УДК 512.53

В. О. Пєхтєрєв

$\mathcal{R}$-ЗРІЗИ НАПІВГРУПИ $\mathcal{T}_X$

V. O. Pyekhtyeryev. *$\mathcal{R}$-cross-sections of the semigroup $\mathcal{T}_X$*, Matematychni Studii, **21** (2004) 133–139.

We classify cross-sections of the $\mathcal{R}$ Green relation on the full semigroup $\mathcal{T}_X$ and determine which of them are isomorphic.

В. А. Пехтерев. *$\mathcal{R}$-сечения полугруппы $\mathcal{T}_X$* // Математичні Студії. – 2004. – Т.21, №2. – С.133–139.

Мы описываем все сечения $\mathcal{R}$ отношения Грина на полугруппе $\mathcal{T}_X$, а также приводим критерий изоморфизма двух разных $\mathcal{R}$ сечений.

1. Вступ. Нехай ρ — відношення еквівалентності на напівгрупі S. Піднапівгрупа $T \subset S$ називається *зрізом* відношення ρ, якщо T містить точно по одному елементу із кожного класу еквівалентності. Найбільш цікавими для вивчення є зрізи тих відношень еквівалентності, які тісно повязані із будовою напівгрупи S. Для напівгруп такими відношеннями є, зокрема, конгруєнції та відношення Гріна.

Кажуть, що два елементи a і b напівгрупи S перебувають у відношенні $\mathcal{L}$ (відповідно $\mathcal{R}$, $\mathcal{J}$) коли $S^1a = S^1b$ (відповідно $aS^1 = bS^1$, $S^1aS^1 = S^1bS^1$), а інші два відношення Гріна визначаються наступним способом: $\mathcal{H} = \mathcal{L} \wedge \mathcal{R}$, $\mathcal{D} = \mathcal{L} \vee \mathcal{R}$.

Зрізи відношень Гріна $\mathcal{H}$ $(\mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{D}, \mathcal{J})$ часто називають просто $\mathcal{H}$- ($\mathcal{L}$-, $\mathcal{R}$-, $\mathcal{D}$-, $\mathcal{J}$-) *зрізами.*

Зрізи відношень Гріна для конкретних напівгруп почали вивчатись порівняно недавно. Перший приклад $\mathcal{H}$-зрізу для скінченої симетричної інверсної напівгрупи IS_n побудований у статті [1]. А дещо пізніше в [2] отриманий повний опис усіх $\mathcal{H}$-зрізів для напівгрупи IS_n, $n \neq 3$. Далі, у статті [3] описано усі $\mathcal{L}$- та $\mathcal{R}$-зрізи напівгрупи IS_n та їх звязок із $\mathcal{H}$-зрізами цієї напівгрупи. Потім в [5] отриманий повний опис усіх $\mathcal{H}$- та $\mathcal{R}$-зрізів напівгрупи T_n.

У цій статті описуються всі $\mathcal{R}$-зрізи повної напівгрупи $\mathcal{T}_X$, без обмежень на потужність множини X.

2. Теоретичні відомості. Для кожного $a \in \mathcal{T}_X$ символами $\mathrm{im}(a)$ та ρ_a будемо позначати відповідно образ елемента a та відношення еквівалентності на множині X, яке визначається правилом $i\rho_a j \Leftrightarrow a(i) = a(j)$. Кардинальне число $\mathrm{rk}(a) = |\,\mathrm{im}(a)|$ називається рангом перетворення a. Через e позначимо тотожне перетворення множини X — одиницю напівгрупи $\mathcal{T}_X$.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 20M20, 20M10.

Добре відомо (див. [4]), що відношення Гріна на напівгрупі $\mathcal{T}_X$ описуються наступним способом:

$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow \rho_a = \rho_b$;

$a\mathcal{L}b \Leftrightarrow \mathrm{im}(a) = \mathrm{im}(b)$;

$a\mathcal{H}b \Leftrightarrow \rho_a = \rho_b$ та $\mathrm{im}(a) = \mathrm{im}(b)$;

$a\mathcal{D}b \Leftrightarrow \mathrm{rk}(a) = \mathrm{rk}(b)$.

Зокрема, $\mathcal{D}$-класи Гріна мають вигдяд $D_k = \{\ a \in \mathcal{T}_X \mid \mathrm{rk}(a) = k\}$, де k — кардинальне число $\leq |X|$.

Якщо на множині X задано досконалий порядок, то символом $\xi(X)$ будемо позначати тип цієї впорядкованої множини. Нехай $W(\alpha)$ — це множина всіх порядкових чисел, менших від даного порядкового числа α. Тоді якщо $\xi(X) = \alpha$, то існує єдине відображення подібності $f\colon X \to W(\alpha)$. Позначимо $x_\beta := f^{-1}(\beta)$ для кожного $\beta \in W(\alpha)$, тоді $X = \bigcup_{\beta<\alpha}\{x_\beta\}$, причому $x_\beta < x_\gamma \Leftrightarrow \beta < \gamma$. Надалі для кожного $\eta \leq \alpha$ символом $X(\eta)$ позначатимемо множину $\{x_\beta \in X | \beta < \eta\}$.

3. Будова $\mathcal{R}$-зрізів. Оскільки для будь-яких $a, b \in \mathcal{T}_X$ умова $a\mathcal{R}b$ еквівалентна до умови $\rho_a = \rho_b$, то рівності $a = b$ та $\rho_a = \rho_b$ є еквівалентними для будь-якого $\mathcal{R}$-зрізу T напівгрупи $\mathcal{T}_X$. Надалі ми будемо часто використовувати цей простий факт.

З будови відношення $\mathcal{R}$ на напівгрупі $\mathcal{T}_X$ випливає, що кожний $\mathcal{R}$-клас напівгрупи $\mathcal{T}_X$ однозначно визначається заданням деякого диз'юнктного розбиття $X = \dot{\bigcup}_{i\in I} A_i$ множини X на $|I|$ блоків, для деякого кардинального числа $|I| \leq |X|$. Надалі $\mathcal{R}$-клас, що визначається даним розбиттям, будемо позначати $R(\dot{\bigcup}_{i\in I} A_i)$.

Зафіксуємо довільний досконалий порядок $\leq$ на множині X і нехай $\xi(X) = \alpha$.

Для кожного диз'юнктного розбиття множини X блоки розбиття будемо індексувати найменшими елементами цих блоків. Оскільки в такому випадку множина індексів I є підмножиною X, то можна визначити індукований лінійний порядок на блоках розбиття $X = \dot{\bigcup}_{i\in I} A_i$ за правилом $A_i \prec A_j \Leftrightarrow i < j$.

Для кожного $\mathcal{R}$-класу $R(\dot{\bigcup}_{i\in I} A_i)$ через ϕ позначимо ізоморфізм частково впорядкованих множин I та $X(\xi(I))$. Далі виберемо із цього $\mathcal{R}$-класу елемент π такий, що $\pi(A_i) = \phi(i)$ для всіх $i \in I$. Тепер символом $R(X, \leq)$ позначатимемо множину усіх таких елементів.

Лема 3.1. *Для будь-якого досконалого порядку $\leq$ на множині X множина елементів $R(X, \leq)$ замкнена відносно множення.*

Доведення. Візьмемо довільні два елементи $a, b \in R(X, \leq)$, і розглянемо два $\mathcal{R}$-класи $R(\dot{\bigcup}_{i\in I} A_i)$, $R(\dot{\bigcup}_{j\in J} B_j)$, що містять відповідно a і b. Через K позначимо множину $\{j \in J | B_j \cap \mathrm{im}(a) = \varnothing\}$. Якщо $K = \varnothing$, то $\mathrm{im}(ab) = \mathrm{im}(b) = X(\xi(J))$. Якщо $K \neq \varnothing$, то через p позначимо найменший елемент цієї множини. Тоді $\mathrm{im}(ab) = X(\beta)$, де $\beta = \xi(\{j \in J | j < p\})$. Далі для кожного елемента множини $\mathrm{im}(ab)$ символом C_x позначимо множину $(ab)^{-1}(x)$. Тепер для остаточного доведення леми залишилось встановити, що $C_x \prec C_y$ для довільної пари елементів $x < y$. А це очевидно випливає із рівності $\min(C_x) = \min(A_{\min(B_x)})$, де $\min(Q)$ позначає найменший елемент множини $(Q, \leq)$, та ланцюга імплікацій $x < y \Rightarrow B_x \prec B_y \Rightarrow \min(B_x) < \min(B_y) \Rightarrow A_{\min(B_x)} \prec A_{\min(B_y)} \Rightarrow \min(A_{\min(B_x)}) < \min(A_{\min(B_y)}) \Rightarrow \min(C_x) < \min(C_y) \Rightarrow C_x \prec C_y$. $\square$

Теорема 1. *а) Для будь-якого досконалого порядку $\leq$ на множині X множина елементів $R(X, \leq)$ є $\mathcal{R}$-зрізом напівгрупи $\mathcal{T}_X$.*

б) Різним досконалим порядкам на множині X відповідають різні зрізи.

Доведення. а) За лемою 3.1 ця множина замкнена відносно множення, а тому є піднапівгрупою. Але із побудови $R(X, \leq)$ випливає, що із кожного $\mathcal{R}$-класу вона містить точно по 1 елементу, а тому є $\mathcal{R}$-зрізом напівгрупи IS_X.

б) Очевидно. □

Теорема 2. *Кожен $\mathcal{R}$-зріз напівгрупи $\mathcal{T}_X$ має вигляд $R(X, \leq)$ для деякого досконалого порядку $\leq$ на множині X.*

Доведення. Нехай T є $\mathcal{R}$-зрізом напівгрупи $\mathcal{T}_X$. Для сталих із $\mathcal{T}_X$ відповідне розбиття множини X має єдиний блок X, тому константи утворюють $\mathcal{R}$-клас $R(X)$. Позначимо через x_0 ту константу з $R(X)$, яка належить до зрізу T.

Лема 3.2. *Для кожного елемента $a \in T \cap R(\dot{\bigcup}_{i\in I} A_i)$ $a(A_i) = x_0 \Leftrightarrow x_0 \in A_i$.*

Доведення. Оскільки стала x_0 як елемент рангу 1 є нулем зрізу T, то маємо рівність $x_0 \cdot a = x_0$, з якої і випливає твердження леми. □

Лема 3.3. *Для довільного натурального числа k та довільних елементів a, b із множини $D_k \cap T$ правильна рівність* $\mathrm{im}(a) = \mathrm{im}(b)$.

Доведення. Припустимо, що це не так. Тоді існують такі число k та елементи a, b із множини $D_k \cap T$, для яких $\mathrm{im}(a) \neq \mathrm{im}(b)$. Позначимо $C = \mathrm{im}(a) \cap \mathrm{im}(b)$, $A = \mathrm{im}(a) \backslash C$, $B = \mathrm{im}(b) \backslash C$, $p = |A|$. Далі розіб'ємо множину $A \cup B$ на пари $\{a_1, b_1\}, \{a_2, b_2\}, \ldots, \{a_p, b_p\}$, де $a_i \in A$, $b_i \in B$ для кожного $i \in \{1, \ldots, p\}$. Це завжди можна зробити, оскільки $|A| = |B| = p$ і $A \cap B = \varnothing$. Нехай $C = \{c_1, \ldots, c_{k-p}\}$. Розглянемо розбиття

$$\dot{\bigcup}_{i=1}^{p} \{a_i, b_i\} \dot{\bigcup}_{i=1}^{k-p-1} \{c_i\} \dot{\cup} (\{c_{k-p}\} \cup (X \backslash (A \cup B \cup C)))$$

множини X і позначимо через c той елемент зрізу T, який належить до $\mathcal{R}-$класу, що визначається даним розбиттям. Тоді маємо рівність $\mathrm{im}(ac) = \mathrm{im}(c)$ та ланцюг імплікацій $\rho_{ac} = \rho_a \Rightarrow ac = a \Rightarrow \mathrm{im}(ac) = \mathrm{im}(a) \Rightarrow \mathrm{im}(a) = \mathrm{im}(c)$. Міркуючи подібно, можна встановити, що $\mathrm{im}(b) = \mathrm{im}(c)$. А це суперечить припущенню, що $\mathrm{im}(a) \neq \mathrm{im}(b)$, і, отже, доводить лему. □

Розглянемо множину $P := \{\mathrm{im}(a) | a \in T\}$.

Лема 3.4. *Для кожної пари множин $A, B \in P$ або $A \subseteq B$ або $B \subseteq A$.*

Доведення. Припустимо що це не так. Тоді існує пара A, B елементів множини P для якої $B \backslash A \neq \varnothing$ та $A \backslash B \neq \varnothing$. Нехай $y \in B \backslash A, z \in A \backslash B$, $a \in T$ такий, що $\mathrm{im}(a) = A$ та $b \in T$ такий, що $\mathrm{im}(b) = B$. Візьмемо $c \in T \cap R(\{y\} \dot{\cup} \{z\} \dot{\cup} X \backslash \{y, z\})$. Тоді $c(y) \neq c(z)$ і $\mathrm{im}(ac) = \{c(z), c(X \backslash \{y, z\})\}$ та $\mathrm{im}(bc) = \{c(y), c(X \backslash \{y, z\})\}$. А це суперечність з твердженням леми 3.3. □

Для натурального числа k позначимо через M_k образ довільного елементу із $D_k \cap T$(коректність позначення випливає із леми 3.3). За лемою 3.4 для кожного k маємо включення $M_k \subset M_{k+1}$, а тому $|M_{k+1} \backslash M_k| = 1$. Позначимо через x_k єдиний елемент множини $M_{k+1} \backslash M_k$. Тоді $M_k = \{x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}\}$.

Побудуємо тепер бінарне відношення $<$. Для цього приймемо, що $x_0 < x$ для кожного $x \in X \backslash \{x_0\}$. Далі для довільних елементів $x \neq y$ із $X \backslash \{x_0\}$ нехай $a_{x,y}$ — єдиний елемент з $T \cap R(\{x\} \dot\cup \{y\} \dot\cup X \backslash \{x, y\})$. Очевидно, що $a_{x,y} = a_{y,x}$ та $\mathrm{im}(a_{x,y}) = \{x_0, x_1, x_2\}$, причому, за лемою 3.2, $x_0 = a_{x,y}(X \backslash \{y, z\})$. Приймемо, що

$$\begin{array}{ll} x < y, & \text{якщо } a_{x,y}(x) = x_1, a_{x,y}(y) = x_2 \\ y < x, & \text{якщо } a_{x,y}(y) = x_1, a_{x,y}(x) = x_2. \end{array}$$

Лема 3.5. *Для кожного елемента $a \in T$ та довільних одноелементних класів еквівалентності $\{x\}, \{y\}$ відношення ρ_a, з того, що $x < y$, випливає, що $a(x) < a(y)$.*

Доведення. Позначимо $x' = a(x), y' = a(y)$ і розглянемо елемент $b = a_{x',y'}$. Тоді $\rho_{ab} = \rho_{a_{x,y}}$, звідси $ab = a_{x,y}$ а це означає що $(ab)(x) = a_{x,y}(x)$, тобто $b(x') = b(a(x)) = a_{x,y}(x) = x_1$, бо $x < y$. А тепер за означенням відношення $<$ остаточно отримуємо, що $x' < y'$, тобто що $a(x) < a(y)$. □

Лема 3.6. *Відношення $<$ є строгим лінійним порядком.*

Доведення. Із означення відношення $<$ випливає, що для довільних різних $x, y \in X$ виконується точно одна з нерівностей $x < y$ та $y < x$. Тому треба довести лише транзитивність. Спочатку зауважимо, що для довільних натуральних чисел k і l з нерівності $k < l$ випливає $x_k < x_l$. Для цього досить розглянути добуток ba_{x_k,x_l}, де b довільний елемент із множини $T \cap D_{k+1}$. Розглянемо тепер довільні три такі елементи $x, y, z \in X \backslash \{x_0\}$, що $x < y, y < z$. Нехай $T \cap R(\{z\} \dot\cup \{x\} \dot\cup \{y\} \dot\cup (X \backslash \{x, y, z\})) = \{c\}$. Тоді $\{c(x), c(y), c(z), c(X \backslash \{x, y, z\})\} = \mathrm{im}(c) = M_4 = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$. За лемою 3.2 $x_0 = c(X \backslash \{x, y, z\})$, а за лемою 3.5 $c(x) < c(y)$ і $c(y) < c(z)$. Звідси отримуємо, що $c(x) = x_1, c(y) = x_2, c(z) = x_3$. Тепер із леми 3.5 та того, що $x_1 < x_3$, остаточно отримуємо, що $x < z$. □

Лема 3.7. *Елемент x_1 є найменшим елементом множини $X \backslash \{x_0\}$, тобто для кожного $x \in X \backslash \{x_0, x_1\}$ виконується нерівність $x_1 < x$.*

Доведення. Для доведення достатньо розглянути добуток $ba_{x_1,x}$, де b довільний елемент із множини $T \cap D_2$. □

Лема 3.8. *Відношення $<$ є досконалим порядком, тобто кожна непорожня підмножина $Y \subseteq X$ має найменший елемент.*

Доведення. Якщо $x_0 \in Y$, то з означення відношення $<$ випливає, що x_0 — найменший елемент даної множини. Нехай тепер $x_0 \notin Y$ і a — єдиний елемент із $T \cap R(\dot\bigcup_{y \in Y} \{y\} \dot\cup (X \backslash Y))$. За лемою 3.2 $x_0 = c(X \backslash Y)$, а за лемою 3.4 $x_1 \in \mathrm{im}(a)$. Нехай $a^{-1}(x_1) = \{y\}$. Тоді з лем 3.5 і 3.7 випливає, що y є найменшим елементом множини Y. □

Позначимо через α тип множини $(X, <)$.

Лема 3.9. *Для кожної пари множин $A, B \in P$ з рівності $\xi(A) = \xi(B)$ випливає рівність $A = B$.*

Доведення. Нехай $\xi(A) = \xi(B)$. За лемою 3.4 або $A \subseteq B$ або $B \subseteq A$. Без порушення загальності можна вважати, що $A \subseteq B$. Виберемо такий елемент a із T, що $\mathrm{im}(a) = A$. Припустимо, що $A \neq B$, і нехай $z \in B \backslash A$. З леми 3.4 випливає, що $x_0 \in A$, тому $z \neq x_0$. Позначимо через g ізоморфізм між частково впорядкованими множинами B і A. Тоді $g(x_0) = x_0$. Оскільки g — бієкція, то всі елементи послідовності $\{g^{(n)}(z) | n \geq 0\}$ є різними і множина $C = \{g^{(n)}(z) | n \geq 0\}$ є зліченною, більше того, $x_0 \notin C$. Розглянемо елементи $z, g(z)$. Якщо $g(z) < z$, то $g^{(n+1)}(z) < g^{(n)}(z)$ для кожного $n \geq 0$, а це суперечить тому, що множина C має найменший елемент. Отже, $z < g(z)$ і z є найменшим елементом множини C. Візьмемо $b \in T \cap R\big(\dot{\bigcup}_{c \in C}\{c\} \dot{\cup} (X \backslash C)\big)$. Тоді, з одного боку, $b(z) = x_1$, бо за лемою 3.2 $x_0 = b(X \backslash C)$, а з іншого боку, з того, що $ab \in T$, випливає, що існує таке число $k \geq 1$, що $b(g^{(k)}(z)) = x_1 = b(z)$. Оскільки це суперечить ін'єктивності перетворення b на множині C, то припущення, що $B \backslash A \neq \varnothing$, є хибним, що й доводить лему. □

Лема 3.10. *Для кожного порядкового числа $0 < \beta \leq \alpha$ перетворення*

$$t_\beta = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in X(\beta) \\ x_0, & \text{якщо } x \notin X(\beta) \end{cases}$$

належить до зрізу T.

Доведення. Скористаємось трансфінітною індукцією. База індукції випливає з того, що стала x_0 належить до T. Тепер припустимо, що твердження справедливе для усіх порядкових чисел, менших за β, і покажемо, що воно буде справедливим і для числа β. Нехай a — єдиний елемент множини $T \cap R\Big(\dot{\bigcup}_{x \in X(\beta) \backslash \{x_0\}}\{x\} \dot{\cup} \big(X \backslash X(\beta)\big)\Big)$. Можливі два випадки.

1) β не є граничним числом. Тоді множина $X(\beta)$ має найбільший елемент $x_{\beta'}$, такий, що $\beta = \beta' + 1$. За припущенням індукції маємо, що $t_{\beta'} \in T$. Тоді для елемента $b = t_{\beta'} \cdot a$, отримуємо $\rho_b = \rho_{t_{\beta'}}$ та $b = t_{\beta'}$, а це означає, що $a|_{X(\beta')} = t_{\beta'}$. Залишилось довести, що $a(x_{\beta'}) = x_{\beta'}$. Припустимо, що це не так, тобто $a(x_{\beta'}) = x_\delta > x_{\beta'}$. Тепер розглянемо елемент $a_{x_\delta, x_{\beta'}}$. Тоді із рівності $\mathrm{rk}(a \cdot a_{x_\delta, x_{\beta'}}) = 2$, випливає, що $a_{x_\delta, x_{\beta'}}(x_\delta) = x_1$, а також $a_{x_\delta, x_{\beta'}}(x_{\beta'}) = x_2$. А це суперечить лемі 3.5 та завершує доведення у даному випадку.

2) β є граничним числом. У цьому випадку для довільного $\gamma < \beta$ маємо, що $\gamma + 1 < \beta$. Тому за припущенням індукції $t_{\gamma+1} \in T$. Для елемента $b = t_{\gamma+1} \cdot a$ маємо $\rho_b = \rho_{t_{\gamma+1}}$. Отже $b = t_{\gamma+1}$, а це означає, що $a|_{X(\gamma+1)} = t_{\gamma+1}$. Зокрема, $a(x_\gamma) = x_\gamma$. Внаслідок довільності числа γ ми отримуємо, що $a = t_\beta$. Отже, і в цьому випадку $t_\beta \in T$. □

Лема 3.11. *Для кожного елемента $a \in T$ правильна рівність* $\mathrm{im}(a) = X(\xi(\mathrm{im}(a)))$.

Доведення. Твердження леми 3.11 випливає з лем 3.9 та 3.10. □

Лема 3.12. *Нехай $R\big(\dot{\bigcup}_{i \in I} A_i\big)$ — довільний $\mathcal{R}$-клас, а ϕ — ізоморфізм частково впорядкованих множин I та $X(\xi(I))$. Для елемента a із $T \cap R\big(\dot{\bigcup}_{i \in I} A_i\big)$ рівність $a(A_i) = \phi(i)$ правильна для кожного $i \in I$.*

Доведення. Припустимо, що це не так, тобто існує номер i такий, що $a(A_i) \neq \phi(i)$. Нехай j — найменше з таких i. Тоді $a(A_j) > \phi(j)$. Позначимо через f ізоморфізм між частково впорядкованими множинами X і $W(\alpha)$ та розглянемо елемент $b = t_{f(j)+1}$. Тоді

$$\xi(\mathrm{im}(ba)) = \xi(\{\phi(i)|i \in I, i < j\} \cup \{a(A_j)\}) = \xi(\{\phi(i)|i \in I, i \leq j\}),$$

бо $\phi(i) < \phi(j) < a(A_j)$ для всіх $i < j, i \in I$. Оскільки $X(\xi(\{\phi(i)|i \in I, i \leq j\})) = \{\phi(i)|i \in I, i \leq j\}$, а $\mathrm{im}(ba) \neq \{\phi(i)|i \in I, i \leq j\}$, бо $(ba)(x) = a(b(x)) = a(j) > \phi(j)$ для довільного x із множини $b^{-1}(j)$, то за лемою 3.11 $ba \notin T$. Отже, ми отримали суперечність, яка і доводить нашу лему. □

Тепер із леми 3.12 випливає, що $T \subseteq R(X, \leq)$. Але T та $R(X, \leq)$ містять по одному елементу із кожного $\mathcal{R}$-класу напівгрупи $\mathcal{T}_X$, а тому $T = R(X, \leq)$. □

Наслідок 1. (**Теорема 2** [5]) *Існує бієкція між множиною усіх $\mathcal{R}$-зрізів напівгрупи T_n та множиною усіх лінійних порядків на множині $N = \{1, 2, \ldots, n\}$.*

4. Ізоморфізм $\mathcal{R}$-зрізів. Нехай $R = R(X, \leq)$ — довільний $\mathcal{R}$-зріз. Для кожного $a \in R$ визначимо *тип елемента*, $\tau(a) = \xi(\mathrm{im}(a), \leq)$. Очевидно, що $\tau(a) = \beta \Leftrightarrow \mathrm{im}(a) = X(\beta)$. Більше того, оскільки $e \in R$, то $\tau(e) = \xi(X, \leq)$.

Лема 4.1. *Для довільних $a, b \in R$ правильна нерівність $\tau(ab) \leq \min(\tau(a), \tau(b))$.*

Доведення. Із того, що $\mathrm{im}(ab) \subseteq \mathrm{im}(b)$ випливає, що $\xi(\mathrm{im}(ab)) \leq \xi(\mathrm{im}(b))$, отже, $\tau(ab) \leq \tau(b)$. Далі розглянемо два $\mathcal{R}$-класи $R(\dot{\bigcup}_{i \in I} A_i)$ і $R(\dot{\bigcup}_{j \in J} B_j)$, які містять відповідно a і b. Через K позначимо множину $\{j \in J | B_j \cap \mathrm{im}(a) \neq \varnothing\}$. Оскільки $K \subseteq \mathrm{im}(a)$, то $\xi(\mathrm{im}(ab)) = \xi(K) \leq \xi(\mathrm{im}(a))$, отже $\tau(ab) \leq \tau(a)$. □

Позначимо через E множину усіх ідемпотентів напівгрупи $\mathcal{T}_X$.

Лема 4.2. *Зафіксуємо елемент $a \in E \cap R$. Множина $R_a = \{x \in R \cap E | \tau(x) \leq \tau(a)\}$ є множиною розв'язків в R рівняння $xax = x$.*

Доведення. Нехай $x \in R$ — розв'язок даного рівняння. За лемою 4.1 маємо, що $\tau(x) \leq \tau(a)$. Але для кожного $y \in R$ такого, що $\tau(y) \leq \tau(a)$, виконується рівність $ya = y$, позаяк $\mathrm{im}(y) = X(\tau(y)) \subseteq X(\tau(a))$, а $a|_{X(\tau(a))} = id_{X(\tau(a))}$. Тому для елемента x правильна рівність $x^2 = x$. Отже $x \in R_a$. Оскільки кожен елемент множини R_a задовольняє рівняння $xax = x$, то лему доведено. □

Нехай $R_1 = R(X, \leq_1)$ та $R_2 = R(X, \leq_2)$ — два довільні $\mathcal{R}$-зрізи. Для довільних порядкового числа β та $i \in \{1, 2\}$ позначимо через E^i_β множину $\{a \in E \cap R_i | \tau(a) = \beta\}$.

Лема 4.3. *Довільний ізоморфізм f зрізів R_1 та R_2, індукує для всіх β бієкцію між множинами E^1_β і E^2_β.*

Доведення. Скористаємось трансфінітною індукцією. Базу індукції отримуємо з того, що нуль при ізоморфізмі завжди переходить у нуль. Тепер припустимо, що твердження справедливе для усіх порядкових чисел, менших за β, і доведемо, що воно буде справедливим і для числа β. Припустимо протилежне, тоді можливі два випадки

1) Існує елемент $b \in E^1_\beta$, такий що $f(b) \notin E^2_\beta$. Тоді, за припущенням індукції, $f(b) \in E^2_\gamma$, де $\gamma > \beta$. Розглянемо тепер в R_1 рівняння $xbx = x$ та відповідне йому в

R_2 рівняння $yf(b)y = y$. З леми 4.2 випливає, що f індукує бієкцію між множинами $\bigcup_{1\le\eta\le\beta} E^1_\eta$ і $\bigcup_{1\le\eta\le\gamma} E^2_\eta$. Більше того, скориставшись припущенням індукції, маємо, що f індукує бієкцію між множинами E^1_β і $\bigcup_{\beta\le\eta\le\gamma} E^2_\eta$. Тоді існує елемент $c \in E^1_\beta$ такий що $f(c) \in E^2_\beta$. Далі, розглянувши в R_1 рівняння $xcx = x$ та відповідне йому рівняння в R_2, отримаємо, що f індукує бієкцію між множинами E^1_β і E^2_β, що суперечить сказаному вище, тому що $\bigcup_{\beta\le\eta\le\gamma} E^2_\eta \ne E^2_\beta$, позаяк $f(b) \in (\bigcup_{\beta\le\eta\le\gamma} E^2_\eta)\backslash E^2_\beta$. Отже, даний випадок не можливий.

2) Випадок, коли існує такий елемент $b \notin E^1_\beta$, що $f(b) \in E^2_\beta$, розбирається подібно.

Отже, наше припущення невірне, і лему доведено. □

Теорема 3. *Два $\mathcal{R}$-зрізи $R_1 = R(X, \le_1)$ та $R_2 = R(X, \le_2)$ напівгрупи $\mathcal{T}_X$ є ізоморфними тоді і лише тоді, коли $\xi(X, \le_1) = \xi(X, \le_2)$.*

Доведення. Необхідність. Припустимо, спочатку, що $R_1 \simeq R_2$ і f — деякий ізоморфізм. Оскільки із леми 4.3 випливає, що $\tau(f(x)) = \tau(x)$ для будь-якого елемента $x \in R_1$, то правильні такі рівності $\xi(X, \le_1) = \tau(e) = \tau(f(e)) = \tau(e) = \xi(X, \le_2)$.

Достатність. Тепер припустимо, що $\xi(X, \le_1) = \xi(X, \le_2)$. Тоді через f позначимо ізоморфізм частково впорядкованих множин $(X, \le_1)$ та $(X, \le_2)$. Неважко перевірити, що відображення $x \mapsto f^{-1}xf$ є ізоморфізмом зрізів R_1 і R_2. □

Оскільки на скінченній множині усі досконалі порядки ізоморфні, то одержуємо наступний результат.

Наслідок 2. (**Теорема 3** [5]) *Усі $\mathcal{R}$-зрізи напівгрупи T_n ізоморфні між собою.*

ЛІТЕРАТУРА

1. Renner L.E. *Analogue of Bruhat decomposition for algebraic monoids. II. The length function and the trichotomy*// J. Algebra . – 1995. – V. 175, №2. – P.697–714.
2. Cowan D.F., Reily R. *Partial cross-sections of symmetric inverse semigroups*// Internat J. Algebra Comput. – 1995. – V.5, №3. – P.259–287.
3. Ganyushkin O., Mazorchuk V. *$\mathcal{L}$- and $\mathcal{R}$-cross-sections in IS_n*// Com. in Algebra. – 2003. – V.31, №9. – P.4507–4523.
4. Клифорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. Т.1,2. – М.: Мир, 1972.
5. Pyekhtyeryev V. *$\mathcal{H}$- and $\mathcal{R}$-cross-sections of the full finite semigroup T_n* // J. Algebra and Discrete Mathematics. – 2003. – №3. – P.82–88.

Київський національний університет ім. Тараса Шевченка,
кафедра алгебри і математичної логіки,
м. Київ, пр-кт Глушкова, 6
vasiliy@univ.kiev.ua

Надійшло 26.12.2003