УДК 517.95

Н. І. Гузіль

ЗАДАЧА БЕЗ ПОЧАТКОВИХ УМОВ ДЛЯ НАПІВЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ ГІПЕРБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

N. I. Guzil'. *The problem without initial conditions for semilinear first-order system of hyperbolic equations*, Matematychni Studii, **21** (2004) 187–196.

The problem without initial conditions for semilinear first-order system of hyperbolic equations in a domain bounded with respect to spatial variables and boundless with respect to time variable is investigated. Conditions for existence of a unique solution without restrictions on its behavior for $t \to -\infty$ are obtained.

Н. И. Гузиль. *Задача без начальных условий для полулинейной системи гиперболических уравнений первого порядка* // Математичні Студії. – 2004. – Т.21, №2. – С.187–196.

Исследована задача без начальных условий для полулинейной системи гиперболических уравнений первого порядка в ограниченной по пространственным переменным и неограниченной по временной переменной области. Получены условия существования единственного решения задачи без ограничения поведения решения при $t \to -\infty$.

Вперше задачу без початкової умови для рівняння теплопровідності дослідив А. М. Тихонов [1]. У праці [2] для певного нелінійного параболічного рівняння вперше було виявлено такий ефект: коректність задачі не залежить від поведінки розв'язку при $t \to -\infty$. Подібний результат для деякої напівлінійної системи гіперболічних рівнянь першого порядку з трьома незалежними змінними в необмеженому за часом паралелепіпеді одержано у статті [3]. Інші класи коректності для гіперболічних систем першого порядку з двома незалежними змінними і для напівлінійних гіперболічних рівнянь другого порядку побудовано у статтях [4–8]. Зокрема, в [4, 5] за допомогою методу характеристик доведено коректність задачі без початкових умов для лінійної гіперболічної системи з двома незалежними змінними в класі неперервних обмежених функцій. В [6] за допомогою методу Гальоркіна одержано умови розв'язності задачі без початкових умов для напівлінійної гіперболічної системи з двома незалежними змінними в класі функцій з експоненціальним зростанням при $t \to -\infty$.

У цій статті досліджено задачу без початкових умов для напівлінійної системи гіперболічних рівнянь з багатьма незалежними змінними. Доведено, що коректність задачі не залежить від поведінки розв'язку при $t \to -\infty$. Мішану задачу для такої системи рівнянь в обмеженій області досліджено в [9, с.343].

2000 *Mathematics Subject Classification:* 35L50, 35L40.

Нехай Ω — обмежена область в $\mathbb{R}^l$ з межею $\partial\Omega$ класу C^1, $Q_T = \{(x,t) : x \in \Omega, -\infty < t < T\}$. Розглянемо в Q_T систему рівнянь

$$u_t + \sum_{i=1}^{l} A_i(x,t)u_{x_i} + C(x,t)u + g(t,u) = f(x,t), \tag{1}$$

де $u = \mathrm{col}(u_1, \dots, u_m), g = \mathrm{col}(g_1, \dots, g_m), f = \mathrm{col}(f_1, \dots, f_m)$, A_i, C — матриці порядку m, $i \in \{1, \dots, l\}$.

Позначимо $Q_{t_1,t_2} = \{(x,t) : x \in \Omega, t_1 < t < t_2\}$, $-\infty < t_1 < t_2 \le T$, $\Omega_t = Q_T \cap \{\tau = t\}$. Нехай $L^r_{loc}((-\infty,T];W)$, $r \in [1,+\infty]$ є простором функцій u таких, що $u \in L^r((t_1,t_2);W)$ для всіх $t_1, t_2 \in (-\infty,T]$, $t_1 < t_2$, де W є деяким банаховим простором.

Через $(\cdot,\cdot)$ позначимо скалярний добуток в $\mathbb{R}^m$.

Вважатимемо, що виконуються умови:

(A) : елементи матриць A_i, A_{ix_j} належать до простору $L^\infty(Q_T)$ для всіх $i,j \in \{1, \dots, l\}$;
$A_i(x,t) = A_i^*(x,t), i \in \{1, \dots, l\}$, $(x,t) \in Q_T$;

(C) : елементи матриці C належать до простору $L^\infty_{loc}((-\infty,T];L^\infty(\Omega))$,
$(C(x,t)\xi,\xi) \ge c_0|\xi|^2$ майже для всіх $(x,t) \in Q_T$, для всіх $\xi \in \mathbb{R}^m, c_0 = \mathrm{const}$;
елементи матриць C_{x_i} належать до простору $L^\infty(Q_T), i \in \{1, \dots, l\}$;

(G) : функції $t \to g(t,\xi)$ є вимірними на $(-\infty,T)$ для всіх $\xi \in \mathbb{R}^m$;
функції $\xi \to g(t,\xi)$ є неперервними в $\mathbb{R}^m$ майже для всіх $t \in (-\infty,T]$;
існують такі додатні сталі g_0, g_1, що для всіх $\xi, \eta \in \mathbb{R}^m$ і майже всіх $t \in (-\infty,T]$ виконуються нерівності

$$|g_i(t,\xi)| \le g_1 \sum_{j=1}^{m} |\xi_j|^{p-1}, \quad i \in \{1, \dots, m\}, \quad p > 2,$$

$$(g(t,\xi) - g(t,\eta), \xi - \eta) \ge g_0|\xi - \eta|^p;$$

$(G(t,\eta)\xi,\xi) \ge 0$ для майже всіх $t \in (-\infty,T]$ і майже для всіх $\eta, \xi \subset \mathbb{R}^m$, де

$$G(t,\eta) = \left(\frac{\partial g_i(t,\eta)}{\partial \eta_j}\right)_{i,j=1}^{m}.$$

Позначимо через S^1_τ множину таких точок поверхні $S_\tau = \partial\Omega \times (-\infty,\tau)$, $\tau \in (-\infty,T]$, що $\sum_{i=1}^{l}(A_i(x,t)\cos(n,x_i)\xi,\xi) < 0$ для всіх $\xi \in \mathbb{R}^m \backslash \{0\}$, через S^2_τ — множину таких точок поверхні S_τ, що $\sum_{i=1}^{l}(A_i(x,t)\cos(n,x_i)\xi,\xi) \ge 0$ для всіх $\xi \in \mathbb{R}^m$, де n є зовнішньою нормаллю до $\partial\Omega$, а через $S^2_{t_1,t_2} = \Gamma_2 \times (t_1,t_2)$.

Задамо для системи (1) крайові умови

$$u(x,t) = 0 \quad \text{на} \quad S^1_T. \tag{2}$$

Говоритимемо, що система (1) задовольняє умову (S), якщо

(S) : $S^1_T = \Gamma_1 \times (-\infty,T)$, $\quad S^2_T = \Gamma_2 \times (-\infty,T)$, $\quad \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial\Omega$.

Позначимо через $V_1(\Omega)$ простір функцій

$$V_1(\Omega) = \{v : v \in H^1(\Omega); v|_{\Gamma_1} = 0\},$$

через $V_{1,loc}(\bar{Q}_T)$ простір функцій v, які належать до $H^1(Q_{t_1,T})$ для довільного $t_1 \in (-\infty, T)$ і таких, що $v|_{S_T^1} = 0$, через $L^p_{loc}(\bar{Q}_T)$ простір функцій v, які належать до $L^p(Q_{t_1,T})$ для довільного $t_1 \in (-\infty, T)$, а через $L^2_{loc}(\bar{S}_T^2)$ простір функцій v, які належать до $L^2(S^2_{t_1,T})$ для довільного $t_1 \in (-\infty, T]$.

Позначимо через $A_n(x,t)$ матрицю $\sum_{i=1}^l A_i(x,t)\cos(n, x_i)$.

Означення. *Узагальненим розв'язком* задачі (1), (2) називатимемо функцію $u \in (C((-\infty, T]; L^2(\Omega)) \cap L^p_{loc}(\bar{Q}_T))^m$, $A_n^{\frac{1}{2}} u \in (L^2_{loc}(\bar{S}_T^2))^m$, яка задовольняє умову (2) і для всіх $v \in (V_{1,loc}(\bar{Q}_T) \cap L^p_{loc}(\bar{Q}_T))^m$, $\forall t_1, t_2 \in (-\infty, T]$, $t_1 < t_2$ рівність

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \Bigg[-(u, v_t) - \sum_{j=1}^l (A_j(x,t)u, v_{x_j}) - \sum_{j=1}^l (A_{jx_j}(x,t)u, v) + (C(x,t)u, v) +$$

$$+(g(t,u), v) - (f(x,t), v)\Bigg] dxdt + \int\limits_{\Omega_t} (u, v)dx \,|_{t_1}^{t_2} + \int\limits_{S^2_{t_1,t_2}} (A_n(x,t)u, v)dS = 0. \qquad (3)$$

Теорема. *Нехай виконуються умови (A), (C), (G), (S),*

$$f \in (L^2_{loc}((-\infty, T]; (V_1(\Omega)))^m, A_n^{-\frac{1}{2}} f \in (L^2_{loc}((-\infty, T]; L^2(\Gamma_1)))^m,$$

$2 < p \le \frac{2l}{l-2}$, *для* $l > 2$. *Тоді існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (1), (2).*

Доведення. Розглянемо спочатку систему (1) з крайовими умовами (2) в обмеженій області $Q_{t_0,T}$ з початковими умовами

$$u(x, t_0) = 0. \qquad (4)$$

Побудуємо послідовність функцій

$$u^N(x,t) = \sum_{k=1}^N c_k^N(t)\varphi_k(x), \quad N \in \mathbb{N},$$

де $\{\varphi_k(x)\}$ — система власних функцій задачі

$$\triangle u = \lambda u, \quad u\,|_{\Gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}\,|_{\Gamma_2} = 0,$$

яка відповідає послідовності власних значень $\{\lambda_k\}$, а $(c_1^N, \dots, c_N^N)$ є розв'язком такої задачі Коші

$$\int\limits_{\Omega} \Bigg[(u_t^N, \varphi_k) + \sum_{j=1}^l (A_j(x,t)u_{x_j}^N, \varphi_k) + (C(x,t)u^N, \varphi_k) + (g(t, u^N), \varphi_k) -$$

$$-(f(x,t), \varphi_k)\Bigg] dx = 0, \qquad (5)$$

$$c_k^N(t_0) = 0, \quad k \in \{1, \dots, N\}. \qquad (6)$$

Тут $\triangle u = (\triangle u_1, \dots, \triangle u_m)$. Зазначимо, що при виконанні умови $2 < p \le \frac{2l}{l-2}$ система функцій $\{\varphi_k(x)\}$ є базою простору $(V_1(\Omega) \cap L^p(\Omega))^m$.

На підставі теореми Каратеодорі [11] задача (5), (6) має абсолютно неперервний розв'язок, визначений на відрізку $[t_0, t_0 + h]$, $h > 0$. З оцінок, одержаних нижче, випливатиме, що $t_0 + h = T$. Тому вважатимемо, що розв'язок задачі (5), (6) визначений на $[t_0, T]$.

Помножимо кожне рівняння системи (5) відповідно на функцію $c_k^N(t)$, додамо їх за k від 1 до N і проінтегруємо на проміжку $[t_0, \tau]$, $\tau \in (t_0, T]$. Після виконання цих операцій одержуємо рівність

$$\int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \Big[(u_t^N, u^N) + \sum_{j=1}^{l} (A_j(x,t) u_{x_j}^N, u^N) + (C(x,t)u^N, u^N) + (g(t, u^N), u^N) - \\ -(f(x,t), u^N)\Big] dxdt = 0. \tag{7}$$

Перетворимо і оцінимо кожний доданок з рівності (7) окремо, враховуючи умови теореми. Згідно з умовою (A) існує така стала a_1, що

$$I_1 \equiv \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{j=1}^{l} (A_j(x,t) u_{x_j}^N, u^N) dxdt = \frac{1}{2} \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^{l} [A_i(x,t)u^N, u^N]_{x_i} dxdt - \\ -\frac{1}{2} \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^{l} (A_{ix_i}(x,t)u^N, u^N) dxdt \ge -\frac{a_1}{2} \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} |u^N|^2 dxdt + \frac{1}{2} \int\limits_{S^2_{t_0,\tau}} (A_n(x,t)u^N, u^N) dS.$$

На підставі умов (C) і (G) для $\delta > 0$, $p' = \frac{p}{p-1}$ маємо

$$I_2 \equiv \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} [(u_t^N, u^N) + (C(x,t)u^N, u^N) + (g(t, u^N), u^N) - (f(x,t), u^N)] dxdt \ge \\ \ge \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_\tau} |u^N|^2 dx + \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \left[c_0 |u^N|^2 + \left(g_0 - \frac{\delta}{p}\right) |u^N|^p - \frac{\mu_0(\delta)}{p'} |f(x,t)|^{p'}\right] dxdt.$$

Враховуючи оцінки інтегралів I_1, I_2, з рівності (7) для $\tau \in [t_0, T]$ одержуємо

$$\int\limits_{\Omega_\tau} |u^N|^2 dx + \int\limits_{S^2_{t_0,\tau}} (A_n(x,t)u^N, u^N) dS + 2\left(g_0 - \frac{\delta}{p}\right) \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} |u^N|^p dxdt \le \\ \le (a_1 - 2c_0) \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} |u^N|^2 dxdt + \frac{2\mu_0(\delta)}{p'} \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} |f(x,t)|^{p'} dxdt. \tag{8}$$

Нехай $\delta = \frac{g_0 p}{2}$, $\mu_1 = \max\{0; a_1 - 2c_0\}$. Використовуючи лему Гронуолла-Беллмана з (8)

отримуємо оцінки

$$\int\limits_{\Omega_\tau} |u^N|^2 dx \le \mu_3, \quad \tau \in [t_0, T], \tag{9}$$

$$\int\limits_{Q_{t_0,T}} |u^N|^2 dxdt \le \mu_4, \tag{10}$$

$$\int\limits_{Q_{t_0,T}} |u^N|^p dxdt \le \mu_4, \quad \int\limits_{S^2_{t_0,T}} (A_n(x,t)u^N, u^N) dS \le \mu_4, \tag{11}$$

де сталі μ_3, μ_4 не залежать від N.

Помножимо кожне з рівнянь (5) відповідно на функцію $-\lambda_k c_k^N(t)$, замінимо $\lambda_k \varphi_k$ на $\triangle\varphi_k$, підсумуємо за k від 1 до N і проінтегруємо по проміжку $[t_0, \tau]$, $\tau \in (t_0, T]$. Після виконання цих перетворень одержуємо рівність

$$-\int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \Big[(u_t^N, \triangle u^N) + \sum_{j=1}^{l} (A_j(x,t)u_{x_j}^N, \triangle u^N) + (C(x,t)u^N, \triangle u^N) +$$
$$+(g(t,u^N), \triangle u^N) - (f(x,t), \triangle u^N)\Big] dxdt = 0. \tag{12}$$

Перетворимо і оцінимо кожний доданок (12) окремо, врахувавши умови теореми. Одержимо

$$I_3 \equiv -\int\limits_{Q_{t_0,\tau}} (u_t^N, \triangle u^N) dxdt = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{l} \int\limits_{\Omega_\tau} |u_{x_j}^N|^2 dx;$$

$$I_4 \equiv -\sum_{i,j=1}^{l} \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} (A_i(x,t)u_{x_i}^N, u_{x_j x_j}^N) dxdt \equiv I_4^1 + I_4^2,$$

де

$$I_4^1 \equiv \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i,j=1}^{l} \Big[(A_{ix_j}(x,t)u_{x_i}^N, u_{x_j}^N) - \frac{1}{2}(A_{ix_i}(x,t)u_{x_j}^N, u_{x_j}^N)\Big] dxdt \ge -a_2 l \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^{l} |u_{x_i}^N|^2 dxdt.$$

Розглянемо тепер

$$I_4^2(S_\tau) \equiv -\frac{1}{2} \int\limits_{S_\tau} \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{l} [2(A_i(x,t)u_{x_i}^N, u_{x_j}^N)\cos(n, x_j) - (A_i(x,t)u_{x_j}^N, u_{x_j}^N)\cos(n, x_i)] dS.$$

Отримуємо

$$-\frac{1}{2} \int\limits_{S_\tau^1} \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{l} \big[2(A_i(x,t)u_{x_i}^N, u_{x_j}^N)\cos(n, x_j) - (A_i(x,t)u_{x_j}^N, u_{x_j}^N)\cos(n, x_i)\big] dS =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_{S_\tau^1}\sum_{j=1}^{l}\Big[\sum_{i=1}^{l}(A_i\cos(n,x_i)u_{x_j}^N,u_{x_j}^N)\Big]dS \geq 0.$$

Оскільки $\frac{\partial u^N}{\partial n}=0$ на S_T^2, то

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{S_\tau^2}\sum_{i=1}^{l}\Big[\sum_{j=1}^{l}(2(A_i(x,t)u_{x_i}^N,u_{x_j}^N)\cos(n,x_j)-(A_i(x,t)u_{x_j}^N,u_{x_j}^N)\cos(n,x_i))\Big]dS =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_{S_\tau^2}\Big[\sum_{i=1}^{l}2(A_i(x,t)u_{x_i}^N,\sum_{j=1}^{l}u_{x_j}^N\cos(n,x_j))-(A_i(x,t)\sum_{j=1}^{l}u_{x_j}^N\cos(n,x_j),u_{x_j}^N)\Big]dS = 0.$$

Отже, $I_4^2(S_\tau)=I_4^2(S_\tau^1)+I_4^2(S_\tau^2)\geq 0$. Далі, послідовно отримуємо

$$I_5 \equiv -\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}\sum_{i=1}^{l}(C(x,t)u^N,u_{x_ix_i}^N)dxdt = -\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}\sum_{i=1}^{l}[(C(x,t)u^N,u_{x_i}^N)]_{x_i}dxdt +$$

$$+\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}\sum_{i=1}^{l}(C_{x_i}(x,t)u^N,u_{x_i}^N)dxdt+\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}\sum_{i=1}^{l}(C(x,t)u_{x_i}^N,u_{x_i}^N)dxdt \geq$$

$$\geq -\frac{1}{2}c_1\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}|u^N|^2dxdt-\left(\frac{1}{2}-c_0\right)\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}\sum_{i=1}^{l}|u_{x_i}^N|^2dxdt;$$

$$I_6 \equiv -\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}\sum_{i=1}^{l}(g(t,u^N),u_{x_ix_i}^N)dxdt = -\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}g_j(t,u^N)u_{j,x_ix_i}^N dxdt =$$

$$= -\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}(g_j(t,u^N),u_{j,x_i}^N)_{x_i}dxdt+\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial g_j}{\partial u_s^N}u_{s,x_i}^N u_{j,x_i}^N dxdt \geq 0;$$

$$I_7 \equiv \int\limits_{Q_{t_0,\tau}}(f(x,t),\triangle u^N)dxdt \geq -\frac{1}{2}\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}\sum_{j=1}^{l}|f_{x_j}(x,t)|^2dxdt-\frac{1}{2}\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}\sum_{j=1}^{l}|u_{x_j}^N|^2dxdt.$$

Враховуючи оцінки інтегралів $I_3,\dots,I_7$, з рівності (12) одержуємо нерівність

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{j=1}^{l}|u_{x_j}^N|^2dx \leq 2(1-c_0+a_2l)\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}\sum_{i=1}^{l}|u_{x_i}^N|^2dxdt +$$

$$+c_1\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}|u^N|^2dxdt+\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}\sum_{i=1}^{l}|f_{x_i}(x,t)|^2dxdt. \qquad (13)$$

Використовуючи нерівність (10) і лему Гронуолла-Беллмана, з (13) отримуємо оцінки

$$\int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{j=1}^{l} |u^N_{x_j}|^2 dx \le \mu_5, \quad \tau \in [t_0, T], \tag{14}$$

$$\int\limits_{Q_{t_0,T}} \sum_{j=1}^{l} |u^N_{x_j}|^2 dxdt \le \mu_5, \tag{15}$$

де стала μ_5 не залежить від N.

Позначимо $V_1(Q_{t_0,T}) = \{v : v \in H^1(Q_{t_0,T}), v|_{S^1_{t_0,T}} = 0\}$. На підставі оцінок (9)–(11), (14), (15) існує підпослідовність $\{u^{N_k}\} \subset \{u^N\}$ така, що при $k \to \infty$

$u^{N_k} \to u \quad *-$слабко в $(L^\infty((t_0,T);(V_1(Q_{t_0,\tau})))^m, \quad u^{N_k} \to u \quad$ слабко в $(L^p(Q_{t_0,T}))^m$,

$A_n^{\frac{1}{2}} u^{N_k} \to \omega \quad$ слабко в $(L^2(S^2_{t_0,T}))^m, \quad u^{N_k}(\cdot, T) \to \xi \quad$ слабко в $(L^2(\Omega))^m$.

Крім того, за умовою (G) і нерівностями (11) маємо $\int_{Q_{t_0,T}} |g(t,u^N)|^{p'} dxdt \le \mu_6$, причому μ_6 не залежить від N. Тому можемо вважати, що $g(\cdot, u^{N_k}) \to z$ слабко в $(L^{p'}(Q_{t_0,T}))^m$ при $k \to \infty$. Тоді з (5) отримаємо рівність

$$\int\limits_{Q_{t_0,T}} \Big[-(u, v_t) + \sum_{i=1}^{l} (A_i(x,t)u_{x_i}, v) + (C(x,t)u, v) + (z(x,t), v) - (f(x,t), v)\Big] dxdt +$$
$$+ \int\limits_{\Omega_T} (\xi, v) dx = 0, \tag{16}$$

правильну для довільної $v \in (V_1(Q_{t_0,T}) \bigcap L^p(Q_{t_0,T}))^m$. З (16) одержуємо, що в $Q_{t_0,T}$

$$u_t = -\sum_{i=1}^{l} A_i(x,t)u_{x_i} - C(x,t)u - z(x,t) + f(x,t),$$

тобто $u_t \in (L^{p'}(Q_{t_0,T}))^m$ і $u \in (C([t_0,T]; L^2(\Omega)))^m$. Тому з (16) випливає, що $u(x,T) = \xi(x)$ і крім того, $A_n(x,t)u(x,t) = \omega(x,t)$ на $S^2_{t_1,t_2}$, а на $S^1_{t_0,T}$ виконується рівність $u(x,t) = 0$. Очевидно, що для функції u є правильна рівність

$$\int\limits_{\Omega} (u(x,\tau), w(x)) dx = \int\limits_{t_0}^{\tau} \int\limits_{\Omega_t} (f(x,t) - \sum_{i=1}^{l} A_i(x,t)u_{x_i} - C(x,t)u - z, w(x)) dxdt -$$
$$- \int\limits_{S^2_{t_0,\tau}} (A_n(x,t)u, w) dS, \quad w \in (L^p(\Omega))^m.$$

Звідси $\lim\limits_{\tau \to t_0} \int\limits_{\Omega} (u(x,t), w(x)) dx = 0$, тобто функція u задовольняє початкову умову (4).

Використовуючи монотонність g за змінною u, подібно як у книзі [9, с. 171] доводимо, що $z = g(\cdot, u)$. Отже, функція u є розв'язком задачі (1), (2), (4) майже скрізь.

Продовжимо функції u_i, $i \in \{1, \dots, m\}$ нулем на область $Q_{-\infty,t_0}$ і збережемо для них ті ж позначення. Тоді ці функції задовольнятимуть для довільної функції $v \in$

$(L^p(Q_{t_1,T}))^m$ і довільного t_1, $t_1 \le t_0$ рівності

$$\int\limits_{Q_{t_1,T}} \Big(u_t + \sum_{j=1}^{l} A_j(x,t)u_{x_j} + C(x,t)u + g(t,u) - f^{t_0}(x,t), v\Big)dxdt = 0, \tag{17}$$

де $f^{t_0}(x,t) = \begin{cases} f(x,t), & (x,t) \in Q_{t_0,T}, \\ 0, & (x,t) \in Q_{-\infty,t_0}. \end{cases}$

Нехай t_0 приймає значення $T-1, T-2, \dots, T-k, \dots$ Тоді матимемо послідовність функцій $\{u^k(x,t)\}$, кожна з яких задовольняє (17). Приймемо, що $v = (u^m - u^k)\psi(t)$, $m,k \in \mathbb{N}$, де

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & t_0 \le t \le T, \\ (\frac{t-t_1}{t_0-t_1})^\alpha, & t_1 \le t < t_0, \\ 0, & t < t_1, \end{cases}$$

а $\alpha > \frac{p}{p-2}$. Розглянемо рівності (17) для u^m, u^k, віднімемо їх і позначимо $u^{m,k} = u^m - u^k$. Тоді $\forall t_1, t_2 \in (-\infty, T]$ таких, що $t_1 < t_2$, $t_2 \in [t_0, T]$ і для m,k більших від $|t_1|$ матимемо рівності

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \Big[(u_t^{m,k}, u^{m,k}\psi(t)) + \sum_{j=1}^{l}(A_j(x,t)u_{x_j}^{m,k}, u^{m,k}\psi(t)) + (C(x,t)u^{m,k}, u^{m,k}\psi(t)) + \\ +((g(t,u^m) - g(t,u^k)), u^{m,k}\psi(t))\Big]dxdt = 0. \tag{18}$$

Оцінивши кожен доданок з рівності (18) окремо, одержимо

$$\int\limits_{\Omega_{t_2}} |u^{m,k}|^2 dx - \int\limits_{Q_{t_1,t_2}} |u^{m,k}|^2\psi'(t)dxdt + (2c_0 - a_1)\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} |u^{m,k}|^2\psi(t)dxdt + \\ + \int\limits_{S^2_{t_1,t_2}} (A_n(x,t)u^{m,k}, u^{m,k})dS + 2g_0\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} |u^{m,k}|^p\psi(t)dxdt \le 0. \tag{19}$$

Крім того,

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} |u^{m,k}|^2\psi'(t)dxdt \le \frac{2\delta}{p}\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} |u^{m,k}|^p\psi(t)dxdt + \mu(\delta)\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \left|\frac{\psi_t}{\psi^{2/p}}\right|^r dxdt,$$

де $r = \frac{p}{p-2}$. Тому з нерівності (19) отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_{t_2}} |u^{m,k}|^2 dx + \left(2g_0 - \frac{2\delta}{p}\right)\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} |u^{m,k}|^p\psi(t)dxdt \le \\ \le \mu(\delta)\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \frac{|\psi'(t)|^{p/(p-2)}}{|\psi(t)|^{2/(p-2)}}dxdt + (a_1 - 2c_0)\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} |u^{m,k}|^2\psi(t)dxdt.$$

Використовуючи лему Гронуолла-Беллмана, звідси отримуємо нерівність

$$\int\limits_{\Omega_{t_2}} |u^{m,k}|^2 dx \le \mu_7 \int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \frac{|\psi'(t)|^{p/(p-2)}}{|\psi(t)|^{2/(p-2)}} dxdt, \tag{20}$$

причому стала μ_7 не залежить від m, k і t_1. Легко бачити, що права частина нерівності (20) може бути оцінена величиною $\mu_8(t_0-t_1)^{1-\frac{p}{p-2}}$ і, оскільки $\frac{p}{p-2} > 1$, може бути зроблена довільно малою за рахунок вибору t_1. Отже, послідовність $\{u^k\}$ є фундаментальною в просторах $(L^p(Q_{t_0,T}))^m$, $(C([t_0,T],\ \ L^2(\Omega)))^m$, а послідовність $\{A_n^{\frac{1}{2}}u^k\}$ є фундаментальною в просторі $(L^2(S^2_{t_0,T}))^m$ для довільного $t_0 \in (-\infty, T)$.

Запишемо для $v \in (V_{1,loc}(\bar{Q}_T) \cap L^p_{loc}(\bar{Q}_T))^m$ рівність (17) у вигляді

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \Big[-(u^k, v_t) - \sum_{j=1}^{l}(A_j(x,t)u^k, v_{x_i}) - (\sum_{j=1}^{l} A_{jx_i}(x,t)u^k, v) + (C(x,t)u^k, v) +$$
$$+(g(t,u^k), v) - (f^{T-k}(x,t), v)\Big] dxdt + \int\limits_{\Omega_t} (u^k, v)dx|_{t_1}^{t_2} + \int\limits_{S^2_{t_1,t_2}} (A_n(x,t)u^k, v)dS = 0. \tag{21}$$

Перейшовши в (21) до границі при $k \to +\infty$, одержимо (3), що й доводить існування узагальненого розв'язку задачі (1), (2).

Доведемо єдиність узагальненого розв'язку задачі (1), (2). Припустимо, що існують два узагальнені розв'язки u^1 і u^2 цієї задачі. Позначимо через $u(x,t) = u^1(x,t) - u^2(x,t)$. Тоді для всіх $t_1, t_2 \in (-\infty, T]$, $t_1 < t_2$ і для довільних $v \in (V_{1,loc}(\bar{Q}_T) \cap L^p_{loc}(\bar{Q}_T))^m$ u задовольняє рівність

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \Big[-(v_t, u) - \sum_{i=1}^{l}(A_i(x,t)v_{x_i}, u) - \sum_{i=1}^{l}(A_{ix_i}(x,t)v, u) + (C(x,t)u, v) +$$
$$+(g(t,u^1) - g(t,u^2), v)\Big] dxdt + \int\limits_{S^2_{t_1,t_2}} (A_n(x,t)u, v)dS + \int\limits_{\Omega_t} (u,v)|_{t_1}^{t_2} dx = 0. \tag{22}$$

У рівності (22) виберемо $v(x,t) = w(x,t)\psi(t)$, де $w \in (V_{1,loc}(\bar{Q}_T) \cap L^p_{loc}(\bar{Q}_T))^m$, і перепишемо її у вигляді

$$-\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} (u, Aw)\psi(t)dxdt + \int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \Big[-(u,w)\psi'(t) - \sum_{i=1}^{l}(A_{ix_i}(x,t)u, w)\psi(t) + (C(x,t)u, w)\psi(t) +$$
$$+(g(t,u^1) - g(t,u^2), w)\psi(t)\Big] dxdt + \int\limits_{S^2_{t_1,t_2}} (A_n(x,t)u, w)\psi(t)dS + \int\limits_{\Omega_{t_2}} (u,w)\psi(t_2)dx = 0, \tag{23}$$

де $Aw = w_t + \sum_{i=1}^{l} A_i(x,t)w_{x_i}$. Оскільки $u^k, k \in \{1,2\}$ є узагальненим розв'язком задачі (1), (2), то $Au^k = f - Cu^k - g(\cdot, u^k) \in (L^p_{loc}(\bar{Q}_T))^m$ і $Au = -Cu - (g(\cdot, u^1) - g(\cdot, u^2))$.

Отже, у рівності (23) можемо прийняти $w = u$. Отримаємо рівність

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \Big[-(u,u)\psi'(t) - \sum_{i=1}^{l}(A_{ix_i}u,u)\psi(t) + 2(C(x,t)u,u)\psi(t) + 2(g(t,u^1) -$$

$$-g(t,u^2),u)\psi(t)\Big]dxdt + \int\limits_{S^2_{t_1,t_2}} (A_n(x,t)u,u)\psi(t)dS + \int\limits_{\Omega_{t_2}} (u,u)\psi(t_2)dx = 0. \qquad (24)$$

З рівності (24), подібно до того, як отримали (20), одержуємо оцінку

$$\int\limits_{\Omega_{t_2}} |u|^2 dx \le \mu_8 \int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \frac{|\psi'(t)|^{p/(p-2)}}{|\psi(t)|^{2/(p-2)}} dxdt,$$

де стала μ_8 не залежить від t_1 і t_2. Отже, інтеграл $\int_{\Omega_t} |u|^2 dx$ може бути зробленим довільно малим на проміжку $[t_0, T]$. Враховуючи довільність t_0, матимемо єдиність узагальненого розв'язку задачі (1), (2). □

ЛІТЕРАТУРА

1. Tychonoff A. *Theorémes d'unicité pour l'equation de la chaleur* // Mat. Sbornik. – 1935. – V.42, №2.– P.199–216.
2. Бокало Н.М. *О задаче без начальных условий для некоторых классов нелинейных параболических уравнений* // Труды семинара им. И.Г.Петровского. – 1989. – Вып.14. – С.3–44.
3. Лавренюк С., Оліскевич М. *Задача Фур'є для однієї нелінійної системи гіперболічних рівнянь з трьома незалежними змінними* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2002. – Вип.60. – С.80–91.
4. Кирилич В.М., Мишкіс А.Д. *Крайова задача без початкових умов для лінійної одновимірної системи рівнянь гіперболічного типу* // Доп. АН УРСР, сер.А. – 1991. – №5. – С.8–10.
5. Кирилич В.М., Мышкис А.Д. *Краевые задачи без начальных условий для линейной однородной системы уравнений гиперболического типа* // Дифференциальные уравнения. – 1992. – Т.28, №3. – С.463–469.
6. Lavrenyuk S.P., Zaręba L. *Nonlocal problem for the nonlinear system of the first order without initial conditions* // Мат. Студії. – 2000. – Т.14, №2. – С.150–158.
7. Лавренюк С.П. *Задача без начальных условий для одной эволюционной системы. Условия единственности* // Нелинейные граничные задачи. Сб. науч. труд. – 1993. – Вып. 5. – Донецк, 1993. – С.53-58.
8. Лавренюк С.П. *Задача для одного эволюционного уравнения в полуограниченном по времени цилиндре* // Укр. мат. журн. – 1990. – Т.42, №11. – С.1481–1486.
9. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 588 с.
10. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1978. – 336 с.
11. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Изд. ИЛ, 1958. – 475 с.

Львівський національний університет імені Івана Франка
механіко-математичний факультет
dmmf@franko.lviv.ua

Надійшло 11.03.03
Після переробки 11.03.04