УДК 517.526

Д. І. Боднар, Н. П. Гоєнко

НАБЛИЖЕННЯ ВІДНОШЕННЯ ФУНКЦІЙ ЛАУРІЧЕЛЛИ ГІЛЛЯСТИМ ЛАНЦЮГОВИМ ДРОБОМ

D. I. Bodnar, N. P. Hoyenko. *Approximation of ratio of Lauricella functions by branched continued fraction*, Matematychni Studii, **20** (2003) 210–214.

The convergence of ratio of Lauricella hypergeometric functions $F_D^{(N)}(a, b_1, b_2, \dots, b_N; c; z_1, z_2, \dots, z_N)/F_D^{(N)}(a+1, b_1+1, b_2, \dots, b_N; c+1; z_1, z_2, \dots, z_N)$ expansion into branched continued fraction is investigated for certain restrictions of function parameters. It is shown that the fraction converges to a holomorphic function being analytic continuation of the ratio into the region $\{(z_1, \dots, z_N) \in \mathbb{C}^N : \operatorname{Re} z_k < 1/2,\ 1 \le k \le N\}$.

Д. И. Боднар, Н. П. Гоенко. *Приближение отношений функций Лауричеллы ветвящейся цепной дробью* // Математичні Студії. – 2003. – Т.20, №2. – С.210–214.

Исследована область сходимости ветвящейся цепной дроби, являющейся разложением отношения гипергеометрических функций Лауричеллы $F_D^{(N)}(a, b_1, b_2, \dots, b_N; c; z_1, z_2, \dots, z_N)/F_D^{(N)}(a+1, b_1+1, b_2, \dots, b_N; c+1; z_1, z_2, \dots, z_N)$ при некоторых дополнительных условиях на параметры функции $F_D^{(N)}$. Доказано, что эта дробь сходится к голоморфной функции, являющейся аналитическим продолжением рассмотреной дроби в область $\{(z_1, \dots, z_N) \in \mathbb{C}^N : \operatorname{Re} z_k < 1/2,\ 1 \le k \le N\}$.

Гіпергеометрична функція Лаурічелли

$$F_D^{(N)}(a, \mathbf{b}; c; \mathbf{z}) = \sum_{k_1, \dots, k_N = 0}^{\infty} \frac{(a)_{k_1+\dots+k_N}(b_1)_{k_1} \cdots (b_N)_{k_N}}{(c)_{k_1+\dots+k_N}} \frac{z_1^{k_1} \cdots z_N^{k_N}}{k_1! \cdots k_N!}, N \in \mathbb{N},$$

де $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_N)$, $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_N)$, параметри $a, b_1, \dots, b_N, c$ — комплексні сталі (причому $c \ne 0, -1, -2, \dots$), $z_1, z_2, \dots, z_N$ — комплексні змінні, $(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)$ — символ Похгаммера, $k = 1, 2, \dots,$ $(\alpha)_0 = 1$, є одним із багатовимірних узагальнень гіпергеометричної функції Гауса.

Функції F_D знайшли застосування в теоретичній фізиці, квантовій хімії та інших прикладних задачах ([1]). У книгах [2], [3], [4] побудовано та досліджено розвинення часток (лише!) гіпергеометричних функцій Гауса, вироджених гіпергеометричних функцій та інших спеціальних функцій у неперервні дроби. Розвинення ж функції Гауса у неперервний дріб для довільних допустимих значеннь параметрів до цього часу не побудовано. Знайдено лише асимптотику коефіцієнтів неперервного дробу для Г-функції [5]. Відомо, що розвинення у неперервні дроби збігаються, як правило, в

2000 *Mathematics Subject Classification:* 30E10, 40A15.

ширших областях, ніж відповідні розвинення у степеневі ряди. Слід зауважити, що переважно досліджувалась збіжність дробів у широкому розумінні, тобто коли існують скінченні або нескінченні границі послідовностей підхідних дробів.

Актуальною є задача дослідження збіжності у вузькому розумінні (до скінченого значення) розвинень відношень гіпергеометричних функцій багатьох змінних у гіллясті ланцюгові дроби (ГЛД). У статті [6] побудовано розвинення відношень гіпергеометричних функцій Аппеля F_2 і F_4 (функції Лаурічелли $F_A^{(N)}$ і $F_C^{(N)}$ у випадку $N=2$) у ГЛД. Питання збіжності одержаних розвинень до цього часу залишається відкритим. У статті [7] встановлено, що область $\{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2 : 1/2-\mathrm{Re}\ z_k > \sqrt{|z_k(1-z_k)|}, k\in\{1,2\}\}$ є областю збіжності для гіллястого ланцюгового дробу, що є розвиненням відношення функцій Аппеля F_3 (функція Лаурічелли $F_B^{(N)}$ для $N=2$). Для відношення гіпергеометричних функцій F_D побудовано та досліджено розвинення у ГЛД [8, 9]. Зокрема встановлено, що за певних обмежень на параметри функції F_D, ГЛД збігається у вузькому розумінні на множинах $\{\mathbf{z}\in\mathbb{C}^N : 1/2-\mathrm{Re}\, z_k \geq \sqrt{|z_k(1-z_k)|}, 1\leq k\leq N\}$ і $\{\mathbf{z}\in\mathbb{R}^N : z_k<1/2, 1\leq k\leq N\}$. У цій статті встановлено багатовимірний аналог теореми Ньорлунда, досліджено збіжність ГЛД у вузькому розумінні в області $\{\mathbf{z}\in\mathbb{C}^N : \mathrm{Re}\ z_k < 1/2, 1\leq k\leq N\}$. У випадку $N=1$ ця область збігається з максимальною областю збіжності неперервного дробу, тобто отриманий результат у певному сенсі остаточний.

Теорема 1. *Нехай параметри $a, b_1, b_2, \ldots, b_N, c$ гіпергеометричної функції Лурічелли $F_D(a,\mathbf{b};c;\mathbf{z})$ — дійсні числа, що задовольняють умови*

$$a>0,\quad b_i>0\ (1\leq i\leq N),\quad 2c>a+\sum_{j=1}^{N} b_j+1. \tag{1}$$

Тоді гіллястий ланцюговий дріб типу Ньорлунда

$$b_0(\mathbf{z})+\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{a_{i(k)}(\mathbf{z})}{b_{i(k)}(\mathbf{z})}=b_0(\mathbf{z})+\sum_{i_1=1}^{N}\cfrac{a_{i(1)}(\mathbf{z})}{b_{i(1)}(\mathbf{z})+\sum\limits_{i_2=1}^{N}\cfrac{a_{i(2)}(\mathbf{z})}{b_{i(2)}(\mathbf{z})+\ddots}}, \tag{2}$$

коефіцієнти якого обчислюються за формулами

$$b_0(\mathbf{z})=1-\frac{a+1}{c}z_1-\sum_{i=1}^{N}\frac{b_i}{c}z_i,\quad a_{i(k)}(\mathbf{z})=\frac{(a+k)(b_{i_k}+p_{i(k)})}{(c+k-1)(c+k)}z_{i_k}(1-z_{i_k}),$$

$$b_{i(k)}(\mathbf{z})=1-\frac{a+k}{c+k}z_{i_k}-\sum_{j=1}^{N}\frac{b_j+p_{i(k)j}}{c+k}z_j,\qquad p_{i(k)}=\sum_{m=1}^{k-1}\delta_{i_k}^{i_m}+\delta_{i_k}^{1},$$

$i(k)=i_1i_2\ldots i_k$ — мультиіндекс, $1\leq i_p\leq N$, $1\leq p\leq k$, $k\in\mathbb{N}$,

збігається рівномірно на компактах з області

$$G=\left\{\mathbf{z}=(z_1,z_2,\ldots,z_N)\in\mathbb{C}^N : \mathrm{Re}\ z_i<\frac{1}{2}, 1\leq i\leq N\right\}$$

до деякої голоморфної функції $f(\mathbf{z})$, яка є аналітичним продовженням функції

$$F(\mathbf{z})=\frac{F_D^{(N)}(a,b_1,b_2,\ldots,b_N;\ c;\ \mathbf{z})}{F_D^{(N)}(a+1,b_1+1,b_2,\ldots,b_N;\ c+1;\ \mathbf{z})},$$

голоморфної в деякому околі початку координат на область G.

Доведення. Позначимо залишки n-го підхідного дробу ГЛД (2) через

$$Q_{i(n)}^n(\mathbf{z}) = b_{i(n)}(\mathbf{z}), \quad Q_{i(k)}^n(\mathbf{z}) = b_{i(k)}(\mathbf{z}) + \mathop{\mathrm{D}}_{r=k+1}^{n} \sum_{i_r=1}^{N} \frac{a_{i(r)}(\mathbf{z})}{b_{i(r)}(\mathbf{z})},\ k < n.$$

Методом математичної індукції доведемо, що для довільного мультиіндексу $i(k)$ в області G виконується нерівнсть

$$\mathrm{Re}\ Q_{i(k)}^n(\mathbf{z}) \geq \frac{a+k}{c+k}\left(\frac{1}{2} - \mathrm{Re}\ z_{i_k}\right),\ k \leq n. \tag{3}$$

При $k = n$ з урахуванням обмежень на параметри (1) і того, що $\sum\limits_{j=1}^{N} p_{i(n)j} = n+1$, маємо

$$\mathrm{Re}\, Q_{i(n)}^n(\mathbf{z}) = \mathrm{Re}\ b_{i(n)}(\mathbf{z}) = 1 - \frac{a+n}{c+n}\mathrm{Re}\, z_{i_n} - \sum_{j=1}^{N} \frac{b_j + p_{i(n)j}}{c+n}\mathrm{Re}\, z_j >$$

$$> \frac{2c - a - \sum_{j=1}^{N} b_j - 1}{2(c+n)} + \frac{a+n}{c+n}\left(\frac{1}{2} - \mathrm{Re}\, z_{i_n}\right) > \frac{a+n}{c+n}\left(\frac{1}{2} - \mathrm{Re}\, z_{i_n}\right).$$

Нескладно обчислити, що (див. лему 4.41 [3, с. 112])

$$\inf_{-\infty<v<+\infty} \mathrm{Re}\,\frac{x+iy}{u+iv} = -\frac{\sqrt{x^2+y^2} - x}{2u} \quad \text{при} \ \ u > 0. \tag{4}$$

Застосовуючи (4), а також наступну, повідомлену нам Т. М. Антоновою, нерівність

$$\frac{|z(1-z)| - \mathrm{Re}(z(1-z))}{1/2 - \mathrm{Re}\, z} \leq 2\left(\frac{1}{2} - \mathrm{Re}\, z\right), \qquad z \in \mathbb{C}, \quad z \neq \frac{1}{2},$$

отримуємо

$$\mathrm{Re}\, Q_{i(k)}^n(\mathbf{z}) = \mathrm{Re}\, b_{i(k)}(\mathbf{z}) + \sum_{i_{k+1}=1}^{N} \mathrm{Re}\,\frac{a_{i(k+1)}(\mathbf{z})}{Q_{i(k+1)}^n(\mathbf{z})} \geq$$

$$\geq \mathrm{Re}\, b_{i(k)}(\mathbf{z}) - \sum_{i_{k+1}=1}^{N} \frac{|a_{i(k+1)}(\mathbf{z})| - \mathrm{Re}\, a_{i(k+1)}(\mathbf{z})}{2\,\mathrm{Re}\, Q_{i(k+1)}^n(\mathbf{z})} \geq \mathrm{Re}\, b_{i(k)}(\mathbf{z}) -$$

$$- \sum_{i_{k+1}=1}^{N} \frac{b_{i_{k+1}} + p_{i(k+1)}}{2(c+k)} \frac{|z_{i_{k+1}}(1 - z_{i_{k+1}})| - \mathrm{Re}\left(z_{i_{k+1}}(1 - z_{i_{k+1}})\right)}{1/2 - \mathrm{Re}\, z_{i_{k+1}}} \geq \frac{a+k}{c+k}\left(\frac{1}{2} - \mathrm{Re}\ z_{i_k}\right).$$

З нерівності (3) випливає, що послідовність підхідних дробів $\{f_n(\mathbf{z})\}$ є рівномірно обмеженою всередині області G. Якщо K — довільний компакт області G і $\mathbf{z} \in K$, то

$$|f_n(\mathbf{z})| = \left| b_0(\mathbf{z}) + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)}(\mathbf{z})}{Q_{i(1)}^n(\mathbf{z})} \right| \leq M < \infty, \quad n \in \mathbb{N},$$

де $M = M(K) := \sup\limits_{\mathbf{z}\in K}\left\{1 + \dfrac{a+1}{c}|z_1| + \sum\limits_{i=1}^{N}\dfrac{b_i}{c}|z_i| + \sum\limits_{i_1=1}^{N}\dfrac{(b_{i_1}+p_{i(1)})|z_{i_1}(1-z_{i_1})|}{c(1/2-\operatorname{Re} z_{i_1})}\right\}$. Нехай $\Delta = \left\{\mathbf{z}\in\mathbb{C}^N : \operatorname{Re} z_i < \frac{1}{2}, \operatorname{Im} z_i = 0, 1\le i\le N\right\}$. У статті [9] доведено, що послідовність $\{f_n(\mathbf{z})\}$ поточково збігається в Δ. Отже, за багатовимірним аналогом теореми Монтеля ([10]) послідовність голоморфних функцій $\{f_n(\mathbf{z})\}$ рівномірно збігається всередині області G до деякої голоморфної функції $f(\mathbf{z})$. Доведемо, що функція $f(\mathbf{z})$ збігається з функцією $F(\mathbf{z})$ на множині

$$\Delta_1 = \left\{\mathbf{z}\in\mathbb{C}^N : 0\le \operatorname{Re} z_i < \frac{1}{2},\ \operatorname{Im} z_i = 0,\ 1\le i\le N\right\}.$$

Враховуючи, що при $\mathbf{z}\in\Delta_1$ ([11])

$$F(\mathbf{z}) \equiv b_0(\mathbf{z}) + \sum_{i_1=1}^{N}\frac{a_{i(1)}(\mathbf{z})}{b_{i(1)}(\mathbf{z})} \underline{\ \ } + \cdots + \sum_{i_n=1}^{N}\frac{a_{i(n)}(\mathbf{z})}{b_{i(n)}(\mathbf{z})} + \sum_{i_{n+1}=1}^{N}\frac{a_{i(n+1)}(\mathbf{z})}{P_{i(n+1)}(\mathbf{z})},$$

де $P_{i(n+1)}(\mathbf{z}) = \dfrac{F_D^{(N)}\Big(a+n+1, \mathbf{b}+\sum\limits_{j=1}^{N}p_{i(n)j}\mathbf{e}_j; c+n+1; \mathbf{z}\Big)}{F_D^{(N)}\Big(a+n+2, \mathbf{b}+\sum\limits_{j=1}^{N}p_{i(n+1)j}\mathbf{e}_j; c+n+2; \mathbf{z}\Big)}$, $n\in\{0,1,2,\dots\}$, $\mathbf{e}_j = (\delta_j^1, \delta_j^2, \dots, \delta_j^N)$, і використовуючи методику виведення формули різниці між підхідними дробами ГЛД ([10]), отримаємо

$$F(\mathbf{z}) - f_n(\mathbf{z}) = (-1)^n \sum_{i_1,i_2,\dots,i_n,i_{n+1}=1}^{N}\frac{\prod\limits_{r=1}^{n+1}a_{i(r)}(\mathbf{z})}{P_{i(n+1)}(\mathbf{z})\prod\limits_{r=1}^{n}\left[Q_{i(r)}^{n}(\mathbf{z})\ \widehat{Q}_{i(r)}^{n+1}(\mathbf{z})\right]}$$

де $\widehat{Q}_{i(n+1)}^{n+1}(\mathbf{z}) = P_{i(n+1)}(\mathbf{z})$, $\widehat{Q}_{i(s)}^{n+1}(\mathbf{z}) = b_{i(s)}(\mathbf{z}) + \sum\limits_{i_{s+1}=1}^{N}\dfrac{a_{i(s+1)}(\mathbf{z})}{\widehat{Q}_{i(s+1)}^{n+1}(\mathbf{z})}$, $1\le s\le n$. Якщо $\mathbf{z}\in\Delta_1$, то всі $a_{i(r)}(\mathbf{z}) > 0$, $Q_{i(r)}^{n}(\mathbf{z}) > 0$, $\widehat{Q}_{i(r)}^{n+1}(\mathbf{z}) > 0$, $P_{i(n+1)}(\mathbf{z}) > 0$, і тому справджується нерівність

$$f_{2m}(\mathbf{z}) \le F(\mathbf{z}) \le f_{2m+1}(\mathbf{z}), \quad m\in\mathbb{N}$$

Звідси випливає, що $f(\mathbf{z}) \equiv F(\mathbf{z})$ при $\mathbf{z}\in\Delta_1$. Оскільки $F(\mathbf{z})$ голоморфна в деякому околі нуля, то за теоремою єдиності ([12]) $F(\mathbf{z}) \equiv f(\mathbf{z})$ в деякому околі нуля.

Отже, ГЛД (2) рівномірно збігається в області G до голоморфної функції $f(\mathbf{z})$, що є аналітичним продовженням функції $F(\mathbf{z})$ на область G.

$\square$

ЛІТЕРАТУРА

1. Exton H. Multiple hypergeometric functions and applications. – New York, Sydney, Toronto, Chichester: Ellis Horwood, 1976. – 376 p.

2. Wall H. S. Analytic Theory of Continued Fractions. – New York: Van Nostrand, 1948. – 433 p.
3. Джоунс У., Трон В. Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. – М.: Мир, 1985. – 414 с.
4. Lorentzen L., Waadeland H. Continued Fractions with Application. – Amsterdam: North-Holland, 1992. – 606 p.
5. Jones W., Sriranga A. *Computation of the Binet and Gamma functions by Stieltjes continued fractions* // Orthogonal functions, moment theory and continued fractions: Theory and applications/ Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. – 1998. – V. 199. – P. 151–178.
6. Боднар Д.І. *Багатовимірні C-дроби* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1996. – Т.39, №2. – С. 39–46.
7. Манзій О.С. *Дослідження розвинення відношення гіпергеометричних функцій Аппеля F_3 у гіллястий ланцюговий дріб* // Теорія наближень функцій та її застосування. Праці Інституту математики НАН України. – 2000. – Т.31 – С. 344–353.
8. Боднар Д.І., Гоєнко Н.П. *Наближення гіпергеометричних функцій Лаурічелли багатовимірними узагальненнями неперервних дробів типу Nörlund'а* // Теорія наближень та гармонійний аналіз. Праці Українського математичного конгресу 2001. Секція 10. – Київ: Ін-т математики НАН України. – 2002. – С. 34-44.
9. Гоєнко Н.П. *Про збіжність гіллястого ланцюгового дробу типу Nörlund'а у випадку дійсних змінних.* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – Т.45, №1. – С. 28–30.
10. Боднар Д. И. Ветвящиеся цепные дроби. К.: Наук. думка, 1986. – 176 с.
11. Гоєнко Н. П. *Алгоритми розвинення гіпергеометричний функцій Лаурічелли у гілясті ланцюгові дроби* // Вісник НУ "Львівська політехніка" – 2000. – №411 – С. 67–73.
12. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. Т.II. – М.: Наука, 1976. – 400 с.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Надійшло 10.09.2003
Після переробки 7.11.2003