УДК 517.5

О. Б. Скасків*, О. В. Зрум

ПРО ВИНЯТКОВУ МНОЖИНУ У НЕРІВНОСТЯХ ТИПУ ВІМАНА ДЛЯ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ

O. B. Skaskiv, O. V. Zrum. *On an exceptional set in the Wiman inequalities for entire functions*, Matematychni Studii, **21** (2004) 13–24.

We show that the estimate $\int_E \frac{\ln^{1/2}\mu_f(r)}{r}dr < +\infty$ of an exceptional set E in the Wiman's inequality $M_f(r) < \mu_f(r)\ln^{1/2+\varepsilon}\mu_f(r)$ is fulfilled almost surely, where $M_f(r)$ is the maximum modulus of an entire function f on the circle $\{z : \ |z| = r\}$ and $\mu_f(r)$ is the maximal term of its Taylor expansion.

О. Б. Скаскив, О. В. Зрум. *Об исключительном множестве в неравенствах типа Вимана для целых функций* // Математичні Студії. – 2004. – Т.21, №1. – С.13–24.

Доказано, что исключительное множество E тех $r > 0$, для которых неравенство Вимана $M_f(r) < \mu_f(r)\ln^{1/2+\varepsilon}\mu_f(r)$ не выполняется, почти наверное удовлетворяет условию $\int_E \frac{\ln^{1/2}\mu_f(r)}{r}dr < +\infty$, где $M_f(r)$ — максимум модуля целой функции f на окружности $\{z : \ |z| = r\}$, а $\mu_f(r)$ — максимальный член ее степенного разложения.

1. Вступ і формулювання результатів. Нехай для цілої функції

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{1}$$

$M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$ і $\mu_f(r) = \max\{|a_n|r^n : n \geq 0\}$, $r > 0$, відповідно її максимум модуля і максимальний член. Через $K(f, Z)$ позначимо клас функцій вигляду

$$f(Z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n Z_n(t) z^n,$$

де $Z = \{Z_n(t)\}$ — послідовність випадкових величин заданих на ймовірнісному просторі Штейнгауза $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$. Тут $\Omega = [0; 1]$, $\mathcal{A}$ — σ-алгебра вимірних за Лебегом підмножин Ω, $\mathcal{P}$-міра Лебега на прямій. Математичне сподівання і дисперсія випадкової величини $Z_n = X_n + iY_n$ обчислюються відповідно за формулами:

$$\mathrm{M}\, Z_n = \int_\Omega X_n\, \mathrm{P}(dt) + i\int_\Omega Y_n\, \mathrm{P}(dt), \quad \mathrm{D}\, Z_n = \mathrm{M}(|Z_n - \mathrm{M}\, Z_n|^2).$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 30B20, 30D20.

*Перший автор був частково підтриманий INTAS, проект 99-00089.

Будемо говорити, що деяка властивість виконується *для майже всіх функцій з класу* $K(f,Z)$ (або, що одне і те ж, *майже напевне в* $K(f,Z)$), якщо Лебегова міра тих $t \in [0;1]$, при яких $f(z,t)$ володіє цією властивістю, дорівнює одиниці. Позначимо $M_f(r,t) = \max\{|f(z,t)| : |z| = r\}$.

Добре відомо [1], що класична нерівність Вімана

$$M_f(r) < \mu_f(r) \ln^{1/2+\varepsilon} \mu_f(r) \tag{2}$$

виконується для кожної цілої функції f і для довільного $\varepsilon > 0$, для всіх $r \in (r_0; \infty) \setminus E_1(f)$, де $r_0 = r_0(\varepsilon, f)$, а $E_1(f) \equiv E_1$ — множина скінченної логарифмічної міри, тобто

$$\text{ln-meas } E_1 = \int_{E_1 \cap [1;+\infty)} d(\ln r) < +\infty.$$

Нехай H — клас неперервних додатних зростаючих до $+\infty$ на $[0;+\infty]$ функцій. Наступна теорема з [2] доповнює твердження з [1] про нерівність Вімана.

Теорема A [2]. *Нехай функція* $h \in H$ *така, що* $h(r) \leq (\ln r)^{1/2}$ $(r > 2)$. *Тоді для кожної цілої функції* f *і для кожного* $\varepsilon > 0$ *нерівність*

$$M_f(r) \leq \mu_f(r) (\ln \mu_f(r))^{1/2+\varepsilon} \ln^{1/2} r$$

виконується для всіх $r \in [1; \infty) \setminus E_2(\varepsilon, f)$, *де множина* $E_2(\varepsilon, f) \equiv E_2$ *така, що*

$$h\text{-meas } E_2 = \int_{E_2 \cap [1;+\infty)} \frac{h(r)}{r} dr < +\infty.$$

З отриманої для цілих рядів Діріхле в [3] теореми 2 випливає, що за умов $h \in H$ і

$$\limsup_{r \to +\infty} \frac{\ln h(r)}{\ln \ln \mu_f(r) - \ln \ln r} = q < +\infty$$

нерівність $M_f(r) \leq \mu_f(r) (h(r) \ln \mu_f(r))^{p+\varepsilon}$, $p = (q+1)/2$, виконується для кожного $\varepsilon > 0$ і для всіх $r \geq 1$ зовні деякої множини $E = E(\varepsilon, f)$ скінченної h-міри, тобто h-meas $E < +\infty$.

Ми доведемо наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай* f *— ціла функція. Якщо* $h \in H$ *така, що* $\ln^+ \ln^+ h(r) = o(\ln \ln \mu_f(r))$ $(r \to +\infty)$, *то для кожного* $\varepsilon > 0$ *нерівність*

$$M_f(r) \leq h(r) \mu_f(r) (\ln \mu_f(r))^{1/2+\varepsilon} \tag{3}$$

виконується для всіх $r \in [1; +\infty) \setminus E_3(\varepsilon, f, h)$, *де множина* $E_3(\varepsilon, f, h) \equiv E_3$ *така, що* h*-meas* $E_3 < +\infty$. *Якщо ж* $\ln h(r) = (\ln \mu_f(r))^a$, $a > 0$, *то для кожного* $\varepsilon > 0$ *нерівність*

$$M_f(r) \leq h(r) \mu_f(r) (\ln \mu_f(r))^{1/2+1/2 \max\{1,a\}+\varepsilon}$$

виконується для всіх $r \in [1; +\infty) \setminus E_3^*(\varepsilon, f, h)$, *де множина* $E_3^*(\varepsilon, f, h) \equiv E_3^*$ *така, що* h*-meas* $E_3^* < +\infty$.

Зауважимо, що для функції $f(z) = e^z$ виконується рівність

$$\lim_{r\to\infty} \frac{M_f(r)}{\mu_f(r)(\ln\mu_f(r))^{1/2}} = \sqrt{2\pi} \tag{4}$$

і, отже, в нерівності (2) сталу $1/2$ замінити меншим числом, взагалі кажучи, не можна. Але, як це видно з результатів роботи П. Ердеша й А. Реньї [4], властивість функції $f(z) = e^z$ не є типовою в класі всіх цілих функцій.

Теорема Б [4]. *Нехай $f(z)$ — ціла функція вигляду (1). Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ майже напевне в $K(f,R)$ і $K(f,H)$, де R — послідовність незалежних випадкових величин, що приймають значення $+1$ і -1 з однаковими ймовірностями $1/2$, а $H = \{e^{2\pi i\omega_n}\}$, де $\{\omega_n\}$ — послідовність незалежних рівномірно розподілених на [0;1] випадкових величин, для всіх $r \in [1;+\infty) \setminus E(\varepsilon,t) < +\infty$, де множина $E(\varepsilon,f,t) \equiv E(t)$ така, що h-meas $E(t) < +\infty$, виконується нерівність*

$$M_f(r,t) \le \mu_f(r)(\ln\mu_f(r))^{1/4}(\ln\ln\mu_f(r))^{1+\varepsilon}. \tag{5}$$

Зауважимо, що, як це вказано в [4], показник $1/4$ в нерівності (5) замінити меншим числом, взагалі кажучи, не можна. Це випливає з наступної теореми.

Теорема В [4]. *Якщо $f(z) = e^z$, то для довільного $\varepsilon > 0$ майже напевне в $K(f,R)$ і $K(f,H)$ справедлива рівність*

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{M_f(r)}{\mu_f(r)(\ln\mu_f(r))^{1/4-\varepsilon}} = +\infty.$$

Обидві послідовності Z з теорем Б і В ($Z = R, H$) мають такі властивості: (a) $|Z_n| = 1$ $(n \ge 0)$ для майже всіх t; (b) (Z_n) — послідовність незалежних випадкових величин; (c) $\mathrm{M}\, Z_n = 0$ $(n \ge 0)$.

Для довільної послідовності (Z_n) умова (a) забезпечує для майже всіх функцій з класу $K(f,Z)$ один і той самий максимальний член, що вказує на природність її присутності.

П. В. Філевич [5] поширив ці результати П. Ердеша і А. Реньї на випадок класів $K(f,Z)$ за довільною мультиплікативною системою Z.

Послідовність дійсних випадкових величин називається *мультиплікативною системою* (МС), якщо для довільних $k \ge 1$ та $1 \le i_1 < i_2 < ... < i_k$

$$\mathrm{M}(X_{i_1}X_{i_2}...X_{i_k}) = 0.$$

Комплексна послідовність $Z_n = X_n + iY_n$ випадкових величин називається мультиплікативною системою (МС), якщо $X = (X_n)$ і $Y = (Y_n)$ є МС.

У [5] доведено наступну теорему.

Теорема Г [5]. *Нехай Z є МС і $|Z_n| = 1$ $(n \ge 0)$ для майже всіх $t \in [0;1]$. Тоді для того, щоб для всіх функцій $f(z)$ вигляду (1) при $\varepsilon > 0$ майже напевне в $K(f,Z)$ виконувалась для $r \in (1;\infty)\setminus E(\varepsilon,t)$ нерівність $M_f(r,t) \le \mu_f(r)(\ln\mu_f(r))^{\alpha}(\ln\ln\mu_f(r))^{1+\varepsilon}$, де ln-meas $E(\varepsilon,t) < +\infty$, необхідно і досить, щоб $\alpha \ge 1/4$.*

Метою цієї статті є встановити теорему 1, а також встановити твердження, подібне до теореми Г стосовно нерівності (3), справедливої зовні деякої множини E скінченної

h-міри. Як наслідок, з теореми 2 зокрема отримаємо, що у випадку цілих випадкових функцій опис виняткової множини у нерівності Вімана можна істотно (у порівнянні з існуючим описання виняткової множини в класі всіх цілих функцій) покращити. Відзначимо, що схема доведень обидвох теорем в даний час є добре відомою (див. [2–8]).

Теорема 2. *Нехай f ціла функція і $h \in H$ така, що $\ln^+ \ln^+ h(r) = o(\ln\ln \mu_f(r))$ $(r \to +\infty)$. Нехай Z є МС і $|Z_n| \le 1$ для майже всіх $t \in [0;1]$. Тоді майже напевне в $K(f,Z)$ існує множина $E(\varepsilon,t)$ скінченної h-міри, що для всіх $r \in (1;+\infty) \setminus E(\varepsilon,t)$ є правильною нерівність*

$$M_f(r,t) \le \sqrt{h(r)}\mu_f(r)(\ln \mu_f(r))^{1/4+\varepsilon}.$$

2. Доведення теореми 1. Нехай $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| e^{nx}$, $g_1(x) = \ln g(x)$. Як і в [3, 7], при фіксованому $x \in \mathbb{R}$ за нерівністю Чебишова отримуємо

$$g(x) \le 2 \sum_{|n-g_1'(x)|<\sqrt{2g_1''(x)}} |a_n| e^{xn}. \tag{6}$$

Із нерівності (6), зокрема, при $x = \ln r$ маємо

$$g(\ln r) \le 2\mu_f(r) \sum_{|n-g_1'(x)|<\sqrt{2g_1''(x)}} 1.$$

Оскільки нерівність $|n - g_1'(x)| < \sqrt{2g_1''(x)}$ рівносильна до системи нерівностей

$$g_1'(x) - \sqrt{2g_1''(x)} < n < g_1'(x) + \sqrt{2g_1''(x)},$$

то

$$\sum_{|n-g_1'(x)|<\sqrt{2g_1''(x)}} 1 = [g_1'(x) + \sqrt{2g_1''(x)}] - [g_1'(x) - \sqrt{2g_1''(x)}] \le 2\sqrt{2g_1''(x)} + 1.$$

Тобто, при $x = \ln r$

$$g(\ln r) \le 2\mu_f(r)(2\sqrt{2g_1{}''(x)} + 1). \tag{7}$$

Нехай для $\varepsilon_1 > 0$ і $\varepsilon_2 > 0$

$$E_1 = \{x > 0 : g_1{}''(x) > h_0(x) g_1{}'(x)(\ln g_1{}'(x))^{1+\varepsilon_1},\ g_1{}'(x) \ge 2\},$$

$$E_2 = \{x > 0 : g_1'(x) > h_0(x)(g_1(x))^{1+\varepsilon_2},\ g_1(x) \ge 1\},$$

де $h_0(x) = h(e^x)$. Тоді

$$\int_{E_1} h_0(x)\, dx \le \int_{E_1} \frac{g_1''(x)}{g_1'(x)(\ln g_1'(x))^{1+\varepsilon_1}}\, dx \le \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)^{1+\varepsilon_1}} < +\infty,$$

$$\int_{E_2} h_0(x) dx \le \int_{E_2} \frac{g_1{}'(x)}{(g_1(x))^{1+\varepsilon_2}} dx \le \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{1+\varepsilon_2}} dx < +\infty.$$

Отже,

$$\int_{E_1\cup E_2} h_0(x)dx < +\infty. \tag{8}$$

Тому при $r \notin E$, де E — образ множини $E_1 \cup E_2$ при відображенні $r = e^x$, з (7), отримаємо

$$g(\ln r) \le 2\mu_f(r)\Big(2\sqrt{2}h(r)\big(g_1(\ln r)\big)^{(1+\varepsilon_2)/2}\Big(\ln\Big(h(r)\big(g_1(\ln r)\big)^{1+\varepsilon_2}\Big)\Big)^{(1+\varepsilon_1)/2} + 1\Big). \tag{9}$$

Враховуючи, що за умовою $\ln h(r) < (\ln \mu_f(r))^\delta$ $(r \ge r_0(\delta))$ для всіх $\delta > 0$, а також, що $\ln \mu_f(r) \le g_1(\ln r)$, при $r \to +\infty$ маємо

$$\Big(\ln\Big(h(r)(g_1(\ln r))^{1+\varepsilon_2}\Big)\Big)^{(1+\varepsilon_1)/2} \le \big((\ln \mu_f(r))^\delta + (1+\varepsilon_2)\ln g_1(\ln r)\big)^{(1+\varepsilon_1)/2} \le$$

$$\le \big(\big(g_1(\ln r)\big)^\delta + (1+\epsilon_2)\ln g_1(\ln r))\big)^{(1+\varepsilon_1)/2} = \big(1+o(1)\big)\big(g_1(\ln r)\big)^{\delta(1+\varepsilon_1)/2}.$$

Звідси та з (9) при $r \to +\infty$ $(r \notin E)$ отримуємо

$$g(\ln r) \le 4\sqrt{2}\mu_f(r)h(r)\big(g_1(\ln r)\big)^{(1+\varepsilon)/2}, \tag{10}$$

де $\varepsilon = \varepsilon_2 + \delta(1+\varepsilon_1)$. Зауважимо, що для функції $\psi(x) = x(\ln x)^{-(1+\varepsilon)/2}$ обернена функція до неї $\psi^{-1}(x) \sim x(\ln x)^{(1+\varepsilon)/2}$ $(x \to +\infty)$. Тому з (10) отримуємо послідовно при $r \to +\infty$ $(r \notin E)$

$$\psi(g(\ln r)) \le \mu_f(r)h(r),$$

та, враховуючи, що $\ln h(r) = o(\ln \mu_f(r))$ $(r \to +\infty)$, $M_f(r) \le g(\ln r)$,

$$M_f(r) \le \psi^{-1}(\mu_f(r)h(r)) \le (1+o(1))\mu_f(r)h(r)(\ln(\mu_f(r)h(r)))^{(1+\varepsilon)/2} \le$$

$$\le (1+o(1))\mu_f(r)h(r)(\ln \mu_f(r))^{(1+\varepsilon)/2}.$$

Тобто, нерівність (3) доведено при $r \to +\infty$ $(r \notin E)$. Залишається зауважити, що з (8) випливає

$$h\text{-meas } E = \int_{E\cap[1;+\infty)} \frac{h(r)}{r}dr = \int_{(E_1\cup E_2)\cap[0;+\infty)} h_0(x)dx < +\infty.$$

Доведення другого твердження здійснюється повністю подібно. Теорему 1 доведено.

Зауважимо, що у випадках, коли функція h зростає швидше, ніж у випадках відзначених у теоремі 1, то множник $h(r)$ у нерівності типу Вімана стає порівняльним за величиною з добутком інших множників або значно більшим. Наприклад, у випадку $h(r) \le a\mu_f(r)$, $a > 0$, зовні множини скінченної h-міри виконується нерівність $M_f(r) \le h(r)(\mu_f(r))^{3/2+\varepsilon}$.

Відзначимо також наступне твердження, яке безпосередньо випливає з теореми 1.

Твердження. *Нехай f — ціла функція. Якщо $h \in H$ така, що $\ln^+ h(r) = o(\ln\ln \mu_f(r))$ $(r \to +\infty)$, то для кожного $\varepsilon > 0$ нерівність (2) виконується для всіх $r \in [1;+\infty) \setminus E(\varepsilon, f, h)$, де множина $E(\varepsilon, f, h) \equiv E$ така, що h-meas $E < +\infty$.*

З побудованого в [2] прикладу цілої функції (див. також далі п.5) випливає, що наведений у цьому твердженні опис виняткової множини для фіксованої цілої функції f істотно покращити не можна. Власне, для побудованої в [2] цілої функції h-meas $E = +\infty$ з $\ln h(r) = b \ln\ln \mu_f(r)$ і $b > 1/2$, де E виняткова множина у нерівності Вімана (2).

3. Допоміжні твердження. У цьому пункті наведемо леми, потрібні для доведення теореми 2.

Лема 1 [8]. *Нехай $g_1(x)$ — додатна, диференційовна, неспадна на $[0;+\infty)$ функція, $\psi(x)$ — додатна, неперервна, зростаюча на $[0;+\infty)$ функція така, що $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\psi(x)} < +\infty$, а $h_0(x)$ — додатна, локально інтегровна на $[0;+\infty)$ функція така, що $\int_0^{+\infty} h_0(x)\, dx = +\infty$. Тоді існує множина $E_0 \subset [0;+\infty)$ така, що $\int_{E_0} h_0(x)\, dx < +\infty$ і для всіх $x \in [0;+\infty) \setminus E_0$*

$$g_1'(x) \le h_0(x)\psi(g_1(x)).$$

Зауважимо, що у доведенні теореми 1 фактично встановлено справедливість цього твердження з функцією $\psi(x) = x(\ln x)^{1+\varepsilon}$.

Нехай $\Omega_f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$, $g_0(r) = \ln \Omega_f(r)$. Позаяк

$$g(x) = \Omega_f(e^x), \quad g_1(x) = g_0(e^x),$$

$$g_1'(x) = e^x g_0'(x) = \frac{d}{d\ln r} g_0(r), \quad g_1''(x) = \frac{d^2}{(d\ln r)^2} g_0(r)$$

при $r = e^x$, то з леми 1 отримуємо наступні твердження.

Лема 2. *Нехай ψ — функція така, як в лемі 1, а h — додатна, неперервна на $[0;+\infty)$ функція така, що $\int_0^{+\infty} x^{-1} h(x) dx = +\infty$. Тоді існує множина $E \subset [1;+\infty)$ скінченної h-міри (тобто h-meas $E < +\infty$) така, що для всіх $r \in [1;+\infty) \setminus E$*

$$\frac{d}{d\ln r} g_0(r) \le h(r)\psi(g_0(r)).$$

Доведення. Лема 2 з огляду на зроблені зауваження випливає з леми 1, якщо застосувати заміну $r = e^x$ і вибрати $h_0(x) = h(e^x)$. □

З леми 2 негайно маємо наступну лему.

Лема 3. *Нехай ψ і h — функції такі, як в лемі 2. Тоді існує множина E (h-meas $E < +\infty$) така, що для всіх $r \in [1;+\infty) \setminus E$*

$$\frac{d^2 g_0(r)}{(d\ln r)^2} \le h(r)\psi\Big(\frac{d}{d\ln r} g_0(r)\Big).$$

Доведення. Досить застосувати лему 1 з $g_1(x) = \dfrac{dg_0(r)}{d\ln r}$ при $r = e^x$, $h_0(x) = h(e^x)$. □

З лем 2 і 3 випливає наступна лема.

Лема 4. *Нехай ψ_1 і ψ_2 — такі, як функція ψ в лемі 1, а h — функція така, як у лемі 2. Тоді існує множина $E \subset [1;+\infty)$ (h-meas $E < +\infty$) така, що для всіх $r \in [1;+\infty) \setminus E$*

$$\frac{d^2 g_0(r)}{(d\ln r)^2} \le h(r)\psi_2\Big(h(r)\psi_1\big(g_0(r)\big)\Big).$$

Доведення. Нехай E_1 — множина з леми 2, а E_2 — множина з леми 3; $E = E_1 \cup E_2$. Тоді h-meas $E \le h$-meas $E_1 + h$-meas $E_2 < +\infty$. І отже, для $r \notin E$ послідовно маємо

$$\frac{d^2 g_0(r)}{(d\ln r)^2} \le h(r)\psi_2\Big(\frac{d(g_0(r))}{d\ln r}\Big) \le h(r)\psi_2\Big(h(r)\psi_1\big(g_0(r)\big)\Big).$$

□

Визначимо тепер

$$A(r) = \frac{d}{d\ln r} g_0(r), \quad B(r) = \Big(\frac{d^2}{(d\ln r)^2} g_0(r)\Big)^{1/2}.$$

Зауважимо, що

$$A(r) = r\frac{d}{dr} g_0(r) = \frac{1}{\Omega_f(r)} \sum_{n=0}^{+\infty} n|a_n|r^n,$$

$$B^2(r) = r\frac{d}{dr}(r\frac{d}{dr} g_0(r)) = \frac{1}{\Omega_f(r)} \sum_{n=0}^{+\infty} n^2|a_n|r^n - (A(r))^2.$$

Як і при доведенні теореми 1 з лем 2–4 отримуємо наступне твердження.

Лема 5. *Нехай $h(r)$ — функція така, як в лемі 2. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ існує множина E, h-meas $E < +\infty$, така, що для всіх $r \in [1; +\infty) \setminus E$*

$$A(r) \le h(r)\ln\mu_f(r)(\ln\ln\mu_f(r))^{1+\varepsilon},$$

$$B^2(r) \le (h(r))^2 \ln\mu_f(r)(\ln\ln\mu_f(r))^{2+\varepsilon}\max\{1; (\ln h(r)/\ln\ln\mu_f(r))^{1+\varepsilon/2}\},$$

як тільки виконується умова $\ln^+\ln^+ h(r) = o(\ln\ln\mu_f(r))$ $(r \to +\infty)$.

Доведення. Вибираючи в лемах 2 і 4 $\psi_2(x) = x(\ln x)^{1+\varepsilon_2}$, $\psi_1(x) = x(\ln x)^{1+\varepsilon_1}$ та застосовуючи умову на $h(r)$, послідовно для $(r \notin E_1, h\text{-meas } E_1 < +\infty)$ маємо

$$A(r) \le h(r)\psi_1(g_0(r)) = h(r)g_0(r)(\ln g_0(r))^{1+\varepsilon_1}, \tag{11}$$

та подібно, як у доведенні теореми 1

$$\begin{aligned} B^2(r) &\le h(r)\psi_2\Big(h(r)\psi_1\big(g_0(r)\big)\Big) \le h^2(r)\psi_1\big(g_0(r)\big)\Big(\ln\big(h(r)\psi_1\big(g_0(r)\big)\big)\Big)^{1+\varepsilon_2} \le \\ &\le h^2(r)g_0(r)(\ln g_0(r))^{1+\epsilon_1}\Big(\max\{(\ln\mu_f(r))^{\delta}, \ln g_0(r)\}\Big)^{1+\varepsilon_2}(1+o(1)), \end{aligned} \tag{12}$$

позаяк $\ln h(r) \le (\ln\mu_f(r))^{\delta}$ для довільного $\delta > 0$ і для всіх досить великих r. Скористаємось тепер твердженням теореми 1. З умови на функцію h випливає, що $\ln h(r) = o(\ln\mu_f(r))$ $(r \to +\infty)$, тому при $r \to +\infty$ $(r \notin E_2$, h-meas $E_2 < +\infty)$

$$g_0(r) = \ln\Omega_f(r) \le (1+o(1))\ln\mu_f(r).$$

Звідси та з (11), при $r \to +\infty$ $(r \notin E$, h-meas$(E_1 \cup E_2) < +\infty)$ отримаємо першу нерівність з леми 5. Та подібно з (12) зовні деякої множини скінченної h-міри

$$B^2(r) \le h^2(r)(1+o(1))\ln\mu_f(r)(\ln\ln\mu_f(r))^{1+\varepsilon_1}\times$$

$$\times\Big(\max\{\ln h(r); (1+o(1))\ln\ln\mu_f(r)\}\Big)^{1+\varepsilon_2}.$$

Звідки, вибираючи $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon/2$, $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon/2$, маємо твердження леми 5. □

Наступну лему елементарно отримуємо з нерівності Чебишова (див. також [6]).

Лема 6 [6]. *Для всіх* $r > 0$

$$\Omega_f(r) \le 3/2(2\sqrt{3}B(r)+1)\mu_f(r).$$

Лема 7. *Нехай виконуються умови леми 5. Тоді для всіх* $r \in [1;+\infty) \setminus E$ $(h\text{-meas } E < +\infty)$

$$h(r)A(r) \ge \frac{B^2(r)}{3\hat{h}(r)(\ln \hat{h}(r))^{1+\varepsilon}},$$

де $\hat{h}(r) = \max\{\ln\ln \mu_f(r), \ln h(r)\}$, $\varepsilon > 0$ *— довільне.*

Доведення. Оскільки за лемою 3 при $r \notin E_1$ (h-meas $E_1 < +\infty$)

$$B^2(r) \equiv \frac{d^2}{(d\ln r)^2} g_0(r) \le h(r)\psi(A(r)). \tag{13}$$

Нехай $\psi(x)$ функція обернена до функції

$$\Psi_0(x) = \frac{x}{\ln x(\ln\ln x)^{1+\varepsilon}}, \quad \varepsilon > 0.$$

За лемою 5 і за умовою $\ln^+ \ln h(r) = o(\ln\ln \mu_f(r))$ $(r \to +\infty)$ при $r \to +\infty$ ($r \notin E$, h-meas $E_2 < +\infty$) отримуємо

$$\ln \frac{B^2(r)}{h^2(r)} \le (1+o(1))\ln\ln \mu_f(r), \quad \ln^+ \ln \frac{B^2(r)}{h(r)} \le (1+o(1))\hat{h}(r).$$

Звідки і з (13) при $r \to +\infty$ ($r \notin E_1 \cup E_2$) отримуємо

$$h(r)A(r) \ge h(r)\Psi_0\Big(\frac{B^2(r)}{h(r)}\Big) \ge \frac{B^2(r)}{3\hat{h}(r)(\ln \hat{h}(r))^{1+\varepsilon}}.$$

□

У [5] по-суті доведено наступне твердження (лема 5 [5]).

Лема 8. *Нехай* $l(r)$ *— неперервна, зростаюча до* $+\infty$ *на* $(1;+\infty)$ *функція, а* $E \subset (1;+\infty)$ *множина така, що її доповнення містить відкриту необмежену множину. Тоді існує нескінченна послідовність* $1 < r_1 \le ... \le r_n \to +\infty$ $(n \to +\infty)$ *така, що:*

(1) $(\forall n \in \mathbb{N}):\ r_n \notin E$;

(2) $(\forall n \in \mathbb{N}):\ \ln l(r_n) \ge \frac{n}{2}$;

(3) якщо $(r_n; r_{n+1}) \cap E \ne (r_n, r_{n+1})$, *то* $l(r_{n+1}) \le el(r_n)$;

(4) множина тих індексів, для яких виконується твердження п.(3), є необмеженою.

Лема 9 (лема 4 [5]). *Нехай X є МС, яка рівномірно обмежена числом 1. Тоді для кожної послідовності комплексних чисел (b_k) і для кожного $\beta > 0$*

$$\mathrm{P}\left(\max_{0\le\psi\le 2\pi}\left|\sum_{k=0}^{N} b_k e^{ik\psi} X_k(t)\right| \ge A_\beta S_N \ln^{1/2} N\right) \le \frac{1}{N^\beta},\ N \ge 2,$$

де A_β — стала, залежна лише від β, а $S_N^2 = \sum_{k=0}^{N} |b_k|^2$.

4. Доведення теореми 2. Наступне доведення повторює схему доведення відповідних теорем з [4, 5]. Розглянемо випадкову величину ξ з розподілом ймовірностей $\mathrm{P}\{\xi = n\} = |a_n| r^n / \Omega_f(r)$. Легко перевірити, що (див. [2, 3, 6–8]) математичне сподівання $\mathrm{M}\,\xi = A(r)$, а дисперсія $\mathrm{D}\,\xi = B^2(r)$. Нехай $C(r) = A(r) h(r) \ln \mu_f(r)$. За нерівністю Маркова

$$\sum_{n\ge C(r)} \frac{|a_n| r^n}{\Omega_f(r)} = \mathrm{P}\{\xi \ge C(r)\} \le \frac{\mathrm{M}\,\xi}{C(r)} = \frac{A(r)}{C(r)} = \frac{1}{h(r)\ln\mu_f(r)}. \tag{14}$$

Нехай E^* — множина скінченної h-міри, зовні якої виконуються нерівності з наведених вище лем, твердження ми яких ми користуватимемось, а також нерівність (3). За лемою 5 при $r \to +\infty$ $(r \notin E^*)$, позаяк $\ln h(r) \le \ln^\delta \mu_f(r)$ для будь-якого $\delta > 0$ і для всіх досить великих r, отримуємо $B^2(r) \le h^2(r) \ln^{5/4} \mu_f(r)$, тому з (14) за лемою 6 при $r \to +\infty$ $(r \notin E^*)$ маємо

$$\sum_{n\ge C(r)} |a_n| r^n \le \frac{\Omega_f(r)}{h(r)\ln\mu_f(r)} \le \frac{(3\sqrt{3} + o(1))\mu_f(r)}{\ln^{3/8}\mu_f(r)} \le o(\mu_f(r)) \le \mu_f(r).$$

За лемою 5 при $r \to +\infty$ $(r \notin E^*)$

$$C(r) = h(r) A(r) \ln \mu_f(r) \le h^2(r) \ln^2 \mu_f(r) (\ln\ln\mu_f(r))^{1+\varepsilon} \le$$

$$\le h^2(r) \ln^{2+\varepsilon} \mu_f(r) \overset{def}{=} C_1(r),$$

де $\varepsilon > 0$ — досить мале. Тоді, при $r \to +\infty$ $(r \notin E^*)$ для $\tilde{C}_1(r) = \max\{C_1(r), \ln^3 \mu_f(r)\}$, маємо

$$\sum_{n\ge \tilde{C}_1(r)} |a_n| r^n \le \sum_{n\ge C(r)} |a_n| r^n \le \mu_f(r).$$

Виберемо тепер у лемі 8

$$l(r) = \mu_f(r) \sqrt{h(r)} \ln^{\frac14 + \frac67 \varepsilon} \mu_f(r),\ E = E^*.$$

Якщо (r_k) — послідовність з леми 8, то нехай F_k — множина тих $t \in [0; 1]$, для яких

$$\max\left\{\Big|\sum_{n\le[\tilde{C}_1(r_k)]} a_n r^n e^{in\psi} X_n(t)\Big| :\ 0 \le \psi \le 2\pi\right\} \ge A_\beta S_{[\tilde{C}_1(r_k)]}(r_k) \ln^{1/2}[\tilde{C}_1(r_k)],$$

де символ $[a]$ означає цілу частину числа a. Зауважимо тепер, що $\ln l(r) \le \ln^{3/2} \mu_f(r)$ для всіх досить великих r, тому $\tilde{C}_1(r) \ge \ln^3 \mu_f(r) \ge \ln^2 l(r)$ і $\tilde{C}_1(r_n) \ge (n/2)^2$ для всіх досить великих n. Тому, скориставшись лемою 8 з $\beta = 1$, маємо

$$\sum_{k=k_0}^{+\infty} \mathrm{P}(F_k) \le \sum_{k=k_0}^{+\infty} \frac{1}{[\tilde{C}_1(r_k)]} \le \sum_{k=k_0}^{+\infty} \frac{1}{([k/2])^2} < +\infty.$$

Звідси, за лемою Бореля-Кантелі отримаємо, що серед подій F_k з ймовірністю, що дорівнює одиниці, відбувається лише скінченна кількість подій. Нехай F подія, яка полягає в тому що, серед подій F_k відбувається нескінченна кількість подій. Тоді, $F = \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{+\infty} F_k$ і за лемою Бореля-Кантелі $\mathrm{P}(\overline{F}) = 1$. Зауважимо, що $\overline{F} = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} \bigcap\limits_{k=n}^{+\infty} F_k$ і $\mathrm{P}\left([0;1] \setminus \overline{F}\right) = 0$. Тобто, для майже всіх $t \in [0;1]$ маємо $t \in \overline{F}$, тому існує таке $k_0(t)$, що $t \in \bigcap_{k=k_0(t)}^{+\infty} \overline{F_k}$, звідки, для всіх $k \geq k_0(t)$ отримуємо $t \in \overline{F_k}$. Отже, для майже всіх $t \in [0;1]$ при $k \geq k_0(t)$

$$W(r_k) \stackrel{\text{def}}{=} \max\left\{\Big| \sum_{n \leq [\tilde{C}_1(r_k)]} a_n r^n e^{in\psi} X_n(t)\Big| :\ 0 \leq \psi \leq 2\pi\right\} \leq A_1 S_{[\tilde{C}_1(r_k)]}(r_k) \ln^{1/2}[\tilde{C}_1(r_k)].$$

Оскільки

$$S_N^2(r) = \sum_{k=0}^{N} |a_k|^2 r^{2k} \leq \mu_f(r) \sum_{k=0}^{N} |a_k| r^k \leq \mu_f(r)\Omega_f(r),$$

то, враховуючи нерівність (3), отримуємо

$$W(r_k) \leq A_1\big(\mu_f(r_k)\Omega_f(r_k)\big)^{1/2} \ln^{1/2} \widetilde{C_1}(r_k) \leq$$

$$\leq A_1 \mu_f(r_k)\sqrt{h(r_k)} \ln^{1/4+\varepsilon/2} \mu_f(r_k) \ln^{1/2} \widetilde{C_1}(r_k).$$

Зауважимо, що для довільного досить малого $\delta > 0$

$$\ln \widetilde{C_1}(r) = \max\{2\ln h(r) + (2+\varepsilon)\ln\ln \mu_f(r), 3\ln\ln \mu_f(r)\} \leq$$

$$\leq \max\{2\ln^\delta \mu_f(r) + (2+\varepsilon)\ln\ln \mu_f(r), 3\ln\ln \mu_f(r)\} \leq \ln^{2\delta} \mu_f(r) \quad (r \to +\infty).$$

Вибираючи $\delta < \frac{\varepsilon}{6}$, отримуємо при $k \to +\infty$

$$W(r_k) \leq A_1 \mu_f(r_k)\sqrt{h(r_k)} \ln^{\frac14 + \frac{2\varepsilon}{3}} \mu_f(r_k) \leq \sqrt{h(r_k)}\mu_f(r_k) \ln^{\frac14+\frac{5\varepsilon}{6}} \mu_f(r_k).$$

Оскільки $M_f(r,t) \leq W(r) + \sum_{n \geq \tilde{C}_1(r)} |a_n| r^n$, то для майже всіх $t \in [0;1]$ і для всіх $k \geq k(t)$

$$M_f(r_k,t) \leq \sqrt{h(r_k)}\mu_f(r_k) \ln^{\frac14+\frac{5\varepsilon}{6}} \mu_f(r_k) + \mu_f(r_k) \leq \sqrt{h(r_k)}\mu_f(r_k) \ln^{\frac14+\frac{6\varepsilon}{7}} \mu_f(r_k).$$

Нехай тепер $r \geq r_{k(t)}$, $r \notin E^*$. Тоді існує p, для якого $r \in (r_p, r_{p+1})$. Оскільки $(r_p, r_{p+1}) \cap E^* \neq (r_p, r_{p+1})$, то за лемою 8 $l(r_{p+1}) \leq el(r_p) \leq el(r)$. Пригадуючи, що $l(x) = \sqrt{h(x)}\mu_f(x)(\ln \mu_f(x))^{1/4+6/7\varepsilon}$, отримуємо негайно при $r \to +\infty$ $(r \in (r_p, r_{p+1}))$

$$M_f(r,t) \leq M_f(r_{p+1}, f) \leq l(r_{p+1}) \leq el(r) =$$

$$= e\sqrt{h(r)}\mu_f(r) \ln^{1/4+6/7\varepsilon} \mu_f(r) \leq \sqrt{h(r)}\mu_f(r) \ln^{1/4+\varepsilon} \mu_f(r).$$

Теорему 2 доведено.

5. Висновки і заключні зауваження. У статті [2] фактично побудовано цілу функцію f, задану степеневим рядом з невід'ємними коефіцієнтами таку, що

$$f(r) \geq (2 + o(1))\mu_f(r)(\ln \mu_f(r))^{\frac{\beta_1 \delta}{1+\delta}}$$

для $r \in E \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_n [e^{\varkappa_{n+1}-\Delta_n}; e^{\varkappa_{n+1}}]$. При цьому $\varkappa_{n+1} \sim \ln \lambda_{n+1}$, $\Delta_n = \frac{1}{np_n}$, $p_n = 2[\lambda_n^{\beta_2}]$, $\beta_2 = \beta_1 \delta$, $\beta_1 = \beta + 1/2$, $\beta > 0$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $\frac{\beta_1 \delta}{1+\delta} = \frac{1}{2} + \varepsilon$,

$$\ln \mu_f(e^{\varkappa_{n+1}}) \sim \lambda_n^{1+\delta},$$

$\mu_f(r) = A_{\lambda_n} r^{\lambda_n}$ при $r \in [e^{\varkappa_n}, e^{\varkappa_{n+1}}]$.

Нехай тепер $b = \beta_1 \delta/(1+\delta)$, тоді

$$\int_{e^{\varkappa_{n+1}-\Delta_n}}^{\varkappa_{n+1}} \frac{(\ln \mu_f(r))^b}{r} dr \geq (\ln \mu_f(e^{\varkappa_{n+1}-\Delta_n}))^b \int_{e^{\varkappa_{n+1}-\Delta_n}}^{e^{\varkappa_{n+1}}} \frac{dr}{r} =$$
$$= \Delta_n (\ln \mu_f(e^{\varkappa_{n+1}-\Delta_n}))^b \geq \Delta_n (\ln A_{\lambda_n} + \varkappa_{n+1}\lambda_n - \Delta_n \lambda_n)^b =$$
$$= \Delta_n (\ln \mu_f(e^{\varkappa_{n+1}}) - \Delta_n \lambda_n)^b = \Delta_n (1 + o(1)) \lambda_n^{b(1+\delta)} =$$
$$= \frac{1+o(1)}{n} \lambda_n^{\beta_1 \delta - \beta_2} = \frac{1+o(1)}{n}.$$

Отже, отримуємо, що для кожного $\varepsilon > 0$ існує ціла функція f така, що для всіх $r \in E$

$$f(r) \geq (2 + o(1)) \mu_f(r) (\ln \mu_f(r))^{1/2+\varepsilon}$$

та

$$\int_E \frac{(\ln \mu_f(r))^{1/2+\varepsilon}}{r} dr = +\infty.$$

З іншого боку, згідно з теоремою 2 (встановленою тут) правильне наступне твердження.

Наслідок 1. *Для кожних $\varepsilon_1 > 0$ і $b > 0$ і для кожної цілої функції f майже напевне в $K(f, X)$ для кожного $r \notin E(t)$ виконується нерівність*

$$M_f(r,t) \leq \mu_f(r) \ln^{1/4+b/2+\varepsilon_1} \mu_f(r),$$

при цьому h-meas $E(t) < +\infty$, $h(r) \equiv \ln^b \mu_f(r)$, де X така, як у теоремі 2.

Звідси при $b = 1/2$ отримуємо, що нерівність

$$M_f(r,t) \leq \mu_f(r) \ln^{1/2+\varepsilon_1} \mu_f(r)$$

виконується для всіх r зовні деякої множини $E(t)$, для якої майже напевно є правильним співвідношення

$$\int_{E(t)} \frac{\ln^{1/2} \mu_f(r)}{r} dr < +\infty, \tag{15}$$

де $\varepsilon_1 > 0$ — довільне.

Інший наслідок отримаємо, якщо в теоремі 2 замість функції $h(r)$ розглянемо функцію $h^2(r)$.

Наслідок 2. *Нехай f — ціла функція, а h функція така, як у теоремі 2. Для кожного $\varepsilon > 0$ нерівність*

$$M_f(r,t) \leq h(r) \mu_f(r) \ln^{1/4+\varepsilon} \mu_f(r)$$

виконується для всіх r зовні деякої множини $E(t)$, для якої майже напевно є правильним співвідношення

$$h^2\text{-meas } E(t) = \int_{E(t)} \frac{h^2(r)}{r} dr < +\infty,$$

де X така, як у теоремі 2.

Наслідок 3. *Нехай f — ціла функція, а h — функція така, як у теоремі 2. Для кожного $\varepsilon > 0$ нерівність*

$$M_f(r,t) \leq h(r)\mu_f(r)\ln^{1/2+\varepsilon}\mu_f(r)$$

виконується для всіх r зовні деякої множини $E(t)$, для якої майже напевно є правильним співвідношення

$$\int_{E(t)} \frac{h^2(r)\ln^{1/2}\mu_f(r)}{r}dr < +\infty,$$

де X така, як у теоремі 2.

Наслідки 2 і 3 виявляють той новий ефект, що в класі випадкових цілих функцій майже напевне опис величини виняткової множини можна істотно покращити у порівнянні з описанням величини виняткової множини в класі всіх цілих функцій. Зокрема, якщо у наслідку 3 вибрати $h(r) = 1$, то отримаємо, що для класичної нерівності Вімана майже напевне виняткова множина $E(t)$ задовольняє умову (15). Тобто, майже напевне в $K(f, X)$ h-міра з $h(r) = \ln^{1/2}\mu_f(r)$ виняткової множини є скінченною. Наведений вище приклад цілої функції показує, що в класі всіх цілих функцій, це описання виняткової множини істотно покращити не можна.

Якщо ж ціла функція f така, що $\ln\mu_f(r) \geq Cr^2$ $(r \geq r_0)$, $C > 0$, то класична нерівність майже напевне виконується зовні деякої множини скінченної Лебегової міри на прямій. Зрозуміло також, що правильне наступне твердження.

Наслідок 4. *Для довільної додатної фіксованої функції $h(r)$ і для кожної цілої функції f такої, що $\ln\mu_f(r) \geq Ch^2(r)$ $(r \geq r_0)$, $C > 0$, класична нерівність Вімана майже напевно в $K(f, X)$ виконується зовні деякої множини скінченної h-міри, де X така, як у теоремі 2.*

ЛІТЕРАТУРА

1. Виттих Г.В. Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям. – М.: Физматгиз, 1960. – 320 с.
2. Скасків О.Б., Філевич П.В. *Про величину виняткової множини у теоремі Вімана* // Мат.студії. – 1999. – Т.12, №1. – С.31–36.
3. Skaskiv O.B. *Estimates of measures of exeptional sets in the Wiman-Valiron theory* // Нелинейные граничные задачи. Сб. науч. труд. – 2001. – Вып.11. – Донецк, 2001. – С.186–190
4. Erdős P., Renyi A. *On random entire functions* // Zastos. mat. – 1969. – V.10. – P.47–55.
5. Філевич П.В. *Співвідношення між максимумом модуля і максимальним членом для випадкових цілих функцій* // Мат. студії. – 1997. – Т.7, №2. – С.165–174.
6. Rosenbloom P.C. *Probability and entire functions* // Studies Math. Anal.and Related Topics. – Stanford: Calif. Univ. Press. – 1962. – P.325–332.
7. Скасків О.Б. *Про класичну нерівність Вімана для цілих рядів Діріхле* // Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат. – 1999. – Вип.54. – С.180–182.
8. Скаскив О.Б. *О некоторых соотношениях между максимумом модуля и максимальным членом целого ряда Дирихле* // Мат. заметки. – 1999. – Т.66, №2. – С.282–292.

Львівський національний університет ім. Івана Франка, механіко-математичний факультет

Надійшло 30.06.2003