УДК 517.986

Я. В. Микитюк

ФАКТОРИЗАЦІЯ ФРЕДГОЛЬМОВИХ ОПЕРАТОРІВ В ОПЕРАТОРНИХ АЛГЕБРАХ

Ya. V. Mykytyuk. *Factorization of Fredholm operators in operator algebras*, Matematychni Studii, **21** (2004) 87–97.

Factorization problem for Fredholm operators along the chain of orthogonal projectors is studied in some special Banach operator algebras.

Я. В. Микитюк. *Факторизация фредгольмовых операторов в операторных алгебрах* // Математичні Студії. – 2004. – Т.21, №1. – С.87–97.

Изучается проблема факторизации фредгольмовых операторов вдоль цепочки ортопроекторов в некоторых специальных банаховых операторных алгебрах.

1. Вступ. Нехай H — гільбертів простір, а $\mathfrak{P}$ — повний ланцюжок ортопроекторів $P : H \to H$. Ланцюжок $\mathfrak{P}$ породжує трансформатори трикутної зрізки $\mathcal{P}^+$ і $\mathcal{P}^- = I - \mathcal{P}^+$, що діють в алгебрі компактних операторів $\mathcal{B}_\infty(H)$. Позначимо через Σ множину всіх банахових алгебр $\mathfrak{S} \subset \mathcal{B}_\infty$, в яких трансформатори $\mathcal{P}^\pm$ є неперервними. Для алгебри $\mathfrak{S} \in \Sigma$ приймемо $\mathfrak{S}^\pm = \mathcal{P}^\pm\mathfrak{S}$. Тоді $\mathfrak{S}^+$ і $\mathfrak{S}^-$ є замкненими підалгебрами в $\mathfrak{S}$, що складаються з вольтеровських операторів і $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}^+ \dot{+} \mathfrak{S}^-$. Нехай $\mathfrak{S} \in \Sigma$ і $Q \in \mathfrak{S}$. Говоритимемо, що оператор $I - Q$ *допускає факторизацію* в $\mathfrak{S}$, якщо його можна подати у вигляді

$$I - Q = (I + K_-)^{-1}(I + K_+)^{-1}, \tag{1.1}$$

де $K_+ \in \mathfrak{S}^+$, $K_- \in \mathfrak{S}^-$. Зауважимо, що *якщо* $I - Q$ *допускає факторизацію*, то оператори $K_\pm = K_\pm(Q)$ однозначно визначаються оператором Q.

Факторизація вигляду (1.1) відіграє важливу роль у цілому ряді питань, зокрема, при розв'язуванні інтегральних рівнянь та обернених задач спектральної теорії. Детальний виклад базових положень теорії факторизації можна знайти у книгах [1], [2]. Однак, проблема факторизації в банахових алгебрах, які не є симетрично нормованими ідеалами, залишається мало вивченою. У статті [4] отримано ряд абстрактних результатів, що стосуються цієї проблеми. Тут ми зосередимося на застосуваннях теорем з [4] до операторних алгебр, що виникають при розв'язуванні обернених спектральних задач для операторів Штурма-Ліувілля з сингулярними потенціалами.

Стаття має таку структуру. У п.2 ми коротко викладаємо основні факти теорії факторизації фредгольмових операторів і деякі результати зі статті [4]. Далі, в п.3 ми

2000 *Mathematics Subject Classification:* 47A68, 47A46.

формулюємо основні результати, а в п.4 та 5 подаємо їхні доведення. Нарешті, у п.6 пояснюємо, як отримані результати можна використати при розв'язуванні обернених спектральних задач для операторів Штурма-Ліувілля з сингулярними потенціалами.

2. Попередні відомості. Нехай H — сепарабельний нескінченновимірний гільбертів простір і $\mathcal{B} = \mathcal{B}(H)$ — банахова алгебра всіх лінійних неперервних скрізь визначених операторів, що діють в H. Відповідно $\mathcal{B}_\infty$ — банахова алгебра всіх компактних операторів з $\mathcal{B}$, а $\mathcal{B}_0$ — лінійний простір всіх скінченновимірних операторів з $\mathcal{B}$.

Множину ортопроекторів $\mathfrak{P} \subset \mathcal{B}$ назвемо *ланцюжком*, якщо для довільної пари $P_1, P_2 \in \mathfrak{P}$ або $P_1 < P_2$ або $P_2 < P_1$.

Ланцюжок називається *замкненим*, якщо він є замкненою множиною в сильній операторній топології.

Замкнений ланцюжок називається *неперервним*, якщо для довільної пари $P_1, P_2 \in \mathfrak{P}$ $(P_1 < P_2)$, існує оператор $P \in \mathfrak{P}$ такий, що $P_1 < P < P_2$.

Ланцюжок $\mathfrak{P}$ назвемо *повним*, якщо він є неперервним і $0, I \in \mathfrak{P}$.

Надалі у статті $\mathfrak{P}$ — деякий повний ланцюжок.

Приймемо за означенням

$$\mathcal{B}^+ := \{B \in \mathcal{B} : \forall P \in \mathfrak{P} \quad (I - P)BP = 0\},$$
$$\mathcal{B}^- := \{B \in \mathcal{B} : \forall P \in \mathfrak{P} \quad PB(I - P) = 0\}$$

і нехай

$$\mathcal{B}_\infty^+ := \mathcal{B}_\infty \cap \mathcal{B}^+, \quad \mathcal{B}_\infty^- := \mathcal{B}_\infty \cap \mathcal{B}^-.$$

Оператори з $\mathcal{B}_\infty^+$ і $\mathcal{B}_\infty^-$ є вольтеровими (див. [1]). Крім того, $\mathcal{B}_\infty^+$ та $\mathcal{B}_\infty^-$ є замкненими підпросторами в $\mathcal{B}_\infty$ і $\mathcal{B}_\infty^+ \cap \mathcal{B}_\infty^- = \{0\}$. Позначимо через $\mathcal{P}^+(\mathcal{P}^-)$ проектор, що проектує лінійний простір

$$\widetilde{\mathcal{B}}_\infty := \mathcal{B}_\infty^+ \dot{+} \mathcal{B}_\infty^-$$

на $\mathcal{B}_\infty^+(\mathcal{B}_\infty^-)$ паралельно до $\mathcal{B}_\infty^-(\mathcal{B}_\infty^+)$. Оператори $\mathcal{P}^+, \mathcal{P}^-$ називаються *трансформаторами трикутної зрізки*. Відомо ([1]), що вони є неперервними проекторами в ідеалах Неймана-Шаттена $\mathcal{B}_p$ $(1 < p < \infty)$.

Нехай $\mathfrak{S}$ — вкладена в $\mathcal{B}_\infty$ банахова алгебра. Ми будемо говорити, що оператор $I - Q$, $Q \in \mathcal{B}_\infty$ $(Q \in \mathfrak{S})$ *факторизується в* $\mathcal{B}_\infty$ (*факторизується в* $\mathfrak{S}$), якщо

$$I - Q = (I + K_-)^{-1}(I + K_+)^{-1}, \tag{2.1}$$

де $K_\pm \in \mathcal{B}_\infty^\pm$ (відповідно, $K_\pm \in \mathfrak{S} \cap \mathcal{B}_\infty^\pm$).

Через Φ позначимо множину всіх тих $Q \in \mathcal{B}_\infty$, для яких оператор $I - Q$ факторизується в $\mathcal{B}_\infty$. Як добре відомо [1], множина Φ міститься у множині

$$\Psi := \{Q \in \mathcal{B}_\infty : \forall P \in \mathfrak{P} \quad \mathrm{Ker}(I - PQP) = \{0\}\},$$

і кожному $Q \in \Phi$ відповідає лише одна пара операторів $K_\pm := K_\pm(Q)$, для яких виконується рівність (2.1). Для довільної алгебри $\mathfrak{S} \in \Sigma$ приймемо $\Phi_\mathfrak{S} := \Phi \cap \mathfrak{S}$, $\Psi_\mathfrak{S} := \Psi \cap \mathfrak{S}$. Справедлива наступна теорема ([4]).

Теорема 2.1 ([4]). *Нехай $\mathfrak{S} \in \Sigma$. Тоді множина $\Phi_\mathfrak{S}$ відкрита в $\mathfrak{S}$, а відображення $\Phi_\mathfrak{S} \ni Q \mapsto K_\pm(Q) \in \mathfrak{S}$ локально ліпшицеві.*

Нехай

$$\Sigma_f := \{\mathfrak{S} \in \Sigma : \quad \Phi_{\mathfrak{S}} = \Psi_{\mathfrak{S}}\}, \qquad \Sigma_f^0 := \Sigma_f \cap \Sigma^0,$$

де Σ^0 — клас, що складається з усіх тих $\mathfrak{S} \in \Sigma$, для яких множина $\mathfrak{S} \cap \mathcal{B}_0$ скрізь щільна в банаховій алгебрі $\mathcal{B}_\infty$. Наступні дві теореми з [4] дають достатні умови належності алгебри $\mathfrak{S} \in \Sigma$ до класів Σ_f та Σ_f^0 і описують структуру множини $\Phi_{\mathfrak{S}}$.

Теорема 2.2 ([4]). *1) Нехай $\mathfrak{S}_1 \in \Sigma_f$, $\mathfrak{S} \in \Sigma$. Якщо $\mathfrak{S}$ — правосторонній (лівосторонній) ідеал в $\mathfrak{S}_1$, то $\mathfrak{S} \in \Sigma_f$.*

2) Нехай $\mathfrak{S}_1 \in \Sigma_f$, $\mathfrak{S} \in \Sigma$ і $\mathfrak{S}_1$ — двосторонній ідеал в $\mathfrak{S}$. Якщо $\mathfrak{S}_1$ скрізь щільна в $\mathfrak{S}$, то $\mathfrak{S} \in \Sigma_f$.

3) Нехай $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2 \in \Sigma_f$, $\mathfrak{S} \in \Sigma$ і $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}_2$. Тоді $\mathfrak{S} \in \Sigma_f$.

Теорема 2.3 ([4]). *1) Нехай $Q \in \Phi$ і $Q_1 \in \mathcal{B}_0$. Тоді множина*

$$\Lambda := \{\lambda \in \mathbb{C} : (Q + \lambda Q_1) \notin \Phi\}$$

замкнена і $\mu(\Lambda) = 0$, де μ — міра Лебега в $\mathbb{C}$.

2) Нехай $\mathfrak{S} \in \Sigma_f$, $Q \in \mathfrak{S}$ і $Q_1 \in \mathcal{B}_0 \cap \mathfrak{S}$. Якщо $\|Q - Q_1\|_{\mathcal{B}} < 1$, то існують довільно малі за модулем числа $\lambda \in \mathbb{C}$, для яких $(Q + \lambda Q_1) \in \Phi_{\mathfrak{S}}$.

3) Нехай $\mathfrak{S} \in \Sigma_f^0$. Тоді множина $\Phi_{\mathfrak{S}}$ скрізь щільна в $\mathfrak{S}$.

Крім цього нам буде потрібна наступна лема з [4].

Лема 2.4 ([4]). *Якщо оператори $Q, \widetilde{Q} \in \mathcal{B}_\infty$ пов'язані рівністю*

$$I - \widetilde{Q} = (I + M_-)(I - Q)(I + M_+),$$

де $M_\pm \in \mathcal{B}_\infty^\pm$, то:

1) $Q \in \Phi \iff \widetilde{Q} \in \Phi$;

2) $Q \in \Psi \iff \widetilde{Q} \in \Psi$.

3. Формулювання основних результатів. Нехай $H := L_2(0, a)$ $(0 < a \leq +\infty)$ і $\mathfrak{P}$ — ланцюжок ортопроекторів

$$P(t) := \chi_{[0,t)}, \qquad 0 \leq t \leq a, \tag{3.1}$$

де $\chi_{[0,t)}$ — оператор множення (в просторі H) на характеристичну функцію інтервалу $[0, t)$. Через P_t позначимо оператор множення на $\chi_{[0,t)}$ в просторі $L_1(0, a)$.

Означення 3.1. Нехай банахові простори X і Y неперервно вкладені в $L_1(0, a)$. Позначимо через $\mathfrak{H}(X, Y)$ банахову алгебру операторів, елементами якої є інтегральні оператори $K : H \to H$ з ядрами k, для яких відображення

$$\xi \mapsto k(\cdot, \xi) \in X, \qquad \xi \mapsto k(\xi, \cdot) \in Y$$

є неперервними (тобто збігаються майже скрізь з неперервними відображен нями) на $[0, a]$, причому у випадку $a = +\infty$ виконуються також рівності

$$\lim_{\xi \to +\infty} \|k(\cdot, \xi)\|_X = \lim_{\xi \to +\infty} \|k(\xi, \cdot)\|_Y = 0.$$

Норму в $\mathfrak{H}(X,Y)$ задаємо формулою

$$||K||_{\mathfrak{H}(X,Y)} := c\left(\max_{0\le\xi\le a}\|k(\cdot,\xi)\|_X + \max_{0\le\xi\le a}||k(\xi,\cdot)||_Y\right),$$

де додатна стала c вибрана так, що

$$\|f\|_{L_1(0,a)} \le c\|f\|_X, \quad \|g\|_{L_1(0,a)} \le c\|g\|_Y, \qquad f\in X, \qquad g\in Y.$$

Домовимося вживати скорочення $\mathfrak{H}(X) := \mathfrak{H}(X,X)$ і $\mathfrak{G}_1 := \mathfrak{H}(L_1(0,a))$.

Зауваження 3.2. Кожна банахова алгебра $\mathfrak{H}(X,Y)$ є підмножиною в $\mathfrak{G}_1$, і норма $||\cdot||_{\mathfrak{G}_1}$ збігається з так званою нормою Гольмгрена [5], тому кожен оператор $K\in\mathfrak{H}(X,Y)$ є неперервний в кожному просторі $L_q(0,a)$, $1\le q\le\infty$.

Основне питання, яке виникає у зв'язку з алгебрами $\mathfrak{H}(X,Y)$ — це питання про їхню належність до класів Σ_f і Σ_f^0.

Означення 3.3. Будемо говорити, що банахів простір $X\subset L_1(0,a)$ є $\mathfrak{P}$-*гладким*, якщо:

1) X неперервно вкладений в $L_1(0,a)$;
2) для кожного $t\in[0,a]$ оператор P_t неперервно відображає X в X і
$$\sup_{t\in[0,a]}\|P_t\|_{X\to X} =: C_X < \infty;$$
3) для кожного $f\in X$ функція $[0,a]\ni t\mapsto P_tf\in X$ неперервна.

Домовимося через $C_0([0,a],W)$ $(0<a\le\infty$, W — банахів простір) позначати множину всіх неперервних функцій $f:[0,a]\to W$, які у випадку $a=+\infty$ задовольняють додаткову умову $\lim\limits_{\xi\to+\infty}\|f(\xi)\|_W = 0$. Приймемо також, що $C_0[0,a] := C_0([0,a],\mathbb{C})$.

Означення 3.4. Говоритимемо, що банахів простір $X\subset L_1(0,a)$ *володіє властивістю* (C), якщо множина $X\cap C_0[0,a]$ скрізь щільна в H.

Основні результати цієї статті можна сформулювати у вигляді наступних двох теорем.

Теорема 3.5. *Нехай X,Y — деякі $\mathfrak{P}$-гладкі банахові простори і $\mathfrak{G} := \mathfrak{H}(X,Y)$. Тоді $\mathfrak{G}\in\Sigma_f$. Якщо, крім того, простори X та Y володіють властивістю (C), то $\mathfrak{G}\in\Sigma_f^0$.*

Для багатьох конкретних алгебр вдається довести їхню $\mathfrak{P}$-гладкість та властивість (C). Зокрема, справедлива наступна теорема.

Теорема 3.6. *Нехай $p\in[1,\infty)$, $s\in(0,1/2)$, $a\in(0,\infty)$; тоді алгебри $\mathfrak{H}(E_p)$, а також $\mathfrak{H}(L_p(0,a))$ і $\mathfrak{H}(W_2^s(0,a))$ належать до класу Σ_f^0.*

4. Доведення теореми 3.5.

4.1. Дія трансформаторів $\mathcal{P}^{\pm}$ в алгебрах $\mathfrak{H}(X,Y)$.

Твердження 4.1. *Нехай X,Y — деякі $\mathfrak{P}$-гладкі банахові простори і $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}(X,Y)$. Тоді $\mathfrak{G}\in\Sigma$. Якщо, крім того, простори X та Y володіють властивістю (C), то $\mathfrak{G}\in\Sigma^0$.*

Доведення. Нехай W — довільний $\mathfrak{P}$-гладкий банахів простір. З означення 3.3 випливає, що якщо функція $f\colon [0,1] \to W$ неперервна, то неперервна також функція

$$[0,1] \ni t \mapsto P_t f(t) \in W.$$

Справді, досить лише зауважити, що

$$P_s f(s) - P_t f(t) = (P_s + P_t)(f(s) - f(t)) + P_s f(t) - P_t f(s).$$

та скористатися неперервністю f і неперерервністю та рівномірною обмеженістю P_t.

Нехай оператор $K \in \mathfrak{H}(X,Y)$ має ядро k. Тоді оператори $K_\pm := \mathcal{P}^\pm K$ мають ядра $k_\pm$, для яких виконуються рівності

$$k_+ + k_- = k, \quad k_+(\cdot,t) = P_t k(\cdot,t), \quad k_+(t,\cdot) = k(t,\cdot) - P_t k(t,\cdot), \quad t \in [0,1]. \tag{4.1}$$

З (4.1), беручи до уваги сказане раніше, отримуємо, що оператори $K_\pm$ належать до $\mathfrak{H}(X,Y)$, причому

$$\|K_\pm\|_{\mathfrak{H}(X,Y)} \le (C_X + C_Y + 1)\|K\|_{\mathfrak{H}(X,Y)},$$

тобто, трансформатори трикутної зрізки є неперервними в $\mathfrak{H}(X,Y)$. Отже, алгебра $\mathfrak{H}(X,Y)$ належить до класу Σ.

Припустимо, що простори X та Y володіють властивістю (C). Позначимо через $\mathcal{D}$ підмножину в $\mathcal{B}_0$, що складається з інтегральних операторів, ядра яких мають вигляд

$$k(x,t) = \sum_{j=1}^n \phi_j(x)\psi_j(t), \qquad x,t \in [0,1],$$

де $n \in \mathbb{N}, \phi_j \in Y \cap C_0[0,a], \psi_j \in X \cap C_0[0,a]\,(j = 1,\dots,n)$. Очевидно, що множина $\mathcal{D}$ належить до $\mathfrak{S}$ і, оскільки множини $X \cap C_0[0,a]$ та $Y \cap C_0[0,a]$ скрізь щільні в H, то $\mathcal{D}$ скрізь щільна в $\mathcal{B}_0$. Отже, $\mathfrak{S} \in \Sigma^0$. □

4.2. Алгебра $\mathfrak{G}_1$. Позначимо через $\mathcal{D}$ підмножину в $\mathfrak{G}_1$, до якої входять скінченновимірні інтегральні оператори Q, ядра яких q мають вигляд

$$q(x,t) = \sum_{j=1}^n \varphi_j(x)\psi_j(t), \tag{4.2}$$

де $\varphi_j, \psi_j \in L_1(0,a) \cap C_0[0,a]\,(j = 1,\dots,n)$.

Справедливе наступне твердження.

Твердження 4.2. *Множина $\mathcal{D}$ скрізь щільна в $\mathfrak{G}_1$ і для довільного $Q \in \mathcal{D} \cap \Psi$ оператор $I - Q$ допускає факторизацію в алгебрі $\mathfrak{G}_1$.*

Доведення. Розглянемо лише випадок $a = +\infty$. Випадок $a < +\infty$ розглядається подібно. Через $\theta_b : H \to H\,(b > 0)$ позначимо оператор множення на неперервну функцію

$$\theta_b(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } 0 \le x \le b, \\ 1 - (x - b), & \text{якщо } b < x < b + 1, \\ 0, & \text{якщо } x \ge b + 1. \end{cases}$$

Виберемо довільний інтегральний оператор $K \in \mathfrak{G}_1$. Для того, щоб довести твердження про щільність, досить переконатися, що K можна з довільною точністю наблизити (за нормою алгебри $\mathfrak{G}_1$) інтегральними операторами, ядра яких неперервні і мають компактний носій. Очевидно, що для кожного $b > 0$ оператори $\theta_b K$, $K\theta_b$ належать до $\mathfrak{G}_1$. Зауваживши, що оператори θ_b неперервні в $L_1(0,\infty)$ і

$$\lim_{b\to+\infty} \|f - \theta_b f\|_{L_1(0,\infty)} = 0, \qquad f \in L_1(0,\infty),$$

нескладно переконатися, що

$$\lim_{b\to+\infty} \|K - \theta_b K\|_{\mathfrak{G}_1} = \lim_{b\to+\infty} \|K - K\theta_b\|_{\mathfrak{G}_1} = 0.$$

Отже, оператор K можна з довільною точністю наблизити (за нормою алгебри $\mathfrak{G}_1$) операторами вигляду $\theta_b K \theta_b$, ядра яких мають компактний носій. А тому, без обмеження загальності, можна вважати, що ядро оператора $K \in \mathfrak{G}_1$ має компактний носій. Позначимо через K_ε ($\varepsilon \in (0,1)$) інтегральний оператор в H з ядром

$$k_\varepsilon(x,t) := \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon k(x+\xi,t)\,d\xi, \qquad x,t \in [0,+\infty).$$

Очевидно, що ядро k_ε є неперервним і фінітним. Доведемо, що

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \|K - K_\varepsilon\|_{\mathfrak{G}_1} = 0.$$

Позначимо через C_ε оператор в $L_1(0,\infty)$, що діє за формулою

$$(C_\varepsilon f)(x) := \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon f(x+\xi)d\xi, \qquad x \in [0,\infty], \quad f \in L_1(0,\infty).$$

Легко переконатися, що C_ε сильно збігаються до I при $\varepsilon \to +0$. Оскільки (див. означення 3.3) функція $t \to k(\cdot,t) \in L_1(0,\infty)$ неперервна і фінітна, то, множина її значень передкомпактна в $L_1(0,\infty)$. Тому

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\max_{t\geq 0} \|k(\cdot,t) - k_\varepsilon(\cdot,t)\|_{L_1(0,\infty)} = \lim_{\varepsilon\to+0}\max_{t\geq 0} \|k(\cdot,t) - C_\varepsilon k(\cdot,t)\|_{L_1(0,\infty)} = 0.$$

Враховуючи неперервність функції $x \to k(x,\cdot) \in L_1(0,\infty)$ і оцінку

$$\left\| \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon (k(x,\cdot) - k(x+\xi,\cdot))d\xi \right\|_{L_1(0,\infty)} \leq \max_{|x-y|\leq\varepsilon} \|k(x,\cdot) - k(y,\cdot)\|_{L_1(0,\infty)},$$

отримуємо, що

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\max_{x\geq 0} \|k(x,\cdot) - k_\varepsilon(x,\cdot)\|_{L_1(0,\infty)} = 0.$$

Зі сказаного вище випливає, що оператори K_ε в нормі простору $\mathfrak{G}_1$ збігаються до K при $\varepsilon \to +0$. Тим самим твердження про щільність доведене.

Доведення другої частини твердження в основному повторює доведення добре відомого результату про факторизацію скінченновимірного оператора ([2, XXII.5]), а тому ми обмежемося лише його ескізом.

Нехай оператор $Q \in \mathcal{D} \cap \Psi$ має ядро q, задане формулою (4.2). Тоді

$$q(x,t) = \alpha(x)\beta(t)^\top, \qquad x,t \geq 0,$$

де $\alpha(x)$, $\beta(x)$ — матриці-рядки:

$$\alpha(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)), \quad \beta(x) = (\psi_1(x), \ldots, \psi_n(x)),$$

а $\beta(t)^\top$ — транспонована до $\beta(t)$ матриця-стовпець. Оскільки $Q \in \Psi$, то для довільного $\tau \geq 0$ оператор $I - P(\tau)QP(\tau)$ оборотний. Це, як неважко переконатися, рівносильне до оборотності матриці

$$M(\tau) = I_{\mathbb{C}^n} - \int\limits_0^\tau \beta(x)^\top \alpha(x) dx.$$

Беручи до уваги фінітність функцій α і β, отримуємо, що матрична функція $[0,\infty) \ni \tau \to M(\tau)^{-1}$ неперервна і обмежена. Через K_+ і K_- позначимо інтегральні оператори в просторі H, визначені за допомогою рівностей

$$(K_+ f)(x) := \int\limits_x^\infty [\alpha(x) M(t)^{-1} \beta(t)^\top] f(t) dt, \qquad f \in H, \quad x \geq 0,$$

$$(K_- f)(x) := \int\limits_0^x [\alpha(x) M(x)^{-1} \beta(t)^\top] f(t) dt, \qquad f \in H, \quad x \geq 0.$$

Легко бачити, що оператори K_+ і K_- належать до $\mathcal{P}^+\mathfrak{G}_1$ і $\mathcal{P}^-\mathfrak{G}_1$ відповідно. За допомогою безпосередніх обчислень отримуємо рівність

$$(I + K_-)(I - Q)(I + K_+) = I,$$

тобто оператор $I - Q$ допускає факторизацію в алгебрі $\mathfrak{G}_1$. $\square$

4.3. Завершення доведення теореми 3.5. Спочатку перевіримо, чи алгебра $\mathfrak{G}_1$ належить до класу Σ_f. Згідно з твердженням 4.1, алгебра $\mathfrak{G}_1$ належить до класу Σ. Оскільки нульовий оператор належить до множини $\Phi_{\mathfrak{G}_1}$, то згідно з теоремою 2.1 множина $\Phi_{\mathfrak{G}_1}$ містить деяку кулю

$$S_\delta = \{Q \in \mathfrak{G}_1 : \quad \|Q\|_{\mathfrak{G}_1} < \delta\}, \qquad \delta > 0.$$

Зафіксуємо оператор $Q \in \mathfrak{G}_1 \cap \Psi$. Згідно з твердженням 4.2 оператор Q можна подати у вигляді суми $Q = R + Q_1$, де $R \in S_\delta \subset \Phi_{\mathfrak{G}_1}$, а ядро оператора Q_1 має вигляд (4.2). Розглянемо оператор

$$\widetilde{Q} := (I + K_-(R)) Q_1 (I + K_+(R)).$$

Очевидно, що ядро оператора $\widetilde{Q}$ також має вигляд (4.2) і

$$I - \widetilde{Q} = (I + K_-(R))(I - Q)(I + K_+(R)). \tag{4.3}$$

Оскільки $Q \in \Psi$, то згідно з лемою 2.4 $\widetilde{Q} \in \Psi$. Звідси, беручи до уваги твердження 4.2, отримуємо, що

$$I - \widetilde{Q} = (I + K_-(\widetilde{Q}))^{-1} (I + K_+(\widetilde{Q}))^{-1}, \tag{4.4}$$

де $K_\pm(\widetilde{Q}) \in \mathcal{P}^\pm\mathfrak{G}_1$. Оскільки $K_\pm(R) \in \mathcal{P}^\pm\mathfrak{G}_1$, то з рівностей (4.3) і (4.4) отримуємо, що оператор Q допускає факторизацію в алгебрі $\mathfrak{G}_1$. Тим самим ми довели, що алгебра $\mathfrak{G}_1$ належить до класу Σ_f.

Нехай тепер X, Y — довільні $\mathfrak{P}$-гладкі банахові простори. Згідно з доведеним вище, алгебра $\mathfrak{G}_1$ належить до класу Σ_f. Нехай $W := L_1(0,a)$. Тоді $\mathfrak{G}_1 := \mathfrak{H}(W,W)$ і $X \subset W$, $Y \subset W$. Безпосередня перевірка показує, що алгебра $\mathfrak{H}(X,W)$ є лівостороннім ідеалом в $\mathfrak{H}(W,W)$, а алгебра $\mathfrak{H}(X,Y)$ правостороннім ідеалом в $\mathfrak{H}(X,W)$. Звідси, беручи до уваги теорему 2.2 і твердження 4.1, отримуємо, що алгебра $\mathfrak{H}(X,Y)$ належить до класу Σ_f. Якщо, крім того, простори X, Y володіють властивістю (C), то згідно з твердженням 4.1 алгебра $\mathfrak{H}(X,Y)$ належить до класу Σ_f^0.

5. Доведення теореми 3.6. З огляду на теорему 3.5, досить довести, що простори E_p, $L_p(0,a)$ та $W_p^s(0,a)$, $a < \infty$, $s \in [0, \frac{1}{2})$, є $\mathfrak{P}$-гладкими і володіють властивістю (C). Оскільки сукупність гладких функцій з компактним носієм в $[0,a]$ є щільною в H, простори E_p, $L_p(0,a)$ та $W_p^s(0,a)$, $a < \infty$, $s \in [0, \frac{1}{2})$, володіють властивістю (C). Крім того, прості міркування, що базуються на властивостях інтеграла Лебега, показують, що простори $L_p(0,a)$, $a < \infty$, та E_p є $\mathfrak{P}$-гладкими. Отже, нам залишилось довести, що $\mathfrak{P}$-гладкими є простори Соболєва $W_p^s(0,a)$, $s \in [0, \frac{1}{2})$.

Добре відомо ([6, розд. I]), що для довільного відкритого (обмеженого або необмеженого) інтервалу $\Omega \subset \mathbb{R}$ існують оператори $q \in \mathcal{B}(W_2^s(\Omega), W_2^s(\mathbb{R}))$ і $r \in \mathcal{B}(W_2^s(\mathbb{R}), W_2^s(\Omega))$ такі, що

$$\forall u \in W_2^s(\Omega) \quad \forall v \in W_2^s(\mathbb{R}) \quad qu = u, \quad rv = v \quad \text{майже скрізь на} \quad \Omega.$$

Тому для того, щоб довести $\mathfrak{P}$-гладкість просторів $W_p^s(0,a)$, $s \in [0, \frac{1}{2})$, досить переконатися, що справедлива наступна лема.

Лема 5.1. *Нехай $0 \le s < 1/2$ і S_t — ортопроектор у просторі $L_2(\mathbb{R})$, що діє за формулою*

$$S_t f := \chi_{(-\infty,t)} f, \qquad f \in L_2(\mathbb{R}),$$

де $\chi_{(-\infty,t)}$ — характеристична функція інтервала $(-\infty,t)$ $(t \in \mathbb{R})$. Тоді для кожного $\varphi \in W_2^s[0,1]$ функція $\mathbb{R} \ni t \mapsto S_t\varphi \in W_2^s(\mathbb{R})$ неперервна.

Доведення. У випадку $s = 0$ твердження леми є очевидним, а тому вважаємо, що $s \in (0, 1/2)$. Для довільних $f \in L_2(\mathbb{R})$, $\tau \in \mathbb{R}$ приймемо

$$f_\tau(x) := f(x+\tau), \qquad x, \tau \in \mathbb{R}.$$

Доведемо, що для кожного $\varphi \in W_2^s(\mathbb{R})$

$$\varphi_\tau \xrightarrow{W_2^s} \varphi \quad \text{при} \quad \tau \to 0. \tag{5.1}$$

Справді, однією з еквівалентних норм у просторі $W_2^s(\mathbb{R})$ є норма

$$|\varphi|_s := \left(\int\limits_{\mathbb{R}} |\widehat{\varphi}(t)|^2 (1+t^2)^s dt \right)^{1/2}, \qquad \varphi \in W_2^s(\mathbb{R}), \tag{5.2}$$

де $\widehat{\varphi}$ – перетворення Фур'є функції φ. Тому

$$|\varphi_\tau - \varphi|_s^2 = \int\limits_{\mathbb{R}} |1 - e^{i\tau t}|^2 |\widehat{\varphi}(t)|^2 (1+t^2)^s dt.$$

Звідки, беручи до уваги теорему Лебега про мажоровану збіжність, легко отримуємо (5.1).

Відомо ([6]), що норму у просторі $W_2^s(\mathbb{R})$ $(0 < s < 1)$ (еквівілентну до норми (5.2)) можна означити за допомогою рівності

$$||f||_{W_2^s(\mathbb{R})} := \left(||f||_{L_2}^2 + \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{|f(x) - f(y)|^2}{|x-y|^{1+2s}} dx\, dy \right)^{1/2}, \qquad f \in W_2^s(\mathbb{R}).$$

Виберемо довільні $\varphi \in W_2^s(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$ і оцінимо величину

$$I_\tau := ||S_{a+\tau}\varphi - S_a\varphi||_{W_2^s(\mathbb{R})}^2,$$

вважаючи, що $\tau > 0$. Випадок $\tau < 0$ розглядається подібно. Маємо,

$$\begin{aligned} I_\tau \le \int\limits_{\Delta_\tau} |\varphi(x)|^2 dx + \int\limits_{\Delta_\tau} \int\limits_{\Delta_\tau} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|^2}{|x-y|^{1+2s}} dx\, dy + \\ +2 \int\limits_{\Delta_\tau} |\varphi(x)|^2 \int\limits_{\mathbb{R}\setminus\Delta_\tau} \frac{dy}{|x-y|^{1+2s}} dx = I_{1,\tau} + I_{2,\tau} +, I_{3,\tau}, \end{aligned} \tag{5.3}$$

де $\Delta_\tau = [a, a+\tau]$. Очевидно, що доданки $I_{1,\tau}$ та $I_{2,\tau}$ в правій частині (5.3) прямують до нуля при $\tau \to 0$. Оцінимо доданок $I_{3,\tau}$. Легко бачити, що

$$I_{3,\tau} = \frac{1}{s} \int\limits_{\Delta_\tau} \frac{|\varphi(x)|^2}{|x-a|^{2s}} dx + \frac{1}{s} \int\limits_{\Delta_\tau} \frac{|\varphi(x)|^2}{|a+\tau-x|^{2s}} dx = \frac{1}{s} \int\limits_0^\tau \frac{|\varphi_a(x)|^2}{|x|^{2s}} dx + \frac{1}{s} \int\limits_0^\tau \frac{|\psi_\tau(x)|^2}{|x|^{2s}} dx,$$

де $\psi(x) = \varphi(a-x)$. Відомо ([6]), що для всіх $f \in W_2^s(\mathbb{R})$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{|f(x)|^2}{|x|^{2s}} dx \le C ||f||_{W_2^s(\mathbb{R})}^2,$$

де C — додатна стала, що не залежить від f. Оскільки $\psi_\tau \to \psi$ в $W_2^s(\mathbb{R})$, з попередньої нерівності випливає, що $I_{3,\tau} \to 0$ при $\tau \to +0$. Отже, $I_\tau \to 0$ при $\tau \to 0$. $\square$

6. Факторизація і обернені задачі. Коротко пояснимо, як теорему 3.6 можна використати при розв'язуванні обернених задач для операторів Штурма-Ліувілля з сингулярними потенціалами. Добре відомо ([7, 8]), що в теорії обернених спектральних задач для операторів Штурма-Ліувілля на скінченному відрізку або півосі центральним місцем є рівняння Гельфанда-Левітана-Марченка (ГЛМ), розв'язуючи яке ми за деякою функцією $\varphi \in L_2$ знаходимо ядро $k(x,t)$ оператора перетворення. Наприклад, у випадку оператора Штурма-Ліувілля

$$Ty = -y'' + qy$$

на відрізку $[0,1]$ із сингулярним потенціалом $q \in W_2^{-1}(0,1)$ і крайовими умовами Діріхле на кінцях, рівняння ГМЛ має вигляд

$$k(x,t) - f(x,t) - \int_0^x k(x,\eta) f(\eta,t) dt = 0, \qquad 0 \le t \le x \le 1, \tag{6.1}$$

де

$$f(x,t) = \varphi(|x-t|) - \varphi(x+t), \qquad x,t \in [0,1] \tag{6.2}$$

і $\varphi \in L_2(0,2)$. Вважатимемо, що рівняння (6.1) має розв'язок, якщо існує функція $k \in L_2((0,1)^2)$ з носієм в трикутнику $\Delta := \{(x,t) : 0 \le t \le x \le 1\}$, для якої (6.1) виконується майже скрізь в Δ. Неважко переконатися (див. також [2]), що розв'язність рівняння (6.1) рівносильна до факторизації в $\mathcal{B}_\infty$ оператора $I - F_\varphi$, де F_φ — інтегральний оператор в $L_2(0,1)$ з ядром (6.2). Приймемо

$$\mathcal{F}_s := \{\varphi \in W_2^s(0,2) : \quad F_\varphi \in \Psi\}.$$

Тоді, якщо $\varphi \in \mathcal{F}_0$, то рівняння (6.1) має єдиний розв'язок k_φ, який є ядром оператора перетворення для деякого оператора Штурма-Ліувілля з потенціалом $q \in W_2^{-1}(0,1)$. При цьому

$$I - F_\varphi = (I + K_\varphi)^{-1}(I + K_\varphi^\top)^{-1}, \tag{6.3}$$

де K_φ — інтегральний оператор з ядром k_φ, $K_\varphi^\top$ — асоційований з K_φ оператор, тобто

$$(K_\varphi^\top g)(x) := \int_x^1 k_\varphi(t,x) g(t)\, dt, \qquad g \in L_2(0,1),$$

а також справедлива рівність ([9])

$$\sigma(x) = -2\varphi(2x) - 2\int_0^x k_\varphi(x,t) f(t,x)\, dt, \tag{6.4}$$

де σ — одна з первісних потенціалу q. Зауважимо, що функцію φ можна побудувати за спектральними даними. Припустимо, що нам вдалося встановити належність функції φ до простору $W_2^s(0,2)$, $s \in [0,1/2)$. Як довести, що в цьому випадку потенціал q належить до простору $W_2^{s-1}[0,1]$? Центральним моментом у вирішенні цієї проблеми є доведення того, що інтегральний оператор

$$(K_\varphi g)(x) := \int_0^x k_\varphi(x,t) g(t)\, dt, \qquad g \in L_2(0,1),$$

з ядром k_φ належить до алгебри $\mathfrak{H}(W_2^s(0,1))$. Останнє можна довести, використовуючи теорему 3.6. Справді, беручи до уваги результати п.5, легко довести, що якщо $\varphi \in W_2^s(0,2)$, $(0 < s < 1/2)$, то $F_\varphi \in \mathfrak{H}(W_2^s(0,1))$. Більше того, лінійне відображення

$$W_2^s(0,2) \ni \varphi \to F_\varphi \in \mathfrak{H}(W_2^s(0,1))$$

неперервне. Звідси, беручи до уваги (6.3) і теореми 2.1 та 2.3, легко отримуємо наступне твердження.

Твердження 6.1. *Нехай* $s \in [0, 1/2)$. *Тоді:*

1) *множина* $\mathcal{F}_s$ *скрізь щільна в* $W_2^s(0,2)$;
2) *для кожного* $\varphi \in \mathcal{F}_s$ *оператор* K_φ *належить до алгебри* $\mathfrak{H}(W_2^s(0,1))$;
3) *оператор-функція* $\mathcal{F}_s \ni \varphi \mapsto K_\varphi \in \mathfrak{H}(W_2^s(0,1))$ *локально ліпшицева.*

Отже, якщо $\varphi \in W_2^s(0,2)\,(0 < s < 1/2)$, то $F_\varphi, K_\varphi \in \mathfrak{H}(W_2^s(0,1))$. Звідси, використовуючи рівність (6.4), неважко довести, що $\sigma \in W_2^s(0,1)$ і тому $q \in W_2^{s-1}(0,1)$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Теория вольтеровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. – М.: Наука, 1967.
2. Gohberg I., Goldberg S., Kaashoek M. A. Classes of linear operators, Vol. 2. – Basel; Boston; Berlin: Birkhaser Verlag, 1993.
3. Gohberg I., Goldberg S., Kaashoek M. A. Classes of linear operators, Vol. 1. – Basel; Boston; Berlin: Birkhaser Verlag, 1993.
4. Микитюк Я.В. *Факторизація фредгольмових операторів* // Математичні Студії – 2003. – Т. 20, № 2. – С. 185-199.
5. Халмош П., Сандер В. Ограниченные интегральные операторы в пространствах L^2. – М.: Наука, 1985.
6. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. – М.: Мир, 1972.
7. Марченко В. А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. – К.: Наукова думка, 1977.
8. Левитан Б. М. Обратные задачи Штурма–Лиувилля. – М.: Наука, 1984.
9. Hryniv R. and Mykytyuk Ya. *Inverse spectral problems for Sturm-Liouville operators with singular potentials* // Inverse Problems. – 2003. – V. 19, №3. – P. 665–684.

Львівський національний університет імені Івана Франка

Надійшло 17.08.2003