УДК 519.21

Я. М. Чабанюк

ПРОЦЕДУРА СТОХАСТИЧНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ В ЕРГОДИЧНОМУ СЕРЕДОВИЩІ МАРКОВА

Ya. M. Chabanyuk. *Stochastic approximation procedure in an ergodic Markov environment*, Matematychni Studii, **21** (2004) 81–86.

Sufficient conditions of convergence of continuous stochastic approximation procedure in an averaging scheme in the case when the regression function depends on the external environment described by uniformly ergodic Markov process. These conditions are formulated in e terms of existence of Lyapunov's function for a continuous averaging stochastic approximation procedure.

Я. М. Чабанюк. *Процедура стохастической аппроксимации в эргодической марковской среде* // Математичні Студії. – 2004. – Т.21, №1. – С.81–86.

Получены достаточные условия сходимости непрерывной процедуры стохастической аппроксимации в схеме усреднения в случае, когда функция регрессии зависит от внешней среды, которая описывается равномерно эргодическим марковским процессом. Эти условия формулируются в терминах существования функции Ляпунова для непрерывной усреднённой процедуры стохастической аппроксимации.

1. Вступ. *Процедуру стохастичної апроксимації* (ПСА) запропоновано для знаходження кореня рівняння регресії (див. [1])

$$C(u) = 0, \tag{1}$$

зокрема, у випадку, коли присутні випадкові похибки вимірювань функції регресії $C(u)$, що трактуються як стохастичне збурення у вигляді гаусового білого шуму. У неперервному випадку ПСА розглядається, як стохастичне диференціальне рівняння (див. [1], с.115)

$$du(t) = a(t)[C(u(t))dt + \sigma(u(t))d\xi(t)], \tag{2}$$

де $a(t)$ є нормуючою функцією, що забезпечує збіжність ПСА (2) до розв'язку рівняння регресії (1), а $\xi(t)$ — стандартний білий шум ([1]).

Узагальнюючи цей підхід, природно розглянути ПСА у випадковому середовищі, яке істотно змінює функцію регресії. Проте в умовах ергодичності випадкових збурень можна чекати, що випадкові збурення після усереднення нівелюються так, що ПСА приведе до обчислення кореня рівняння регресії з усередненою ([2]) функцією регресії

$$du(t) = a(t)C(u(t))dt.$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 60J10.

Процедура стохастичної апроксимації у випадковому середовищі розглядається у вигляді стохастичного диференціального рівняння

$$du(t) = a(t)[C(u(t), x(t))dt + \sigma(u(t))dw(t)],$$

де $w(t)$ — стандартний процес Вінера, а $x(t)$ — ергодичний процес Маркова ([2]). Для використання усереднення функції регресії, процес збурень розглядається у схемі серій $x^\varepsilon(t) = x(t/\varepsilon)$ з малим параметром серії $\varepsilon > 0$.

Остаточно, об'єктом дослідження є неперервна ПСА

$$du^\varepsilon(t) = a(t)[C(u^\varepsilon(t), x(t/\varepsilon))dt + \sigma(u^\varepsilon(t))dw(t). \tag{3}$$

Спочатку, в п.2, розглянемо спрощену модель, у якій відсутні додаткові збурення, тобто ПСА (3) з $\sigma(u) \equiv 0$. Основний результат сформульовано в теоремі 1 (п.3). Узагальнення, з $\sigma(u) \neq 0$, розглядається у теоремі 2 (п.3). Детальне доведення теореми 1 подаємо в пп.4–5, а в п.6 — доведення теореми 2.

2. Постановка задачі. Процедура стохастичної апроксимації (ПСА) у ергодичному середовищі Маркова у схемі серій задається еволюційним рівнянням

$$du^\varepsilon(t)/dt = a(t)C(u^\varepsilon(t), x(t/\varepsilon)). \tag{4}$$

Функція регресії $C(u, x) = (C_k(u, x), k \in \{1, \ldots, d\})$, $u \in \mathbb{R}^d$, $x \in X$, задовольняє умови глобального розв'язку еволюційних рівнянь

$$du_x(t)/dt = C(u_x(t), x), \quad x \in X.$$

Рівномірно ергодичний процес Маркова $x(t)$, $t \geq 0$, у вимірному фазовому просторі $(X, \mathbf{X})$ задається генератором

$$Q\varphi(x) = q(x) \int_X P(x, dy)[\varphi(y) - \varphi(x)],$$

де $P(x, B)$, $B \in \mathbf{X}$, — ядро вкладеного ланцюга Маркова, а $q(x)$ — інтенсивність відповідного процесу Маркова ([3]).

Стаціонарний розподіл $\pi(B)$, $B \in \mathbf{X}$, процесу Маркова $x(t)$, $t \geq 0$, задовольняє умови

$$\pi(dx)q(x) = q\rho(dx), \quad q = \int_X \pi(dx)q(x),$$

де стаціонарний розподіл $\rho(dx)$ вкладеного ланцюга Маркова x_n, $n \geq 0$, визначається співвідношеннями

$$\rho(B) = \int_X \rho(dx)P(x, B), \quad B \in \mathbf{X}, \quad \rho(\mathbf{X}) = 1.$$

Відомо [2], що за певних умов розв'язок еволюційного рівняння

$$du_0^\varepsilon(t)/dt = C(u_0^\varepsilon(t), x(t/\varepsilon)), \quad u_0^\varepsilon(0) = u_0,$$

збігається до розв'язку усередненої системи

$$du_0(t)/dt = C(u_0(t)), \quad u_0(0) = u_0, \tag{5}$$

де функція регресії усередненої системи визначається за формулою

$$C(u) = \int_X \pi(dx) C(u, x).$$

Задача полягає в тому, щоб визначити додаткові умови, за яких ПСА (4) збігається до точки рівноваги u_0 усередненої системи (5): $C(u_0) = 0$. Надалі, не зменшуючи загальності, припустимо, що $u_0 = 0$.

Доведення основного результату базується на застосуванні властивості функції Ляпунова для усередненої системи (5), що забезпечує експоненційну стійкість розв'язків системи (5), та використанні розв'язку проблеми сингулярного збурення для генератора Q.

Надалі використовуватимемо такі оператори в банаховому просторі $\mathcal{B}(X)$ функцій $\varphi(x)$: проектор

$$\Pi\varphi(x) := \int_X \pi(dx)\varphi(x),$$

та потенціал R_0 ([3]) марковської напівгрупи, шо визначається за допомогою рівності $R_0 = [Q + \Pi]^{-1} - \Pi$ і задовольняє співвідношення $QR_0 = R_0Q = I - \Pi$.

3. Основні результати.

Теорема 1. *Нехай існує функція Ляпунова $V(u)$, $u \in \mathbb{R}^d$, що забезпечує експоненційну стійкість усередненої системи (5):*

$C1: \quad C(u)V'(u) \le -c_0 V(u), \quad c_0 > 0.$

А також, нехай, при $\tilde{C}(u, x) := C(u) - C(u, x)$, виконуються додаткові умови

$C2: \quad |\tilde{C}(u, x)V'(u)| \le c_1 V(u),$

$C3: \quad |C(u, x)R_0[\tilde{C}(u, x)V'(u)]'| \le c_2 V(u),$

а нормуюча функція $a(t)$, $t \ge 0$, задовольняє звичайні умови збіжності ПСА ([1])

$C4: \quad \int\limits_0^\infty a(t)dt = \infty, \quad \int\limits_0^\infty a^2(t)dt < \infty, \quad a(t) > 0,$

та додаткову оцінку

$C5: \quad a'(t)/a^2(t) \le a < \infty.$

Тоді для кожного початкового значення $u^\varepsilon(0) = u_0 \in \mathbb{R}^d$ і кожного додатного $\varepsilon \le \varepsilon_0$, ε_0 — достатньо мале, ПСА (4) збігається з ймовірністю 1 до точки рівноваги усередненої системи (5)

$$\mathbf{P}\{\lim_{t \to \infty} u^\varepsilon(t) = 0\} = 1. \tag{6}$$

Теорема 2. *За умов $C1$–$C4$ теореми 1 та додаткових умов*

$C5: \quad |\sigma^2(u)V''(u)| \le c_5[1 + V(u)], \quad |\sigma^2(u)R_0[\tilde{C}(u, x)V'(u)]''| \le c_6[1 + V(u)],$

процедура стохастичної апроксимації (3) збігається до точки рівноваги усередненої системи (5), тобто справджується (6).

4. Проблема сингулярного збурення (ПСЗ) ([3]). Стохастичний процес

$$u^\varepsilon(t), \quad x_t^\varepsilon := x(t/\varepsilon), \quad t \geq 0,$$

неоднорідний в часі процес Маркова, генератор якого на банаховому просторі $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times X \times \mathbb{R}_+)$ функцій $\varphi(u, x, t)$ визначається за допомогою рівності

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon \varphi(u, x, t) = \varepsilon^{-1} Q \varphi(u, x, t) + a(t) \boldsymbol{C}(x) \varphi(u, x, t) + \frac{\partial \varphi(u, x, t)}{\partial t}, \tag{7}$$

де

$$\boldsymbol{C}(x) \varphi(u, x, t) = C(u, x) \frac{\partial \varphi(u, x, t)}{\partial u}.$$

ПСЗ для оператора (7) розв'язується за допомогою збуреної функції Ляпунова

$$V^\varepsilon(u, x, t) = V(u) + \varepsilon V_1(u, x, t), \tag{8}$$

що приводить до асимптотичного зображення

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon V^\varepsilon(u, x, t) = a(t) C(u) V'(u) + \varepsilon \theta_t^\varepsilon(x) V(u). \tag{9}$$

Справді, підставляючи (8) в (7), маємо

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon V^\varepsilon(u, x, t) = \varepsilon^{-1} Q V(u) + [Q V_1(u, x, t) + a(t) \boldsymbol{C}(x) V(u)] + \\ + \varepsilon \left[a(t) \boldsymbol{C}(x) V_1(u, x, t) + \frac{\partial \varphi(u, x, t)}{\partial u} \right].$$

Згідно з лемою 3.2 ([3], с. 50), функція збурення $V_1(u, x, t)$ визначається розв'язком рівняння

$$Q V_1(u, x, t) + a(t) \boldsymbol{C}(x) V(u) = \boldsymbol{C}\, V(u),$$

де $\boldsymbol{C}\, V(u) := C(u) V'(u)$. Отже,

$$V_1(u, x, t) = a(t) R_0 \tilde{C}(u, x) V'(u), \tag{10}$$

Тому, залишковий член в (9) має вигляд

$$\theta_t^\varepsilon(x) V(u) = a^2(t) \left[C(u, x) R_0 [\tilde{C}(u, x) V'(u)]' + \frac{a'(t)}{a^2(t)} R_0 \tilde{C}(u, x) V'(u) \right].$$

Зауважимо, що умови $C2$–$C4$ теореми 1 та обмеженість потенціалу R_0 ([4]) дають наступну оцінку залишкового члена

$$|\theta_t^\varepsilon(x) V(u)| \leq a^2(t) c V(u).$$

Висновок 1. Генератор (7) на збуреній функції Ляпунова (8) допускає оцінку

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon V^\varepsilon(u, x, t) \leq -\delta a(t) V(u), \quad \delta > 0. \tag{11}$$

Справді, застосовуючи умову $C1$ теореми 1, маємо

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon V^\varepsilon(u, x, t) \leq -a(t) V(u) [c_0 - \varepsilon a(t) c].$$

Користуючись обмеженістю та монотонністю нормуючої функції $a(t)$, тобто $a(t) \to 0$ $(t \to \infty), a(t) < a$, для фіксованого δ $(0 < \delta < 1)$ маємо $1 - \varepsilon a(t)c \geq \delta$ для кожного $\varepsilon \leq \varepsilon_0 = (1-\delta)/ac$. Отже оцінка (11) правильна для $\varepsilon \leq \varepsilon_0$.

Представлення (10) збурення $V_1(u,x,t)$, та умова $C2$ теореми 1 дають наступний висновок.

Висновок 2. Для кожного $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, ε_0 — достатньо мале, справджуються оцінки

$$b_1 V(u) \leq V^\varepsilon(u,x,t) \leq b_2 V(u) \tag{12}$$

з додатними сталими $0 < b_1 < b_2$.

5. Доведення теореми 1. Тепер можна застосувати підхід Невельсона-Хасмінського [1], користуючись мартингальною характеризацією марковського процесу $u^\varepsilon(t)$, $x_t^\varepsilon := x(t/\varepsilon)$, $t \geq 0$. На збуреній функції Ляпунова (6) маємо

$$V^\varepsilon(u^\varepsilon(t), x_t^\varepsilon, t) - V^\varepsilon(u,x,0) - \int_0^t \mathbf{L}_t^\varepsilon V^\varepsilon(u^\varepsilon(s), x_s^\varepsilon, s) = \mu_t^\varepsilon, \tag{13}$$

тут μ_t^ε, $t \geq 0$, є мартингалом відносно стандартного потоку σ-алгебр $F_t^\varepsilon = \sigma\{u^\varepsilon(s), x_s^\varepsilon, 0 \leq s \leq t\}$, що породжуються траєкторіями процесів $u^\varepsilon(s)$, x_s^ε, $0 \leq s \leq t$, з початковими даними $u^\varepsilon(s) = u$, $x_0^\varepsilon = x$.

Ключова нерівність (11) та оцінка (12) характеризують $V^\varepsilon(u^\varepsilon(t), x_t^\varepsilon, t)$, як невід'ємний супермартингал. Справді, перепишемо (13) в такій формі

$$V^\varepsilon(u^\varepsilon(t), x_t^\varepsilon, t) = V^\varepsilon(u,x,0) + \int_0^t \mathbf{L}_t^\varepsilon V^\varepsilon(u^\varepsilon(s), x_s^\varepsilon, s) + \mu_t^\varepsilon.$$

Тоді, використовуючи нерівність (11) та оцінку (12), маємо

$$0 \leq b_1 E[V(u^\varepsilon(t))|F_0^\varepsilon] \leq E[V^\varepsilon(u^\varepsilon(t), x_t^\varepsilon, t)|F_0^\varepsilon] \leq V^\varepsilon(u,x,0) \leq b_2 V(u).$$

Тому, для кожного $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ існує з ймовірністю 1 скінченна границя

$$\mathbf{P}\left\{\lim_{t\to\infty} V^\varepsilon(u^\varepsilon(t), x_t^\varepsilon, t) = v^\varepsilon\right\} = 1.$$

При цьому випадкова величина v^ε має скінченне математичне сподівання, позаяк

$$E[V^\varepsilon(u^\varepsilon(t), x_t^\varepsilon, t)] \leq V^\varepsilon(u,x,0) \leq b_2 V(u).$$

Отже, $\mathbf{P}\{v^\varepsilon < \infty\} = 1$.

Тепер властивість функції Ляпунова $V(u) \to \infty$, $|u| \to \infty$, дає

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\geq 0} |u^\varepsilon(t)| < \infty\right\} = 1.$$

З іншого боку, нерівність (11) дає також оцінку

$$\delta \int_0^t a(s) V(u^\varepsilon(s)) ds \leq V^\varepsilon(u,x,0) + \mu_t^\varepsilon \leq b_2 V(u) + \mu_t^\varepsilon.$$

Тому,

$$E\int\limits_0^t a(s)V(u^\varepsilon(s))ds \le b_2V(u),$$

а отже з ймовірністю 1 існує скінченна границя інтегралу

$$\mathbf{P}\left\{\int\limits_0^t a(s)V(u^\varepsilon(s))ds < \infty\right\} = 1.$$

Приймаючи до уваги умову $C3$ теореми 1 маємо

Висновок 3.

$$\mathbf{P}\left\{\lim_{t\to\infty} V(u^\varepsilon(t)) = 0\right\} = 1.$$

Нарешті додатність функції Ляпунова $V(u) > 0$, $u \ne 0$, дає твердження теореми 1.

6. Доведення теореми 2 базується на розв'язку ПСЗ для генератора

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon\varphi(u,x,t) = \varepsilon^{-1}Q\varphi(u,x,t) + \mathbf{L}_t\varphi(u,x,t),$$

де

$$\mathbf{L}_t\varphi(u,x,t) = a(t)C(u,x)\frac{\partial\varphi(u,x,t)}{\partial u} + \frac{1}{2}a^2(t)\sigma^2(u)\frac{\partial^2\varphi(u,x,t)}{\partial u^2} + \frac{\partial\varphi(u,x,t)}{\partial t}.$$

ПСЗ на функції (8) має розв'язок

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon V^\varepsilon(u,x,t) = \mathbf{L}_tV(u) + \varepsilon a^2(t)\theta_t^\varepsilon(x)V(u),$$

де

$$\mathbf{L}_tV(u) = a(t)C(u)V'(u) + \frac{1}{2}a^2(t)\sigma^2(u)V''(u),$$

$$\theta_t^\varepsilon(x)V(u) = \frac{a'(t)}{a^2(t)}V_0(u,x) + C(u,x)V_0'(u,x) + a(t)\frac{1}{2}\sigma^2(u)V_0''(u,x),$$

$$V_0(u,x) := \tilde{C}(u,x)V'(u).$$

Далі використовується схема доведення теореми 1 та теорема 4.4.1 ([1], с. 119).

ЛІТЕРАТУРА

1. Невельсон М.Б., Хасминский Р.З. Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание. – М.: Наука, 1972. – 304 с.
2. Королюк В.С., Турбин А.Ф. Полумарковские процессы и их применение. – Киев: Наук. думка, 1976. – 184 с.
3. Королюк В.С. Стохастичні моделі систем. – К.: Либідь, 1993. – 137 с.
4. Королюк В.С. *Стійкість стохастичних систем у схемі дифузійної апроксимації* // Укр. мат. журн. – 1998. – Т.50, №1. – С.36–47.

Національний університет ”Львівська Політехніка”

Надійшло 4.11.2003