuous linear operators on the space of formal sums (Theorem 9).

Т. В. Дубровина, Н. И. Дубровин. *Топологические линейные пространства формальных сумм* // Математичні Студії. – 2004. – Т.21, №2. – С.209–220.

Наряду с топологией Тихонова на прямом произведении дискретных тел определяются и изучаются другие топологии, соответствующие заданному фильтру на носителе. Основной результат — описание непрерывных линейных операторов на пространстве формальных сумм (теорема 9).

Пространство формальных сумм. Пусть G — множество, K — тело с дискретной топологией, и ${}^GK$ — правое линейное пространство всех отображений $\gamma\colon G \to K$. Через γ_g обозначим образ элемента $g \in G$ относительно этого отображения. Линейная структура на множестве ${}^GK$ задается следующими покомпонентными операциями сложения и умножения:

$$(\gamma + \beta)_g = \gamma_g + \beta_g; \quad (k \cdot \gamma)_g = k \cdot \gamma_g \qquad (k \in K)$$

Если для всякого элемента $g \in G$ определить отображение $\delta^g\colon G \to K$ так, что $\delta^g_{g'}$ — символ Кронекера равный 1, если $g' = g$ и равный 0 в противном случае, то произвольный элемент из пространства ${}^GK$ можно представлять как формальную сумму

$$\gamma = \sum_{g \in G}{}' \delta^g \gamma_g. \tag{1}$$

Элементы пространства ${}^GK$ будем иногда называть *столбцами.* Для формальной суммы γ определим соответсвенно *нуль-множество* и *носитель*

$$\mathcal{Z}(\gamma) = \{g \in G \mid \gamma_g = 0\}; \quad \operatorname{supp}\gamma = \{g \in G \mid \gamma_g \neq 0\}.$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 54F65.

*Работа выполнена при поддержке фонда DFG (грант 436 RUS 113/471/5-2), Германия

Ясно, что $G = Z(\gamma) \cup \operatorname{supp}\gamma$ — разбиение множества G, и имеют место соотношения

$$\mathcal{Z}(\gamma+\beta) \supseteq \mathcal{Z}(\gamma) \cap Z(\beta), \quad \mathcal{Z}(k\gamma) = \mathcal{Z}(\gamma) \tag{2}$$

для двух формальных сумм γ и β и ненулевого элемента $k \in K$.

Пусть $\mathfrak{G}$ — фильтр на множестве G. В данной работе термин "фильтр" употребляется в расширенном смысле как система подмножеств, замкнутая относительно конечных пересечений и содержащая любое надмножество элемента из этой системы. Допускается принадлежность пустого множества фильтру. В этом случае фильтр совпадает с семейством всех подмножеств и является *несобственным.* Определим основной объект изучения в этой работе — пространство

$$\{\mathfrak{G}\}\,K = \left\{\gamma \in {}^{G}K \mid \mathcal{Z}(\gamma) \in \mathfrak{G}\right\}.$$

Из соотношений (2) следует, что $\{\mathfrak{G}\}\,K$, действительно, подпространство линейного пространства ${}^{G}K$. Если $\mathfrak{G} = \mathcal{P}(G)$ — несобственный фильтр всех подмножеств, то $\{\mathfrak{G}\}K = {}^{G}K$. Другой крайний случай, когда $\mathfrak{G}$ — семейство всех кофинальных подмножеств, т.е. $\mathfrak{G} = \operatorname{Cof} G$ — *фильтр Фреше.* Тогда $\{\mathfrak{G}\}K$ состоит из всех формальных сумм с конечным носителем. Обозначим это подпространство $[G]K$.

Аналогично, для множества H с фильтром $\mathfrak{H}$ можно построить сначала *левое линейное пространство строк* K^H, т. е. отображений $a\colon H \to K$ с правилом умножения $(k \cdot a)^h = k \cdot a^h$, а затем определить подпространство $K\{\mathfrak{H}\}$ строк с нуль-множеством принадлежащим фильтру $\mathfrak{H}$.

Всюду далее в этой работе предполагается, что *все фильтры содержат фильтр Фреше.*

Через $\mathfrak{G}^*$ обозначаем фильтр всех подмножеств $A^* \subseteq G$ таких, что объединение $A^* \cup A$ кофинально в G для любого $A \in \mathfrak{G}$. Так как $\mathfrak{G} \supseteq \operatorname{Cof} G$, то $\mathfrak{G} \cap \mathfrak{G}^* = \operatorname{Cof} G$ (см. [3], свойство 10). Следующая диаграмма, в которой отношение включения обозначено стрелкой, поясняет соотношения между упомянутыми подпространствами.

$$\begin{tikzcd}
 & \{\mathfrak{G}\}K \arrow[dl] & \\
[G]K = \{\mathfrak{G}\}K \cap \{\mathfrak{G}^*\}K & & {}^{G}K = \{\mathcal{P}(G)\}K \arrow[ul] \arrow[dl] \\
 & \{\mathfrak{G}^*\}K \arrow[ul] &
\end{tikzcd}$$

Для элемента $A^* \in \mathfrak{G}^*$ рассмотрим *окрестность*

$$U(A^*) = \{\gamma \in \{\mathfrak{G}\}K \mid \mathcal{Z}(\gamma) \supseteq G \setminus A^*\}. \tag{3}$$

Иногда, уточняя, будем обозначать окрестность как $U_{\mathfrak{G}}(A^*)$. Сделаем два замечания.

A. *Окрестность $U(A^*)$ — линейное подпространство в K^G.*

Докажем это утверждение. Будем обозначать дополнение до множества G чертой сверху. Если $\gamma, \beta \in U(A^*)$, то $\mathcal{Z}(\gamma) \supseteq \overline{A^*}$ и $\mathcal{Z}(\beta) \supseteq \overline{A^*}$, из чего следуют включения

$$\mathcal{Z}(\gamma+\beta) \supseteq \mathcal{Z}(\gamma) \cap \mathcal{Z}(\beta) \supseteq \overline{A^*}.$$

Следовательно, $\gamma + \beta \in U(A^*)$. Далее, $\mathcal{Z}(\gamma k) = \mathcal{Z}(\gamma)$ для любого ненулевого $k \in K$, откуда получаем, что $\gamma k \in U(A^*)$.

Б. Отметим теперь равенство справедливое для любых подмножеств $A_1, A_2 \subseteq G$:

$$U(A_1 \cap A_2) = U(A_1) \cap U(A_2).$$

Докажем это следующей выкладкой:

$$\gamma \in U(A_1) \cap U(A_2) \Leftrightarrow \mathcal{Z}(\gamma) \supseteq \overline{A}_1 \cup \overline{A}_2 \Leftrightarrow \mathcal{Z}(\gamma) \supseteq \overline{A_1 \cap A_2} \Leftrightarrow \gamma \in U(A_1 \cap A_2).$$

Мы готовы теперь к построению топологии на пространстве столбцов по заданному фильтру $\mathfrak{G}$. Напомним (см. [3]), что фильтр $\mathfrak{G}$ называется *сбалансированным*, если $\mathfrak{G}^{**} = \mathfrak{G}$.

Теорема 1. *Семейство подпространств $\{U(A^*) \mid A^* \in \mathfrak{G}^*\}$ является базой окрестностей нуля топологии пространства ${}^G K$. Множество $X \subseteq {}^G K$ открыто в этой топологии, если для любого элемента $\gamma \in X$ найдется элемент $A^* \in \mathfrak{G}^*$ такой, что $\gamma + U(A^*) \subseteq X$. Эта топология, обозначим ее $T(\mathfrak{G})$, согласована с операциями сложения и умножения на элементы тела K; ${}^G K$ становится линейным хаусдорфовым топологическим пространством. Подпространство $\{\mathfrak{G}\}K$ полно относительно топологии $T(\mathfrak{G})$, при условии сбалансированности фильтра $\mathfrak{G}$. Подпространство конечных сумм $[G]K$ плотно в $(\{\mathfrak{G}\}K, T(\mathfrak{G}))$.*

Доказательство. Первые два утверждения теоремы после подготовительных результатов А и Б не требуют дальнейших пояснений (см. [4], глава 2, §1 или [2], глава 3, §6). Докажем полноту пространства $\{\mathfrak{G}\}K$. Пусть $(\gamma_i)_{i \in I}$ — обобщенная последовательность Коши. Это значит, что для любого множества $A^* \in \mathfrak{G}^*$ найдется индекс $i(A^*) \in I$ такой, что для всех индексов $i, j \succeq i(A^*)$ имеет место соотношение $\gamma_i - \gamma_j \in U(A^*)$ или

$$\forall g \in G \setminus A^* \quad (\gamma_i)_g = (\gamma_j)_g.$$

Определим столбец $\gamma \in K^G$ так, что $\gamma_g = (\gamma_{i(A^*)})_g$ для всех $g \in G \setminus A^*$. Это определение корректно. Во-первых, каков бы ни был элемент $g \in G$ подмножество $A^* \in \mathfrak{G}^*$ с условием $g \notin A^*$ всегда найдется — можно положить, например, $A^* = G \setminus \{g\}$. Во-вторых, если A_1^*, A_2^* — два подмножества с такими условиями, то взяв индекс $j \succeq i(A_1^*), i(A_2^*)$ получим: $(\gamma_{i(A_1^*)})_g = (\gamma_j)_g$ и $(\gamma_{i(A_2^*)})_g = (\gamma_j)_g$, откуда следует равенство $(\gamma_{i(A_1^*)})_g = (\gamma_{i(A_2^*)})_g$. Корректность определения доказана.

Из определения столбца γ вытекает, что каково бы ни было множество $A^* \in \mathfrak{G}^*$, для всех $i \succeq i(A^*)$ выполняется равенство $(\gamma_i)_g = \gamma_g$ при любом $g \in G \setminus A^*$. Иными словами, γ есть предел обобщенной последовательности (γ_i) в топологии $T(\mathfrak{G})$. Остается доказать, что $\gamma \in \{\mathfrak{G}\}K$.

Выберем какой-либо элемент $A^* \in \mathfrak{G}^*$. Тогда

$$\mathcal{Z}(\gamma) \cup A^* = \left(\mathcal{Z}(\gamma) \cap \overline{A^*}\right) \cup A^* = \left(\mathcal{Z}(\gamma_{i(A^*)}) \cap \overline{A^*}\right) \cup A^* = \mathcal{Z}(\gamma_{i(A^*)}) \cup A^*$$

— кофинальное множество. Второе равенство здесь справедливо в силу того, что сужения отображений γ и $\gamma_{i(A^*)}$ на множество $\overline{A^*}$ совпадают. Мы проверили принадлежность $\mathcal{Z}(\gamma) \in \mathfrak{G}^{**} = \mathfrak{G}$, что и доказывает требуемое соотношение $\gamma \in \{\mathfrak{G}\}K$.

Теперь доказываем плотность $[G]K$ в $\{\mathfrak{G}\}K$. Для этого произвольный элемент $\gamma \in \{\mathfrak{G}\}K$ запишем в "стандартном топологическом базисе" (см. (1)). В качестве множества индексов I возьмем множество всех конечных подмножеств множества G и упорядочим I так: $i \succeq j \Leftrightarrow i \supseteq j$. Таким образом, I становится направленным множеством, а $\gamma_i = \sum\limits_{g \in i} \delta^g \gamma_g$ — обобщенной последовательностью конечных сумм. Для любого $A^* \in \mathfrak{G}^*$ объединение $A^* \cup \mathcal{Z}(\gamma)$ кофинально, т.е. $A^* \cup \mathcal{Z}(\gamma) = G \setminus \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ для подходящих $g_t \in G$. Рассмотрим $i(A^*) = \{g_1, g_2, \dots, g_n\} \in I$. Для любого индекса $i \in I$ выполняется равенство $\gamma - \gamma_i = \sum\limits_{g \notin i}{}' \delta^g \gamma_g$. Если $i \succeq i(A^*)$, то

$$\mathcal{Z}(\gamma - \gamma_i) \supseteq \mathcal{Z}(\gamma) \cup \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$$

и, значит, $\mathcal{Z}(\gamma - \gamma_i) \cup A^* = G$. Это показывает, что $\gamma - \gamma_i \in U(A^*)$, т.е. $\gamma_i \in \gamma + U(A^*)$. Доказано, что γ есть предел обобщенной последовательности (γ_i) элементов подпространства $[G]K$. Теорема доказана. □

Посмотрим теперь на примеры топологий $T(\mathfrak{G})$.

Случай 1. $\mathfrak{G} = \operatorname{Cof} G$.

В этом случае $\mathfrak{G}^* = \mathcal{P}(G)$, $\{G\}K = [G]K$. Так как в качестве A^* в определении окрестности (3) можно брать что угодно, то взяв $A^* = \varnothing$, получаем, что $\{0\}$ — окрестность нуля. Из этого следует, что любое подмножество в $[G]K$ открыто и замкнуто, и $T(\operatorname{Cof} G)$ — дискретная топология.

Случай 2. $\mathfrak{G} = \mathcal{P}(G)$.

В этом случае $\mathfrak{G}^* = \operatorname{Cof} G$, $\{G\}K = {}^G K$ и в качестве A^* можно брать только кофинальные подмножества. Тогда мы получаем топологию Тихонова, предбазой окрестностей нуля в которой служат подпространства

$$U_g = \left\{\gamma \in {}^G K \mid \gamma_g = 0\right\}.$$

Случай 3. $(G, \leq)$ — линейно упорядоченное множество, и $\mathfrak{G} = \operatorname{CoR} G$ — фильтр, состоящий из дополнений до вполне упорядоченных по возрастанию подмножеств множества G.

Тогда $\mathfrak{G}^* = \operatorname{CoL} G$ — семейство дополнений до вполне упорядоченных по убыванию подмножеств (см. теорему 14, [3]), и базу окрестностей нуля можно определить иначе так: пусть D — вполне упорядоченное по убыванию подмножество множества G (в частности, любое конечное подмножество), и

$$U_D = \{\gamma \in \{\mathfrak{G}\}K \mid \forall\, g \in D\ (\gamma_g = 0)\}.$$

Система $\{U_D\}$, когда D пробегает семейство вполне упорядоченных по убыванию подмножеств, и составляет базу окрестностей нуля.

Отметим, что в случае $G = (\mathbb{Q}, \leq)$ база тихоновской топологии счетна, и тем самым топологическое пространство $({}^{\mathbb{Q}}K, T(\mathcal{P}(\mathbb{Q}))$ сепарабельно, в то время как различных вполне упорядоченных по убыванию подмножеств в $\mathbb{Q}$ несчетное число, и топологическое пространство $({}^{\mathbb{Q}}K, T(\operatorname{CoR} \mathbb{Q})$ не является сепарабельным.

Фиксируем какое-либо подмножество C множества G. Несложно проверить, что семейство

$$\mathfrak{G}_C = \{A \cap C \mid A \in \mathfrak{G}\}$$

будет *индуцированным фильтром* на множестве C (см. [1], глава 1, §6). Более того, если фильтр $\mathfrak{G}$ содержит фильтр Фреше, то и $\mathfrak{G}_C$ будет содержать фильтр Фреше $\operatorname{Cof} C$.

Предложение 2. *Пусть $C \subseteq G$. Тогда топология $T(\mathfrak{G}_C)$ пространства столбцов $\{\mathfrak{G}_C\}K$ совпадает с индуцированной топологией, если $\{\mathfrak{G}_C\}K$ рассматривать как подпространство топологического пространства $\{\mathfrak{G}\}K$.*

Доказательство. Пусть $A^* \in \mathfrak{G}^*$. Тогда $A^* \cap C \in \mathfrak{G}^*_C$. Действительно, для любого $A \in \mathfrak{G}$ объединение $A^* \cup A$ кофинально в G, откуда следует, что объединение

$$(A^* \cap C) \cup (A \cap C) = (A^* \cup A) \cap C$$

кофинально в C. Доказано, что $U(A^*) \cap \{\mathfrak{G}_C\}K$ будет окрестностью нуля в топологии $T(\mathfrak{G}_C)$, т.е. индуцированная топология не сильнее чем $T(\mathfrak{G}_C)$.

Наоборот, пусть $A_1^* \in \mathfrak{G}^*_C$. Утверждаем, что $A_1^* \cup \overline{C} \in \mathfrak{G}^*$. Действительно, для любого $A \in \mathfrak{G}$ множество $A_1^* \cup (A \cap C)$ кофинально в C. Тогда множество

$$(A_1^* \cup \overline{C}) \cup A = (A_1^* \cup A) \cup \overline{C}$$

кофинально в G, ибо $A_1^* \cup A \supseteq A_1^* \cup (A \cap C)$. Получаем, что

$$U_{\mathfrak{G}_C}(A_1^*) = U_{\mathfrak{G}}(A_1^* \cup \overline{C}) \cap \{\mathfrak{G}_C\}K,$$

и тем самым индуцированная топология не слабее топологии $T(\mathfrak{G}_C)$. □

Предложение 3. *Если $A \in \mathfrak{G}$, то имеет место разложение в прямую сумму*

$$\{\mathfrak{G}\}K = {}^{\overline{A}}K \oplus \{\mathfrak{G}_A\}K \tag{4}$$

Топология $T(\mathfrak{G})$ индуцирует на подпространстве ${}^{\overline{A}}K$ топологию Тихонова.

Доказательство. Если $\gamma = \sum_{t \in \overline{A}} \delta^t k_t$, то $\mathcal{Z}(\gamma) \supseteq A$, и поэтому $\gamma \in \{\mathfrak{G}\}K$. Доказано включение ${}^{\overline{A}}K \subseteq \{\mathfrak{G}\}K$. Так как $\mathfrak{G}_A \subseteq \mathfrak{G}$, то отсюда следует включение $\{\mathfrak{G}_A\}K \subseteq \{\mathfrak{G}\}K$. Носитель формальной суммы из пространства ${}^{\overline{A}}K$ содержится в $\overline{A}$, а носитель столбца из подпространства $\{\mathfrak{G}_A\}K$ содержится в A по определению этого пространства. Отсюда вытекает, что сумма в (4) действительно прямая. Разложение $\sum_{g \in G} \delta^g k_g = \sum_{t \in \overline{A}} \delta^t k_t + \sum_{g \in A} \delta^g k_g$ показывает, что в (4) имеет место равенство.

Для доказательства последнего утверждения применим предложение 2, учитывая, что $\mathfrak{G}_{\overline{A}} = \mathcal{P}(\overline{A})$. Это равенство верно, так как любое надмножество $A' \supseteq A$ принадлежит фильтру $\mathfrak{G}$. □

Предложение 4. *Если $A^* \in \mathfrak{G}^*$, то имеет место разложение в прямую сумму*

$$\{\mathfrak{G}\}K = [\,\overline{A^*}\,]K \oplus U(A^*). \tag{5}$$

Топология $T(\mathfrak{G})$ индуцирует на пространстве $[\,\overline{A^*}\,]K$ дискретную топологию.

Доказательство. Если носитель столбца $\gamma \in \{\mathfrak{G}\}K$ лежит в $\overline{A^*}$, то множество

$$\operatorname{supp}\gamma = \overline{\mathcal{Z}(\gamma)} \cap \overline{A^*}$$

конечно по определению $*$-операции с учетом того, что $\mathcal{Z}(\gamma) \in \mathfrak{G}$. Отсюда следует принадлежность $\gamma \in [\overline{A^*}]K$. Равенство ${}^{A^*}K \cap \{\mathfrak{G}\}K = U(A^*)$ вытекает из определения окрестности $U(A^*)$. Разложение (5) доказано. Линейное подпространство $U(A^*)$ открыто в $\{\mathfrak{G}\}K$ и, значит, замкнуто. Следовательно, топология на фактор-пространстве $[\overline{A^*}]K \cong \{\mathfrak{G}\}K/U(A^*)$ дискретна. Этот факт можно установить по-другому, заметив, что $\mathfrak{G}_{\overline{A^*}} = \operatorname{Cof}\overline{A^*}$ и применив предложение 2. □

$\mathfrak{G}$-суммы. Нередко в алгебраических структурах, наделенных топологией, удобнее пользоваться бесконечными суммами, а не пределами. Напомним, что семейство элементов $\{\alpha_j \mid j \in J\}$ топологического линейного пространства с топологией $\mathcal{T}$ называется *суммируемым* и имеет *$\mathcal{T}$-сумму* $\gamma = \sum j \in J^{\mathcal{T}}\alpha_j$, если для любой окрестности нуля U найдется такое конечное подмножество $J(U)$ множества J, что для любого конечного подмножества J_0 с условием $J \supseteq J_0 \supseteq J(U)$ имеет место соотношение $\sum_{j\in J_0}\alpha_j \in \gamma + U$ (см. [2], глава 3, §5). Это тоже самое, что сказать: γ есть предел конечных частичных сумм $\sum_{j\in J_0}\alpha_j$ по направлению, задаваемому отношением включения (см. доказательство теоремы 1). Имеет место необходимый признак сходимости: *если существует сумма* $\sum_{j\in J}{}^{\mathcal{T}}\alpha_j$, *то* $\lim_{\operatorname{Cof} J}{}^{\mathcal{T}}\alpha_j = 0$. В нашей конкретной ситуации топологического пространства $(\{\mathfrak{G}\}\,K, T(\mathfrak{G}))$ можно определить суммируемость непосредственно.

Определение 5. Скажем, что семейство $\{\alpha_j \in \{\mathfrak{G}\}\,K \mid j \in J\}$ *$\mathfrak{G}$-суммируемо* и $\gamma = \sum\limits_{j\in J}{}^{\mathfrak{G}}\alpha_j$ есть *$\mathfrak{G}$-сумма*, если выполняются следующие два условия:

1) для любого элемента $g \in G$ существует лишь конечное число индексов j таких, что $g \in \operatorname{supp}\alpha_j$, и имеет место равенство

$$\gamma_g = \sum_{j\in J}(\alpha_j)_g;$$

2) $\bigcap_{j\in J}\mathcal{Z}(\alpha_j) \in \mathfrak{G}$.

Теорема 6 (о $\mathfrak{G}$-сумме). А. *Если семейство $\{\alpha_j \mid j \in J\}$ $\mathfrak{G}$-суммируемо, то оно суммируемо и относительно топологии $T(\mathfrak{G})$. При этом имеет место равенство*

$$\sum_{j\in J}{}^{\mathfrak{G}}\alpha_j = \sum_{j\in J}{}^{T(\mathfrak{G})}\alpha_j. \tag{6}$$

Б. *Если семейство $\{\alpha_j \mid j \in J\}$ суммируемо относительно топологии $T(\mathfrak{G})$, а фильтр $\mathfrak{G}$ сбалансирован, то это семейство $\mathfrak{G}$-суммируемо, и имеет место равенство (6).*

Доказательство. **А.** Обозначим

$$\tilde{\gamma} := \sum_{j\in J}{}^{\mathfrak{G}}\alpha_j \text{ и } A := \bigcap_{j\in J}\mathcal{Z}(\alpha_j).$$

Пусть элемент $A^* \in \mathfrak{G}^*$ произволен. Так как $A \in \mathfrak{G}$, то объединение $A^* \cup A$ — кофинальное множество, т.е. $A^* \cup A = G \setminus \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ для подходящих элементов $g_1, g_2, \dots, g_n \in G$. Рассмотрим подмножество множества индексов

$$J_0 = \{j \in J \mid \exists\, t \in \{1, \dots, n\} : g_t \in \operatorname{supp} \alpha_j\}$$

В силу условия 1) определения $\mathfrak{G}$-суммы, это множество конечно. Для любого конечного подмножества J', содержащего J_0 имеем $\tilde{\gamma} - \sum\limits_{j \in J'} \alpha_j \in U(A^*)$. Действительно,

$$\mathcal{Z}\Big(\tilde{\gamma} - \sum_{j \in J'} \alpha_j\Big) \supseteq A \cup J_0 \supseteq \overline{A^*}.$$

Это доказывает, что $\tilde{\gamma} = \sum\limits_{j \in J}{}^{T(\mathfrak{G})} \alpha_j$.

Б. Проверим, что множество $A := \bigcap_{j \in J} \mathcal{Z}(\alpha_j)$ есть элемент фильтра $\mathfrak{G}$. Обозначим $\gamma = \sum_{j \in J}{}^{T(\mathfrak{G})} \alpha_j$. Из сходимости последовательности $\gamma_i := \sum_{j \in i} \alpha_j$ (i — конечное подмножество множества J) к столбцу γ по направлению "$i \preceq i' \Leftrightarrow i \subseteq i'$" в топологии $T(\mathfrak{G})$ следует, что (γ_i) — последовательность Коши. Это значит, что для любого $A^* \in \mathfrak{G}^*$ найдется индекс $i(A^*)$ такой, что для любых индексов $i, k \succeq i(A^*)$ следует соотношение

$$\gamma_i - \gamma_k \in U(A^*) \Leftrightarrow \mathcal{Z}(\gamma_i - \gamma_k) \supseteq \overline{A^*}.$$

Взяв $k = i(A^*)$ и $i = i(A^*) \cup \{j\}$, где $j \in J \setminus i(A^*)$, видим, что $\mathcal{Z}(\alpha_j) \supseteq \overline{A^*}$. Итак,

$$\bigcap_{j \in J \setminus i(A^*)} \mathcal{Z}(\alpha_j) \supseteq \overline{A^*}.$$

Но $A_1 := \bigcap_{j \in i(A^*)} \mathcal{Z}(\alpha_j) \in \mathfrak{G}$ в силу конечности множества $i(A^*)$, и поэтому

$$A \cup A^* = \Big(\bigcap_{j \in J \setminus i(A^*)} (\mathcal{Z}(\alpha_j) \cup A^*)\Big) \cap \Big(\bigcap_{j \in i(A^*)} \mathcal{Z}(\alpha_j) \cup A^*\Big) = G \cap (A_1 \cup A^*) = A_1 \cup A^*$$

— кофинальное множество. Отсюда следует, что $A \in \mathfrak{G}^{**} = \mathfrak{G}$. □

Непрерывные линейные отображения. Перейдем к описанию непрерывных линейных операторов. Кроме множества G с фильтром $\mathfrak{G}$ рассмотрим и фиксируем множество H с фильтром $\mathfrak{H}$, заданным на нем. Тем самым кроме топологического линейного пространства $\{\mathfrak{G}\}K$ рассматриваем и топологическое линейное пространство $\{\mathfrak{H}^*\}K$. В частности, если $H = G$ и $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}^*$, а фильтр $\mathfrak{G}$ сбалансирован, то речь идет о линейных непрерывных операторах на пространстве $\{\mathfrak{G}\}K$. Если же H — одноэлементное множество, то имеем дело с непрерывными линейными формами.

Определение 7. Линейное отображение $\varphi\colon \{\mathfrak{G}\}K \to \{\mathfrak{H}^*\}K$ назовем $\mathfrak{G}$-*линейным*, если для любой $\mathfrak{G}$-суммируемой системы $\{\alpha_j \mid j \in J\}$ формальных сумм из пространства $\{\mathfrak{G}\}K$ система $\{\varphi[\alpha_j] \mid j \in J\}$ будет $\mathfrak{H}^*$-суммируемой, при этом выполняется равенство

$$\varphi\left[\sum_{j \in J}{}^{\mathfrak{G}} \alpha_j\right] = \sum_{j \in J}{}^{\mathfrak{H}^*} \varphi[\alpha_j].$$

Для описания линейных операторов понадобятся матрицы. Отображение $\Phi\colon H \times G \to K$ будем называть $H \times G$-матрицей, и образ элемента $(h, g) \in H \times G$ обозначим Φ_h^g. Если фиксировать элемент $h \in H$, то отображение $\Phi_h\colon G \to K$ называем *строкой*, для нее $(\Phi_h)^g = \Phi_h^g$. Считаем строку элементом левого линейного пространства K^G. Аналогично, Φ^g — столбец, то есть отображение $\Phi^g\colon H \to K$ такое, что $(\Phi^g)_h = \Phi_h^g$. Это элемент правого линейного пространства столбцов ${}^H K$. Если $\varphi\colon [G]K \to {}^H K$ — отображение, то по нему естественным образом строится *матрица* Φ так, что

$$\Phi^g = \varphi[\delta^g] \quad (g \in G).$$

Определим произведение $H \times G$-матрицы Φ на столбец $\gamma \in {}^G K$ так, что выполняется равенство

$$(\Phi \cdot \gamma)_h = \sum_{t \in G} \Phi_h^t \cdot \gamma_t \tag{7}$$

для любого $h \in H$. Формула (7) корректна, если и только если для любого $h \in H$ пересечение $\operatorname{supp} \gamma \cap \operatorname{supp} \Phi_h$ конечно или, иными словами, объединение $Z(\gamma) \cup Z(\Phi_h)$ кофинально в G. В этом случае произведение будет элементом пространства столбцов ${}^H K$.

В дальнейших рассуждениях существенным образом используются результаты работы [3]. В частности, определение фильтра $\langle \mathfrak{H}^*, \mathfrak{G}^* \rangle$ на декартовом произведении $H \times G$ следующее:

$$X \in \langle \mathfrak{H}^*, \mathfrak{G}^* \rangle \Leftrightarrow \forall\, A \in \mathfrak{G},\ \forall\, B \in \mathfrak{H}\ \exists\, A^* \in \mathfrak{G}^*,\ \exists\, B^* \in \mathfrak{H}^*:\ B^* \times \overline{A}\ \cup\ \overline{B} \times A^* \subseteq X$$

Предложение 8. *Пусть матрица $\Phi \in {}^H K^G$ такова, что ее нуль-множество*

$$\mathcal{Z}(\Phi) = \{(h, g) \in H \times G \mid \Phi_h^g = 0\}$$

принадлежит фильтру $\langle \mathfrak{H}^*, \mathfrak{G}^* \rangle$. Тогда для любого столбца $\gamma \in \{\mathfrak{G}^*\}K$ произведение $\Phi \cdot \gamma$ определено и принадлежит $\{\mathfrak{H}^*\}K$, а правило $a \to \Phi \cdot a$ задает непрерывное линейное отображение.

Доказательство. Из замечания, сделанного после определения произведения матрицы на столбец следует, что произведение $\Phi \cdot \gamma$ определено. Обозначим $A = \mathcal{Z}(\gamma) \in \mathfrak{G}$. Тогда найдется элемент $B^* \in \mathfrak{H}^*$ такой, что $B^* \times \overline{A} \subseteq \mathcal{Z}(\Phi)$. Если $h \in B^*$, то

$$(\Phi \cdot \gamma)_h = \sum_{t \in G} \Phi_h^t \gamma_t = \sum_{t \in \mathcal{Z}(a)} \Phi_h^t \cdot 0 + \sum_{t \in G \setminus \mathcal{Z}(a)} 0 \cdot a_t = 0.$$

Отсюда следует, что $\mathcal{Z}(\Phi \cdot \gamma) \supseteq B^*$, поэтому $\mathcal{Z}(\Phi \cdot \gamma) \in \mathfrak{H}^*$. Значит, $\Phi \cdot \gamma \in \{\mathfrak{H}^*\}K$. Линейность отображения $\gamma \to \Phi \cdot \gamma$ вытекает из дистрибутивности $\Phi \cdot (\gamma + \beta) = \Phi \cdot \gamma + \Phi \cdot \beta$ и ассоциативности $(\Phi \cdot \gamma) \cdot k = \Phi \cdot (\gamma \cdot k)$ верной во всех случаях, когда произведение $\Phi \cdot \gamma$ определено.

Докажем непрерывность. Достаточно доказать непрерывность в нуле, т.е. для любой окрестности нуля $U_{\mathfrak{H}^*}(B)$ в пространстве $\{\mathfrak{H}^*\}K$ (здесь $B \in \mathfrak{H} = \mathfrak{H}^{**}$) надо найти окрестность нуля $U_{\mathfrak{G}}(A^*)$ в $\{\mathfrak{G}\}K$ такую, что

$$\Phi(U_{\mathfrak{G}}(A^*)) \subseteq U_{\mathfrak{H}^*}(B).$$

Так как $\mathcal{Z}(\Phi) \in \langle \mathfrak{H}^*, \mathfrak{G}^* \rangle$, то для B найдется элемент $A^* \in \mathfrak{G}^*$ такой, что $\overline{B} \times A^* \subseteq \mathcal{Z}(\Phi)$. Пусть $\gamma \in U(A^*)$, т.е. $\mathcal{Z}(\gamma) \supseteq G \setminus A^*$. Из определения множества A^* следует, что $\Phi_s^g = 0$ для любых $s \in \overline{B}$ и $g \in A^*$. Тогда для таких s имеем:

$$(\Phi \cdot \gamma)_s = \sum_{g \in G} \Phi_s^g \gamma_g = \sum_{g \in \overline{A^*}} \Phi_s^g \cdot 0 + \sum_{g \in A^*} 0 \cdot \gamma_g = 0.$$

Отсюда вытекает включение $\mathcal{Z}(\Phi \cdot \gamma) \supseteq \overline{B}$ и, следовательно, $\Phi \cdot \gamma \in U(B)$. □

Теорема 9 (основная). *Пусть $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{G}$ — сбалансированные фильтры на множествах H и G соответственно, содержащие фильтры Фреше, $\varphi\colon \{\mathfrak{G}\}K \to \{\mathfrak{H}^*\}K$ — линейное отображение с $H \times G$-матрицей Φ. Следующие условия эквивалентны:*

а) φ — непрерывное отображение;

б) нуль-множество $\mathcal{Z}(\Phi)$ принадлежит фильтру $\langle \mathfrak{H}^*, \mathfrak{G}^* \rangle$;

в) для любого $A \in \mathfrak{G}$ система $\left\{\Phi^t \mid t \in \overline{A}\right\}$ $\mathfrak{H}^*$-суммируема, и имеет место равенство

$$\varphi\left[\sum_{t \in \overline{A}}{}' \delta^t k_t\right] = \sum_{t \in \overline{A}}{}^{\mathfrak{H}^*} \Phi^t k_t \tag{8}$$

для любого набора коэффициентов $k_t \in K$;

г) отображение φ является $\mathfrak{G}$-линейным.

При выполнении этих условий имеет место равенство $\varphi[\gamma] = \Phi \cdot \gamma$ для любого столбца $\gamma \in \{\mathfrak{G}\}K$.

Доказательство. в) $\Rightarrow$ г). Пусть $\{\alpha_j \in \{\mathfrak{G}\}K \mid j \in J\}$ — $\mathfrak{G}$-суммируемое семейство. Тогда обозначим

$$A := \bigcap_{j \in J} \mathcal{Z}(\alpha_j) \in \mathfrak{G}\,, \tag{9}$$

$$\gamma := \sum_{j \in J}{}^{\mathfrak{G}} \alpha_j \in \{\mathfrak{G}\}K\,, \tag{10}$$

$$\alpha_j = \sum_{t \in \overline{A}}{}' \delta^t k_{tj}\,; \quad (j \in J,\ k_{tj} := (\alpha_j)_t \in K), \tag{11}$$

$$k_t := \sum_{j \in J} k_{tj}, \quad \gamma = \sum_{t \in \overline{A}}{}' \delta^t k_t. \tag{12}$$

Проверим $\mathfrak{H}^*$-суммируемость семейства $\{\varphi[\alpha_j] \mid j \in J\}$. Во-первых,

$$\bigcap_{j \in J} \mathcal{Z}(\varphi[\alpha_j]) \supseteq \bigcap_{t \in \overline{A}} \mathcal{Z}(\Phi^t). \tag{13}$$

Это следует из соотношения

$$\varphi[\alpha_j] = \sum_{t \in \overline{A}}{}^{\mathfrak{H}^*} \Phi^t k_{tj} \tag{14}$$

верного в силу (8) и (11). Но правая часть в (13) есть элемент фильтра $\mathfrak{H}^*$ в виду $\mathfrak{H}^*$-суммируемости семейства $\{\Phi^t \mid t \in \overline{A}\}$. Следовательно,

$$\bigcap_{j\in J} \mathcal{Z}(\varphi[\alpha_j]) \in \mathfrak{H}^*.$$

Во-вторых, фиксируем на время элемент $h \in H$. Из $\mathfrak{H}^*$-суммируемости семейства $\{\Phi^t \mid t \in \overline{A}\}$ следует, что множество Δ тех элементов $t \in \overline{A}$, для которых $\Phi^t_h \neq 0$, конечно. Для каждого $t \in \overline{A}$ множество J_t тех индексов $j \in J$, для которых $k_{tj} \neq 0$, также конечно. Тогда и $J_0 := \bigcup_{t\in\Delta} J_t$ — конечное множество. Если $j \notin J_0$, то $j \notin J_t$ для любого $t \in \Delta$, и поэтому $k_{tj} = 0$. Следовательно,

$$\varphi[\alpha_j]_h = \sum_{t\in\overline{A}} \Phi^t_h k_{tj} = \sum_{t\in\overline{A}\setminus\Delta} 0 \cdot k_{tj} + \sum_{t\in\Delta} \Phi^t_h \cdot 0 = 0.$$

Итак, существует лишь конечное число индексов $j \in J$ для которых $\varphi[\alpha_j]_h \neq 0$. Отсюда следует $\mathfrak{H}^*$-суммируемость семейства $\{\varphi[\alpha_j] \mid j \in J\}$.

Докажем теперь равенство $\varphi\left[\sum\limits_{j\in J}{}^{\mathfrak{G}} \alpha_j\right] = \sum\limits_{j\in J}{}^{\mathfrak{H}^*} \varphi[\alpha_j]$. Имеем

$$\varphi\left[\sum_{j\in J}{}^{\mathfrak{G}} \alpha_j\right] = \varphi[\gamma] = \sum_{t\in\overline{A}}{}^{\mathfrak{H}^*} \Phi^t k_t, \tag{15}$$

$$\sum_{j\in J}{}^{\mathfrak{H}^*} \varphi[\alpha_j] = \sum_{j\in J}{}^{\mathfrak{H}^*} \sum_{t\in\overline{A}}{}^{\mathfrak{H}^*} \Phi^t k_{tj} = \sum_{t\in\overline{A}}{}^{\mathfrak{H}^*} \Phi^t \sum_{j\in J} k_{tj} = \sum_{t\in\overline{A}}{}^{\mathfrak{H}^*} \Phi^t k_t. \tag{16}$$

Действительно, докажем в (16) второе равенство покоординатно. Выберем элемент $h \in H$. Тогда

$$\sum_{j\in J} \left(\sum_{t\in\overline{A}}{}^{\mathfrak{H}^*} \Phi^t k_{tj} \right)_h = \sum_{j\in J} \sum_{t\in\overline{A}} \Phi^t_h k_{tj} = \sum_{t\in\overline{A}} \Phi^t_h \sum_{j\in J} k_{tj} = \sum_{t\in\overline{A}} \Phi^t_h k_t.$$

Здесь предпоследнее равенство верно в силу конечности множества пар (j,t) таких, что $\Phi^t_h k_{tj} \neq 0$.

г) $\Rightarrow$ б). Пусть $\gamma = \sum\limits_{g\in G}{}' \delta^g k_g$ — произвольный столбец из пространства $\{\mathfrak{G}\}K$. Тогда

$$\varphi[\gamma] = \sum_{g\in G}{}^{\mathfrak{H}^*} \varphi[\delta^g] k_g = \sum_{g\in G}{}^{\mathfrak{H}^*} \Phi^g k_g. \tag{17}$$

Показано, что для столбца $\gamma \in \{\mathfrak{G}\}K$ произведение $\Phi \cdot \gamma$ определено и совпадает с $\varphi[\gamma]$.

Докажем, что $\mathcal{Z}(\Phi) \in \langle \mathfrak{H}^*, \mathfrak{G}^* \rangle$. Возьмем $A \in \mathfrak{G}$. Требуется проверить, что существует элемент $B^* \in \mathfrak{H}^*$ такой, что $B^* \times \overline{A} \subseteq \mathcal{Z}(\Phi)$. Убедимся, что множество

$$B^* := \bigcap_{t\in\overline{A}} \mathcal{Z}(\Phi^t)$$

удовлетворяет этому условию. Во-первых, из определения этого множества следует включение $B^* \times \overline{A} \subseteq \mathcal{Z}(\Phi)$. Во-вторых, из $\mathfrak{G}$-суммируемости семейства $\left\{\delta^t \mid t \in \overline{A}\right\}$ следует $\mathfrak{H}^*$-суммируемость семейства $\left\{\Phi^t \mid t \in \overline{A}\right\}$ и тем самым, по необходимому признаку сходимости суммы, с учетом теоремы 6, следует равенство

$$\lim_{\mathrm{Cof}\,(\overline{A})} {}^{T(\mathfrak{H}^*)}\Phi^t = 0.$$

Из определения предела вытекает, что для произвольного элемента $B \in \mathfrak{H} = \mathfrak{H}^{**}$ и окрестности нуля $U(B)$ в топологическом пространстве $\{\mathfrak{H}^*\}K$ найдется кофинальное подмножество A_0^* в $\overline{A}$ такое, что $\Phi^t \in U(B)$, коль скоро $t \in A_0^*$. Иными словами, имеет место импликация

$$t \in A_0^* \quad \Rightarrow \quad \mathcal{Z}(\Phi^t) \supseteq \overline{B} \Leftrightarrow \mathcal{Z}(\Phi^t) \cup B = H.$$

Тогда

$$B^* \cup B = \left(\bigcap_{t\in\overline{A}} \mathcal{Z}(\Phi^t)\right) \cup B = \bigcap_{t\in\overline{A}} (\mathcal{Z}(\Phi^t) \cup B) = \left(\bigcap_{t\in A_0^*} (\mathcal{Z}(\Phi^t) \cup B)\right) \cup$$

$$\cup \left(\bigcap_{t\in\overline{A\cup A_0^*}} (\mathcal{Z}(\Phi^t) \cup B)\right) = H \cup \left(\bigcap_{t\in\overline{A\cup A_0^*}} (\mathcal{Z}(\Phi^t) \cup B)\right) = \bigcap_{t\in\overline{A\cup A_0^*}} (\mathcal{Z}(\Phi^t) \cup B)$$

— кофинальное множество, ибо объединение $\mathcal{Z}(\Phi^t) \cup B$ кофинально для любого $t \in G$ в силу того, что $\Phi^t \in \{\mathfrak{H}^*\}K$ и $B \in \mathfrak{H}$, а множество по которому берется объединение, т.е множество $\overline{A \cup A_0^*}$ — конечно. Мы доказали, что объединение $B^* \cup B$ кофинально для любого $B \in \mathfrak{H}$. Значит, $B^* \in \mathfrak{H}^*$, что и требовалось доказать.

Теперь для наперед заданного элемента B фильтра $\mathfrak{H}$ найдем элемент $A^* \in \mathfrak{G}^*$ такой, что $\overline{B} \times A^* \subseteq \mathcal{Z}(\Phi)$ (здесь $\overline{B} = H \setminus B$). Для этого достаточно доказать, что

$$A^* := \bigcap_{s\in\overline{B}} \mathcal{Z}(\Phi_s) \in \mathfrak{G}^*.$$

В свою очередь это утверждение будет следовать из того, что для любого $A \in \mathfrak{G}$ объединение $A \cup A^*$ кофинально. Перепишем A^* иначе

$$t \in A^* \Leftrightarrow \forall s \in \overline{B}\ (t \in \mathcal{Z}(\Phi_s)) \Leftrightarrow \forall s \in \overline{B}\ (\Phi_s^t = 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall s \in \overline{B}\ (s \in \mathcal{Z}(\Phi^t)) \Leftrightarrow \mathcal{Z}(\Phi^t) \supseteq \overline{B} \Leftrightarrow \mathcal{Z}(\Phi^t) \cup B = H.$$

Итак,

$$A^* = \left\{t \in G \mid \mathcal{Z}(\Phi^t) \cup B = H\right\}.$$

Выше было доказано, что в множестве $\overline{A}$ найдется кофинальное подмножество A_0^* такое, что выполняется равенство $\mathcal{Z}(\Phi^t) \cup B = H$ для всех $t \in A_0^*$. Это значит, что объединение $A \cup A^*$ кофинально в G, и результат следует.

Импликация б) $\Rightarrow$ а) следует из предложения 8.

а) $\Rightarrow$ в). Так как отображение φ непрерывно, то

$$\varphi\left[\sum_{t\in\overline{A}}{}' \delta^t k_t\right] = \varphi\left[\sum_{t\in\overline{A}} {}^{T(\mathfrak{G})}\delta^t k_t\right] = \sum_{t\in\overline{A}} {}^{T(\mathfrak{H}^*)}\varphi[\delta^t] k_t = \sum_{t\in\overline{A}} {}^{T(\mathfrak{H}^*)}\Phi^t k_t = \sum_{t\in\overline{A}} {}^{\mathfrak{H}^*}\Phi^t k_t,$$

где применена теорема 6. Доказательство основной теоремы завершено. □

ЛИТЕРАТУРА

1. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. – Наука. М., 1968.
2. Бурбаки Н. Общая топология. Топологические группы, числа и связанные с ними группы и пространства. – Наука. М., 1969.
3. Дубровина Т.В., Дубровин Н.И. *Фильтры на декартовом произведении двух множеств* // Мат. Студії. – Т.21, №2. – С.197–208.
4. Садовничий В.А. Теория операторов. – М., Высшая школа, 1999.

Владимирский государственый университет, кафедра высшей математики
ул. Горького 87, Владимир, 600026, Россия

Поступило 1.10.2003