УДК 517.5

О. С. Посіко, О. Б. Скасків, М. М. Шеремета

ОЦІНКИ ІНТЕГРАЛУ ЛАПЛАСА-СТІЛЬТЬЄСА

O. S. Posiko, O. B. Skaskiv, M. M. Sheremeta. *Estimates of the Laplace-Stiltjes integral*, Matematychni Studii, **21** (2004) 179–186.

Let F be a nonnegative nondecreasing unbounded and continuous on the right on $[0,+\infty)$ function and f be a nonnegative on $[0,+\infty)$ function. Estimates of the integral $I(\sigma) = \int_0^{+\infty} f(x)e^{x\sigma}dF(x)$ by $\mu(\sigma) = \sup\{f(x)e^{x\sigma} : x \geq 0\}$ are obtained.

О. С. Посико, О. Б. Скаскив, М. Н. Шеремета. *Оценки интеграла Лапласа-Стильтьеса* // Математичні Студії. – 2004. – Т.21, №2. – С.179–186.

Пусть F — неотрицательная, неубывающая, неограниченная и непрерывная справа на $[0,+\infty)$ функция, а f — неотрицательная на $[0,+\infty)$ функция. Получены оценки интеграла $I(\sigma) = \int_0^{+\infty} f(x)e^{x\sigma}dF(x)$ через $\mu(\sigma) = \sup\{f(x)e^{x\sigma} : x \geq 0\}$.

Нехай F — невід'ємна, неспадна, необмежена і неперервна справа на $[0,+\infty)$ функція, а f — така невід'ємна на $[0,+\infty)$ функція, що для кожних $\sigma \in \mathbb{R}$ і $A > 0$ існує інтеграл Лебега-Стільтьєса $\int_0^A f(x)e^{x\sigma}dF(x)$. Інтегралом Лапласа-Стільтьєса будемо називати

$$I(\sigma) = \int\limits_0^{+\infty} f(x)e^{x\sigma}dF(x). \tag{1}$$

Якщо $F(x) \equiv x$, то $I(\sigma) = \int_0^{+\infty} f(x)e^{x\sigma}dx$ є звичайним інтегралом Лапласа. Якщо ж (λ_n) — зростаюча до $+\infty$ послідовність невід'ємних чисел ($\lambda_0 = 0$), $F(x) = n(x)$, де $n(t) = \sum_{\lambda_n \leq t} 1$ — лічильна функція цієї послідовності, а f — така невід'ємна на $[0,+\infty)$ функція, що $f(\lambda_n) = a_n \geq 0$ для всіх $n \geq 0$, то

$$I(\sigma) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{\lambda_n \sigma} \tag{2}$$

є рядом Діріхле з невід'ємними показниками та коефіцієнтами.

1. Максимум підінтегральної функції та його центральна точка. Якщо $\mu(\sigma)$ і $\nu(\sigma)$ — відповідно максимальний член і центральний індекс ряду Діріхле (2), то добре відомо (див., наприклад, [1, с.182] і [2, с.17]), що $\ln \mu(\sigma) = \ln \mu(\sigma_0) + \int_{\sigma_0}^{\sigma} \lambda_{\nu(x)}dx$.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 33B50, 44A10.

Аналогом максимального члена для інтегралу Лапласа-Стільтьєса є максимум його підінтегральної функції $\mu(\sigma) = \sup\{f(x)e^{x\sigma} : x \geq 0\}$, $\sigma \in \mathbb{R}$.

Якщо існує $\mu(\sigma_2) < +\infty$ і $\sigma_1 < \sigma_2$, то $\mu(\sigma_1) < +\infty$. Тому або $\mu(\sigma) < +\infty$ для всіх $\sigma \in \mathbb{R}$, або $\mu(\sigma) = +\infty$ для всіх $\sigma \in \mathbb{R}$, або існує $\sigma_\mu \in \mathbb{R}$ таке, що $\mu(\sigma) < +\infty$ для всіх $\sigma < \sigma_\mu$ і $\mu(\sigma) = +\infty$ для всіх $\sigma > \sigma_\mu$. Надалі вважатимемо, що $-\infty < \sigma_\mu \leq +\infty$ і $f(x) \not\equiv 0$ на кожному проміжку $[x_0, +\infty)$.

Використовуючи означення $\mu(\sigma)$, неважко довести (див., наприклад, [3–6]), що $\sigma_\mu = \varliminf\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \ln \frac{1}{f(x)}$ і функція $\ln \mu(\sigma)$ опукла на $(-\infty, \sigma_\mu)$.

Для $\sigma \in (-\infty, \sigma_\mu)$ і $\varepsilon > 0$ приймемо $\nu(\sigma, \varepsilon) = \sup\{x \geq 0 : \ln f(x) + \sigma x \geq \ln \mu(\sigma) - \varepsilon\}$. Зрозуміло, для фіксованого $\sigma \in (-\infty, \sigma_\mu)$ функція $\nu(\sigma, \cdot)$ є незростаючою на $(0, +\infty)$. Тому існує величина $\nu(\sigma) = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \nu(\sigma, \varepsilon)$, яку будемо називати центральною точкою максиму підінтегральної функції.

Твердження 1. *Функція ν є неспадною на $(-\infty, \sigma_\mu)$ і $(\ln \mu(\sigma))' = \nu(\sigma)$ для всіх $\sigma \in (-\infty, \sigma_\mu)$ за винятком щонайбільше зліченної множини точок.*

Доведення. Покажемо спочатку, що для довільних $\sigma \in (-\infty, \sigma_\mu)$ і $\varepsilon > 0$ множина

$$E(\sigma, \varepsilon) = \{x \geq 0 : |x - \nu(\sigma)| < \varepsilon, \ln f(x) + \sigma x \geq \ln \mu(\sigma) - \varepsilon\}$$

непорожня. Справді, зафіксуємо $\sigma \in (-\infty, \sigma_\mu)$ і $\varepsilon > 0$. Тоді існує таке $\delta \in (0, \varepsilon)$, що

$$|\nu(\sigma) - \sup\{x \geq 0 : \ln f(x) + \sigma x \geq \ln \mu(\sigma) - \delta\}| < \varepsilon/2 \tag{3}$$

та існує $x_0 \geq 0$ таке, що

$$\ln f(x_0) + \sigma x_0 \geq \ln \mu(\sigma) - \delta \tag{4}$$

і

$$|x_0 - \sup\{x \geq 0 : \ln f(x) + \sigma x \geq \ln \mu(\sigma) - \delta\}| < \varepsilon/2 \tag{5}$$

З (3)–(5) отримуємо $|x_0 - \nu(\sigma)| < \varepsilon$ і $\ln f(x_0) + \sigma x_0 \geq \ln \mu(\sigma) - \varepsilon$, тобто $x_0 \in E(\sigma, \varepsilon)$ і $E(\sigma, \varepsilon)$ — непорожня множина.

Оскільки $E(\sigma, \varepsilon)$ — непорожня множина для довільних $\sigma \in (-\infty, \sigma_\mu)$ і $\varepsilon > 0$, то для кожного $\varepsilon > 0$ існує функція $\nu_\varepsilon(\sigma) \geq 0$ така, що для всіх $\sigma \in (-\infty, \sigma_\mu)$

$$\ln \mu(\sigma) \geq \ln f(\nu_\varepsilon(\sigma)) + \sigma\nu_\varepsilon(\sigma) \geq \ln \mu(\sigma) - \varepsilon \tag{6}$$

і

$$|\nu_\varepsilon(\sigma) - \nu(\sigma)| < \varepsilon. \tag{7}$$

Нехай $\sigma_1, \sigma_2 \in (-\infty, \sigma_\mu)$. За означенням

$$\ln \mu(\sigma_1) \geq \ln f(\nu_\varepsilon(\sigma_2)) + \sigma_1\nu_\varepsilon(\sigma_2). \tag{8}$$

З (8) маємо

$$\ln \mu(\sigma_2) \leq \varepsilon + \ln f(\nu_\varepsilon(\sigma_2)) + \sigma_2\nu_\varepsilon(\sigma_2), \tag{9}$$

а з (8) і (9) отримуємо $\ln\,\mu(\sigma_2)-\ln\,\mu(\sigma_1)\le(\sigma_2-\sigma_1)\nu_\varepsilon(\sigma_2)+\varepsilon$. Спрямовуючи тут $\varepsilon\to 0$ і враховуючи (7), дістаємо

$$\ln\,\mu(\sigma_2)-\ln\,\mu(\sigma_1)\le(\sigma_2-\sigma_1)\nu(\sigma_2). \tag{10}$$

Оскільки σ_1 і σ_2 довільні, то, міняючи їх місцями, отримуємо також нерівність

$$\ln\,\mu(\sigma_1)-\ln\,\mu(\sigma_2)\le(\sigma_1-\sigma_2)\nu(\sigma_1). \tag{11}$$

Нехай $\sigma_1<\sigma_2$. Тоді з (10) і (11) маємо

$$\nu(\sigma_1)\le\frac{\ln\,\mu(\sigma_2)-\ln\,\mu(\sigma_1)}{\sigma_2-\sigma_1}\le\nu(\sigma_2). \tag{12}$$

З (12) випливає, що функція $\nu(\sigma)$ неспадна, а отже, неперервна за винятком зліченної кількості точок. Тому, спрямовуючи у (12) $\sigma_1\to\sigma_2$ (а потім $\sigma_2\to\sigma_1$), у точці неперервності $\nu(\sigma)$ дістаємо рівність $(\ln\,\mu(\sigma))'=\nu(\sigma)$. Твердження 1 доведено. □

З твердження 1 легко випливає, що для всіх $-\infty<\sigma_0\le\sigma<\sigma_\mu$

$$\ln\,\mu(\sigma)=\ln\,\mu(\sigma_0)+\int\limits_{\sigma_0}^{\sigma}\nu(x)dx. \tag{13}$$

Використовуючи означення $\mu(\sigma)$ і нерівності (12), неважко довести, що якщо $\sigma_\mu=+\infty$, то $\ln\mu(\sigma)/\sigma\to+\infty$ і $\nu(\sigma)\nearrow+\infty$ при $\sigma\to+\infty$. Якщо ж $\sigma_\mu=0$ і $\varlimsup\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, то $\mu(\sigma)\nearrow+\infty$ і $\nu(\sigma)\nearrow+\infty$ $(\sigma\uparrow 0)$. З опуклості $\ln\mu(\sigma)$ також випливає, що $(\ln\mu(\sigma)-\ln\mu(0))/\sigma\nearrow+\infty$ $(\sigma\to+\infty)$ у випадку, коли $\sigma_\mu=+\infty$.

Твердження 2. *Якщо функція f напівнеперервна зверху, то $\mu(\sigma)=\max\{f(x)e^{x\sigma}:x\ge 0\}$ і $\nu(\sigma)=\max\{x:\,f(x)e^{x\sigma}=\mu(\sigma)\}$ для кожного $\sigma\in(-\infty,\,\sigma_\mu)$.*

Доведення. Справді, з напівнеперервності зверху функції f випливає напівнеперервність зверху функції $\ln f(x)$ і, отже, напівнеперервність зверху функції $\ln f(x)+\sigma x$ для кожного $\sigma\in(-\infty,\,\sigma_\mu)$. Оскільки $\ln f(x)+\sigma x\to-\infty\,(x\to+\infty)$ для кожного $\sigma\in(-\infty,\,\sigma_\mu)$, то звідси випливає (див., наприклад, [3], с. 21) існування $\max\{\ln f(x)+\sigma x:\,x\ge 0\}=\ln\,\mu(\sigma)$.

Нехай тепер $\ln f(x_k)+\sigma x_k=\ln\,\mu(\sigma)$ і $x_k\uparrow x^*$ $(k\to+\infty)$. Оскільки функція $\ln f$ напівнеперервна зверху, то $\ln f(x_k)\le\ln f(x^*)+\varepsilon$ для кожного $\varepsilon>0$ і всіх $k\ge k_0(\varepsilon)$. Тому

$$\ln\,\mu(\sigma)\ge\ln\,f(x^*)+\sigma x^*\ge\ln\,f(x_k)-\varepsilon+\sigma x_k+\sigma(x^*-x_k)>\ln\,f(x_k)+\sigma x_k-\varepsilon=\ln\,\mu(\sigma)-\varepsilon,$$

звідки з огляду на довільність ε випливає рівність $\ln\,\mu(\sigma)=\ln\,f(x^*)+\sigma x^*$ і, існування $\max\{x:\,f(x)e^{x\sigma}=\mu(\sigma)\}=\nu(\sigma)$. □

2. Оцінки інтегралу Лапласа-Стільтьєса зверху. За умови $\varlimsup\limits_{n\to\infty}(\ln\,n)/\lambda_n=\tau<+\infty$ для ряду Діріхле (2) з нескінченною абсцисою збіжності добре відомою (див., наприклад, [1], с. 184) є оцінка $I(\sigma)\le\mu(\sigma+\tau+\varepsilon)$ для кожного $\varepsilon>0$ і всіх $\sigma\ge\sigma_0(\varepsilon)$, де $\mu(\sigma)$ – максимальний член цього ряду. Узагальнення цього твердження можна знайти у статтях [8-11], а найзагальніший результат отримано в [12] (див. також [13]). Наступна теорема є повним аналогом цього результату.

Теорема 1. *Нехай функція q додатна та неперервна на $(-\infty, +\infty)$, зростаюча до σ_μ на $(-\infty, \sigma_\mu]$ і $q(\sigma) = q(\sigma_\mu)$ для $\sigma \geq \sigma_\mu$ у випадку $\sigma_\mu < +\infty$. Якщо*

$$\int\limits_0^{+\infty} f(x) \exp\left\{xq\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f(x)}\right)\right\} dF(x) \leq K_0 < +\infty, \tag{14}$$

то для всіх $\sigma \in (-\infty, \sigma_\mu)$ правильна нерівність

$$I(\sigma) \leq K_0\mu(q^{-1}(\sigma))^{p(\sigma)} + K_0, \tag{15}$$

де

$$p(\sigma) = \sup\left\{(\sigma - t)/(q^{-1}(\sigma) - q^{-1}(t)) : t < \sigma\right\}. \tag{16}$$

Доведення теоремі 1. Нехай $\sigma \in (-\infty, \sigma_\mu)$. Тоді $q^{-1}(\sigma) \in (-\infty, \sigma_\mu)$. Позначимо $r(x) = \frac{1}{x}\ln\frac{1}{f(x)}$, $E_1 = \{x > 0 : r(x) < q^{-1}(\sigma)\}$, $E_2 = \{x > 0 : q^{-1}(\sigma) \leq r(x) < \sigma_\mu\}$ і $E_3 = \{x > 0: r(x) \geq \sigma_\mu\}$. Тоді

$$I(\sigma) = \left(\int\limits_{E_1} + \int\limits_{E_2} + \int\limits_{E_3}\right) f(x)e^{x\sigma}dF(x). \tag{17}$$

Оскільки

$$\int\limits_{E_1} f(x)e^{x\sigma}dF(x) = \int\limits_{E_1} f(x)^{1-p(\sigma)}(f(x)e^{xq^{-1}(\sigma)})^{p(\sigma)}e^{x(\sigma-p(\sigma)q^{-1}(\sigma))}dF(x) \leq$$

$$\leq \mu(q^{-1}(\sigma))^{p(\sigma)}\int\limits_{E_1} f(x)\exp\{x(\sigma - p(\sigma)(q^{-1}(\sigma) - r(x)))\}dF(x) \leq$$

$$\leq \mu(q^{-1}(\sigma))^{p(\sigma)}\int\limits_{E_1} f(x)\exp\left\{x\left(\sigma - \frac{\sigma - qr(x)}{q^{-1}(\sigma) - q^{-1}(qr(x))}(q^{-1}(\sigma) - r(x))\right)\right\}dF(x) =$$

$$= \mu(q^{-1}(\sigma))^{p(\sigma)}\int\limits_{E_1} f(x)\exp\left\{xq\left(r(x)\right)\right\}dF(x),$$

$$\int\limits_{E_2} f(x)e^{x\sigma}dF(x) \leq \int\limits_{E_2} f(x)\exp\{xq(r(x))\}dF(x)$$

і

$$\int\limits_{E_3} f(x)e^{x\sigma}dF(x) \leq \int\limits_{E_3} f(x)\exp\{x\sigma_\mu\}dF(x) = \int\limits_{E_3} f(x)\exp\left\{xq(r(x))\right\}dF(x),$$

то з (17), з огляду на умову (14), легко отримуємо нерівність (15). Теорему 1 доведено. □

Оскільки теорема 1 може бути незручною для користування, то наведемо наступну теорему, яка є значно простішою і випливає з теореми 1.

Теорема 2. *Нехай $\gamma > 0$ — довільне число, а $\delta = (\gamma - 1)\sigma_\mu$ за умови $-\infty < \sigma_\mu < +\infty$ і $\delta \geq 0$ — довільне число, коли $\sigma_\mu = +\infty$. Якщо*

$$h(\gamma, \delta) := \varliminf_{x \to +\infty} \frac{(\gamma - 1)\ln f(x) + \delta x}{\ln F(x)} > 1, \tag{18}$$

то для всіх $\sigma < \sigma_\mu$ правильна нерівність

$$I(\sigma) \leq K\mu \left(\frac{\sigma + \delta}{\gamma}\right)^\gamma + K, \tag{19}$$

де K — додатна стала, яка не залежить від σ.

Доведення. Легко побачити, що функція $q(x) = \gamma x - \delta$, $-\infty < \sigma \leq \sigma_\mu$, задовольняє умови теореми 1, а умова (14) у цьому випадку набуває вигляду

$$\int\limits_0^{+\infty} \exp\{-(\gamma - 1)\ln f(x) + \delta x\} dF(x) \leq K_0 < +\infty. \tag{20}$$

Оскільки $h(\gamma, \delta) > 1$, то для $1 < h < h(\gamma, \delta)$ і всіх досить великих x маємо

$$\exp\{-(\gamma - 1)\ln f(x) + \delta x\} = \exp\left\{-\frac{(\gamma - 1)\ln f(x) + \delta x}{\ln F(x)} \ln F(x)\right\} \leq$$
$$\leq \exp\{-h \ln F(x)\}.$$

Тому

$$\int\limits_{x_0}^{+\infty} \exp\{-(\gamma - 1)\ln f(x) + \delta x\} dF(x) \leq \int\limits_{x_0}^{+\infty} \frac{dF(x)}{F(x)^h} < +\infty.$$

Справді, нехай $\alpha = (h + 1)/(2(h - 1))$ і $x_k = \min\{x \geq x_0 : F(x) \geq k^\alpha\}$, $k \geq 1$. Тоді $A_k = \{x : k^\alpha \leq F(x) < (k + 1)^\alpha\} \subset [x_k, x_{k+1})$. Оскільки $F(x_{k+1} - 0) < (k + 1)^\alpha$, то

$$\int\limits_{x_1}^{+\infty} \frac{dF(x)}{(F(x))^h} = \sum_{k=1}^{+\infty} \int\limits_{A_k} \frac{dF(x)}{(F(x))^h} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{F(x_{k+1} - 0)}{k^{\alpha h}} \leq 2^\alpha \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{(h+1)/2}} < +\infty.$$

Отже, умова (20) виконується і за теоремою 1 для $\sigma < \sigma_\mu$ правильна нерівність (15). Але $q(x) = \gamma x - \delta$, $q^{-1}(\sigma) = (\sigma + \delta)/\gamma$, $p(\sigma) = \gamma$. Тому з (15) отримуємо (19). □

Вибираючи належним чином γ і δ, з теореми 2 можна отримати наступні три наслідки.

Наслідок 1. *Якщо $\sigma_\mu = +\infty$ і $\varlimsup\limits_{x \to +\infty} (\ln F(x))/x = \overline{\tau} < +\infty$, то для кожного $\varepsilon > 0$ і всіх $\sigma \geq \sigma_0(\varepsilon)$ правильна нерівність $I(\sigma) \leq \mu(\sigma + \overline{\tau} + \varepsilon)$.*

Наслідок 2. *Якщо $\sigma_\mu = +\infty$ і $\varlimsup\limits_{x \to +\infty} (\ln F(x))/\ln(1/f(x)) = h < 1$, то для кожного $\varepsilon \in (0, 1 - h)$ і всіх $\sigma \geq \sigma_0(\varepsilon)$ правильна нерівність $I(\sigma) \leq K(\varepsilon)(\mu(\sigma/(1 - h - \varepsilon)))^{1-h-\varepsilon}$.*

Наслідок 3. *Якщо* $\sigma_\mu = 0$ *і* $\varlimsup\limits_{x\to+\infty} (\ln F(x))/\ln f(x) = h < +\infty$, *то для кожного* $\varepsilon > 0$ *і всіх* $\sigma \in [\sigma_0(\varepsilon), 0)$ *правильна нерівність* $I(\sigma) \le K(\varepsilon)(\mu(\sigma/(1+h+\varepsilon)))^{1+h+\varepsilon}$.

Зауважимо, що отримані у наслідках 2–4 оцінки, у загальному, покращити не можна. Це випливає з відповідних тверджень, відомих у випадку абсолютно збіжних рядів Діріхле.

За умовою теореми 2, $\delta = 0$, якщо $\sigma_\mu = 0$. Тому у цьому випадку з теореми 2 не вдається отримати аналог наслідку 2. Проте результат такого вигляду можна одержати, міркуючи дещо інакше (див., наприклад, [12], [14]).

Теорема 3. *Якщо* $\sigma_\mu = 0$ *і* $\varlimsup\limits_{x\to+\infty} (\ln F(x))/(x\gamma(x)) = h_0 < +\infty$, *де* γ *— додатна неперервна спадна до 0 на* $[0, +\infty)$ *функція така, що* $x\gamma(x) \uparrow +\infty$, $x \to +\infty$, *то для кожного* $\varepsilon > 0$ *існує стала* $K(\varepsilon) > 0$ *така, що для всіх* $\sigma < 0$ *правильна нерівність*

$$I(\sigma) \le \mu\left(\frac{\sigma}{1+\varepsilon}, I\right) \exp\left\{\frac{\varepsilon|\sigma|}{1+\varepsilon}\gamma^{-1}\left(\frac{\varepsilon|\sigma|}{(1+\varepsilon)^2(h_0+\varepsilon^2)}\right)\right\}.$$

3. Аналоги нерівності Локгарта-Страуса. Для цілої трансцендентної функції $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ нехай $M_g(r) = \max\{|g(z)| : |z| = r\}$ і $\mu_g(r) = \max\{|a_n|r^n : n \ge 0\}$ — максимальний член. П. Локгарт і Е.Страус [15] довели, що

$$M_g(r) \le \frac{4r+\varepsilon}{\varepsilon}\mu_g(r)\left(1 + \ln\frac{\mu_g(r+\varepsilon)}{\mu_g(r)}\right), \quad r > \varepsilon > 0.$$

Аналоги цієї нерівності для рядів Діріхле отримано в [12] (див. також [16]). Тут ми отримаємо подібні оцінки для інтегралів Лапласа-Стільтьєса.

Теорема 4. *Нехай* $\sigma_\mu = A \in (-\infty, +\infty]$, $\sigma < A$ *і* $0 < \varepsilon < A - \sigma$. *Якщо функція* f *напівнеперервна зверху, а* $\ln F(x) = o(x)$ $(x \to +\infty)$, *то*

$$I(\sigma) \le \mu(\sigma)\left(F\left(\frac{4}{\varepsilon}\ln\frac{\mu(\sigma+\varepsilon)}{\mu(\sigma+\varepsilon/2)}\right) + \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{2\nu(\sigma+\varepsilon/2)}^{+\infty} F(x)\exp\left\{-\frac{\varepsilon x}{2}\right\}dx\right). \tag{21}$$

Доведення. Оскільки функція f напівнеперервна зверху, то за твердженням 6 $\mu(\sigma) = f(\nu(\sigma))\exp\{\sigma\nu(\sigma)\}$ для всіх $\sigma < A$. Тому для $x \ge 2\nu(\sigma+\varepsilon/2)$ маємо

$$f(x)\exp\{\sigma x\} = f(x)\exp\{x(\sigma+\varepsilon/2)\}\exp\{-x\varepsilon/2\} \le \mu(\sigma+\varepsilon/2)\exp\{-x\varepsilon/2\} =$$
$$= f(\nu(\sigma+\varepsilon/2))\exp\{\sigma\nu(\sigma+\varepsilon/2)\}\exp\{-(\varepsilon/2)(x-\nu(\sigma+\varepsilon/2))\} \le \mu(\sigma)\exp\{-x\varepsilon/4\}$$

і

$$I(\sigma) \le \mu(\sigma)\int\limits_0^{2\nu(\sigma+\varepsilon/2)} dF(x) + \mu(\sigma)\int\limits_{2\nu(\sigma+\varepsilon/2)}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{x\varepsilon}{4}\right\}dF(x) \le$$
$$\le \mu(\sigma)\left(F(2\nu(\sigma+\varepsilon/2)) + \frac{\varepsilon}{4}\int\limits_{2\nu(\sigma+\varepsilon/2)}^{+\infty} F(x)\exp\left\{-\frac{x\varepsilon}{4}\right\}dx\right). \tag{22}$$

Але з огляду на (12) $\ln\mu(\sigma+\varepsilon)/\mu(\sigma+\varepsilon/2) \ge \nu(\sigma+\varepsilon/2)\varepsilon/2$, і тому з (22) отримуємо (21). Теорему 4 доведено. □

З теореми 4 неважко отримати наступні твердження.

Наслідок 4. *Якщо $\sigma_\mu = +\infty$, функція f напівнеперервна зверху і $\ln F(x) = o(x)$ $(x \to +\infty)$, то*

$$I(\sigma) \le \mu(\sigma)\left(F\left(\frac{4}{\varepsilon}\ln\frac{\mu(\sigma+\varepsilon)}{\mu(\sigma+\varepsilon/2)}\right) + o(1)\right), \quad \sigma \to +\infty.$$

Наслідок 5. *Якщо $\sigma_\mu = +\infty$, функція f напівнеперервна зверху і $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}} \frac{\ln F(x)}{x\gamma(x)} = h_0 < +\infty$, де γ — додатна неперервна спадна до 0 на $[0, +\infty)$ функція така, що $x\gamma(x) \uparrow +\infty$, $x \to +\infty$, то для кожного $\varepsilon \in (0, 4)$ і всіх $\sigma \ge \sigma_0(\varepsilon)$*

$$\ln I(\sigma) \le \ln \mu(\sigma) + \frac{4(\tau_0+\varepsilon)}{\varepsilon}\ln\frac{\mu(\sigma+\varepsilon)}{\mu(\sigma+\varepsilon/2)}\gamma\left(\ln\frac{\mu(\sigma+\varepsilon)}{\mu(\sigma+\varepsilon/2)}\right).$$

Наслідок 6. *Якщо $\sigma_\mu = 0$, функція f напівнеперервна зверху і $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}} \frac{\ln F(x)}{x\gamma(x)} = h_0 < +\infty$, то для кожного $\varepsilon > 0$ і всіх $\sigma \in [\sigma_0(\varepsilon), 0)$*

$$\ln I(\sigma) \le \ln \mu(\sigma) + \frac{8(h_0+\varepsilon)}{|\sigma|}\ln\frac{\mu(\sigma/2)}{\mu(3\sigma/4)}\gamma\left(\frac{8}{|\sigma|}\ln\frac{\mu(\sigma/2)}{\mu(3\sigma/4)}\right) + \frac{|\sigma|}{4}\gamma^{-1}\left(\frac{3|\sigma|}{16(h_0+\varepsilon)}\right).$$

4. Оцінки інтегралу Лапласа-Стільтьєса знизу. Оскільки для ряду Діріхле (2) $a_n e^{\sigma\lambda_n} \le I(\sigma)$ для всіх n і $\sigma < \sigma_\mu$, то у цьому випадку $\mu(\sigma) \le I(\sigma)$ для всіх $\sigma < \sigma_\mu$. Для інтегралу (1) у загальному така нерівність не є правильною. Справді, якщо візьмемо $f(x) = 0$ для $x \ne n$ і $f(x) = b_n > 0$ для $x = n$, то $I(\sigma) = \int_0^\infty f(x)e^{x\sigma}dx = 0$, а $\mu(\sigma) = \sup\{f(x)e^{x\sigma} : x \ge 0\} = \sup\{b_n e^{\sigma\lambda_n} : x \ge 0\} > 0$ і, отже, жодної змістовної оцінки $I(\sigma)$ знизу через $\mu(\sigma)$ подати не можна.

Зрозуміло, що за певних умов на f та F оцінити $I(\sigma)$ знизу через $\mu(\sigma)$ можна.

Теорема 5. *Нехай або $\sigma_\mu = +\infty$, або $\sigma_\mu = 0$ і $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}} f(x) = +\infty$. Якщо існують сталі $a \ge 0$, $b \ge 0$ і $h > 0$ такі, що $\int_{x-a}^{x+b} f(t)dF(t) \ge hf(x)$ для всіх $x \ge a$,то $\ln \mu(\sigma, I) \le (1 + o(1)) \ln I(\sigma)$ $(\sigma \uparrow \sigma_\mu)$.*

Доведення. Нехай $\sigma_\mu = +\infty$. Тоді для $\sigma \ge 0$ маємо

$$I(\sigma) \ge \int\limits_{x-a}^{x+b} f(t)e^{\sigma t}dF(t) \ge e^{x\sigma - a\sigma}\int\limits_{x-a}^{x+b} f(t)dF(t) \ge he^{-a\sigma}f(x)e^{x\sigma},$$

тобто $f(x)e^{x\sigma} \le e^{-a\sigma}I(\sigma)/h$ $(x \ge a)$, звідки випливає нерівність $\mu(\sigma) \le e^{-a\sigma}I(\sigma)/h + K_1$, $K_1 = \mathrm{const} > 0$. Оскільки $\sigma/\ln \mu(\sigma) \to 0$ $(\sigma \to +\infty)$, то звідси отримуємо потрібне співвідношення.

Якщо ж $\sigma_\mu = 0$, то для $\sigma < 0$ подібно маємо $I(\sigma) \ge he^{-b|\sigma|}f(x)e^{x\sigma}$ і

$$\mu(\sigma) \le e^{-b|\sigma|}I(\sigma)/h = (1 + o(1))I(\sigma)/h, \quad \sigma \to -0.$$

Але $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}} f(x) = +\infty$, тобто $\ln \mu(\sigma) \to +\infty$ $(\sigma \to -0)$. Тому звідси знову отримуємо потрібне співвідношення. Теорему 5 доведено. □

Зауважимо, що ряд Діріхле (2) можна записати у вигляді інтегралу (1) (у лебеговому сенсі) з $f(x) = a_n$ для $x = \lambda_n$ і $f(x) = 0$ для $x \ne \lambda_n$ та $F(x) = n(x)$, де $n(x)$ — лічильна функція послідовності (λ_n). Тоді виконання умови $\int_{x-a}^{x+b} f(t)dF(t) \ge hf(x)$ є очевидним.

Автори висловлюють щиру подяку Я.В. Микитюку та П.В. Філевичу за цінні зауваження.

ЛІТЕРАТУРА

1. Леонтьев А.Ф. Ряды экспонент. – Москва: Наука, 1976. – 536 с.
2. Шеремета М.М. Цілі ряди Діріхле. – Київ: ІСДО, 1993. – 168 с.
3. Kiselman Ch.O. *Order and type as measures of growth for convex and entire functions* // Proc. London Math. Soc. (3). – 1993. – V. 66. – P. 152–186.
4. Скаскив О.Б. *О некоторых соотношениях между максимумом модуля и максимальным членом целого ряда Дирихле* // Мат. заметки. – 1999. – Т. 66, №2. – С. 282–292.
5. Микитюк Я.В., Сумык О.М., Шеремета М.М. *О функциях двойственных по Юнгу и поведении максимальных членов производных ряда Дирихле* // Мат. заметки. – 2001. – Т. 69, №1. – С. 74–81.
6. Скасків О.Б., Тракало О.Б. *Асимптотичні оцінки інтегралів Лапласа* // Мат. студії. – 2002. – Т. 18, №2. – С. 125–147.
7. Хейман У., Кеннеди П. Субгармонические функции. – Москва: Мир, 1980. – 304 с.
8. Пьяныло Я.Д., Шеремета М.Н. *О росте целых функций, представленных рядами Дирихле* // Изв. вузов. Матем. – 1975. – №10. – С. 91–93.
9. Винницький Б.В., Шеремета М.М. *Про коефіцієнти ряду Діріхле, що задає цілу функцію* // Укр. мат. журн. – 1977. – Т. 29, №2. – С. 232–237.
10. Галь Ю.М., Шеремета М.Н. *О росте аналитических в полуплоскости функций, заданных рядами Дирихле* // ДАН УССР. Сер. А. – 1978. – №12. – С. 1065–1068.
11. Винницкий Б.В. *О росте целых функций, заданных рядами* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f(\lambda_n z)$ // Укр. мат. журн. – 1979. – Т. 31, №5. – С. 534–540.
12. Шеремета М.М., Притула Я.Я., Фединяк С.І. Зростання рядів Діріхле. – Львів. – 1995. – 30 с. – Препринт №18–95. – Наук.-учб. центр матем. моделювання ІППММ ім. Я.С.Підстригача НАН України.
13. Мулява О.М., Притула Я.Я. *Оцінки максимуму модуля цілого ряду Діріхле* // Вісник Львів. у-ту, сер. мех.-мат. – 1998. – Вип. 49. – С. 65–70.
14. Мулява О.М. *Про класи збіжності рядів Діріхле* // Укр. мат. журн. – 1999. – Т. 51, №11. – С. 1485–1494.
15. Lockhart P., Straus E.G. *Relations between the maximum modulus and maximal term of entire functions* // Pacific. J. Math. – 1985. – V. 118, №2. – P. 479–485.
16. Шеремета М.Н., Федыняк С.И. *О производной ряда Дирихле* // Сиб. мат. журн. – 1998. – Т. 39, №1. – С. 206–223.

Львівський національний університет імені Івана Франка
tftj@franko.lviv.ua

Надійшло 6.07.2003