УДК 519.11

Б. В. Олійник

ГРУПА ІЗОМЕТРІЙ НЕСКІНЧЕННОГО БІОТОПНОГО ПРОСТОРУ

B. V. Oliynyk. *Group of isometries of infinite biotop space*, Matematychni Studii, **20** (2003) 205–209.

A group of isometries of the space of biotops $B(X)$ for an arbitrary set X is characterized.

Б. В. Олийнык. *Группа изометрий бесконечного биотопного пространства* // Математичні Студії. – 2003. – Т.20, №2. – С.205–209.

Охарактеризована группа изометрий пространства биотопов $B(X)$ для произвольного множества X.

Біотопним простором (або простором біотопів) $B(X)$ над множиною X називається метричний простір, носієм якого є множина всіх скінченних підмножин множини X, а метрика d визначається рівністю:

$$d_b(U,V)=\frac{|U\triangle V|}{|U\cup V|},\qquad U,V\in B(X), \tag{1}$$

де $\triangle$ — знак симетричної різниці множин. Біотопні простори введено для потреб математичної біології в [1]; вони є частковим випадком просторів Марчевського–Штейнгауза, визначення яких також наведено в [1].

Нехай множина X не більше ніж зліченна. Зафіксувавши перелік її елементів, характеристичну функцію кожної скінченної підмножини з X можна задавати булевим вектором, якщо X — скінченна, $|X|=n$, то отримуємо булеві вектори $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ $(\alpha_i\in\{0,1\}, n\geq i\geq 1)$ довжини n; у випадку, коли X — зліченна, отримуємо нескінченновимірні булеві вектори $(\alpha_1,\alpha_2,\dots)$ $(\alpha_i\in\{0,1\}, i\geq 1)$, лише скінченна кількість координат яких відмінна від нуля. Відстань між такими булевими векторами в біотопному просторі дорівнює відношенню двох чисел: кількості координат, якими вони відрізняються до кількості координат, які є ненульовими хоча б для одного з векторів.

Відзначимо деякі властивості біотопного простору для довільної множини X. Біотопний простір завжди має діаметр 1. Якщо $|X|=n$, то всі ненульові значення метрики d_b належать до інтервалу $[\frac{1}{n},1]$. Якщо множина $|X|$ нескінченна, то ненульовими значеннями метрики d_b є всі раціональні числа з інтервалу $(0;1]$. А тому кожна куля ненульового діаметра з центром в точці $Z\in B(X)$, $Z\neq\varnothing$, в ньому містить нескінченну кількість точок, і всі підмножини $B(X)$, що не містять порожньої множини (як елементу $B(X)$) є відкритими.

2000 *Mathematics Subject Classification:* 20F29, 20F38.

Хоча визначення метрики для біотопних просторів споріднене з визначенням метрики Хемінга (див. напр. [5]), біотопні простори і простори Хемінга досить сильно відрізняються за своїми властивостями. Зокрема, простір Хемінга $H(X)$ над не більше ніж зліченною множиною X є однорідним, а його група ізометрій ізоморфна до вінцевого добутку симетричної групи S_X з симетричною групою рангу 2 (для зліченних просторів Хемінга цей результат встановлено в [3]). Ряд інших властивостей цих просторів можна знайти в монографії [2].

Група ізометрій біотопного простору у випадку, коли множина X скінченна охарактеризована в [4] (див. також [5]). Основним результатом цієї статті є наступна теорема.

Теорема 1. *Група ізометрій біотопного простору $B(X)$ над довільною множиною X ізоморфна до симетричної групи S_X множини X.*

Зрозуміло, що будь-яке відображення множини всіх скінченних підмножин множини X в себе, яке задається перестановкою елементів множини X, є ізометрією простору $B(X)$. А тому необхідність твердження теореми очевидна. Для доведення достатності встановимо такі дві леми.

Лема 1. *Якщо φ — ізометрія біотопного простору $B(X)$ над множиною X, то*

$$\varphi(\varnothing) = \varnothing.$$

Доведення. Зауважимо, що для будь–якої непорожньої скінченої підмножини Q множини X відстань

$$d_b(\varnothing, Q) = 1.$$

Припустимо, що при ізометрії $\varnothing$ переходить у деяку непорожню множину $R \in B(X)$. Множина R скінченна , а тому можемо вважати , що $R = \{r_1, r_2, \dots, r_k\}$, де k — деяке натуральне число. Оскільки φ — ізометрія біотопного простору $B(X)$, то існує деяка скінченна підмножина P множини X, образом якої є двоелементна множина $\{r_1, p\}$, $p \neq r_i, 1 \leq i \leq k$, тобто

$$\varphi(P) = \{r_1, p\}.$$

Тоді відстань між множинами $\varnothing$ і P дорівнює 1, а відстань між образами цих множин

$$d_b(\varphi(\varnothing), \varphi(P)) = d_b(R, \{r_1, p\}) = \frac{k}{k+1} \neq 1.$$

Тому наше припущення неправильне. Отже, $\varphi(\varnothing) = \varnothing$. □

Лема 2. *При ізометричному відображенні біотопного простору образом k–елементної множини є k–елементна множина.*

Доведення. Нехай $\varphi : B(X) \to B(X)$ — деяка ізометрія біотопного простору. Доведемо спочатку, що при ізометричному відображенні образ одноелементної множини — одноелементна множина. Припустимо, що образом множини $A_1 = \{a_1\}, a_1 \in X$ при ізометрії φ є множина

$$\varphi(A_1) = \{b_1, \dots, b_k\}, \quad b_1, \dots, b_k \in X.$$

Оскільки перестановка елементів множини X задає ізометрію простору $B(X)$, а композиція двох ізометрій також є ізометрією, то, не звужуючи загальності, можемо вважати, що $b_1 = a_1$, тобто

$$\varphi(A_1) = \{a_1, b_2, \ldots, b_k\}. \tag{2}$$

Розглянемо множину $A_2 = \{a_1, b_2\}$. В просторі $B(X)$ відстань між множинами A_1 і A_2 дорівнює

$$d_b(A_1, A_2) = \frac{A_1 \triangle A_2}{A_1 \cup A_2} = \frac{1}{2},$$

а тому відстань між образами цих множин також повинна дорівнювати $\frac{1}{2}$. З формул 1 і 2 випливає, що образом множини A_2 може бути або $\frac{k}{2}$–елементна підмножина множини $\varphi(A_1)$ (якщо k–парне) або $2k$–елементна множина, що містить в собі як підмножину множину $\varphi(A_1)$. Не обмежуючи загальності, можемо вважати, що образом A_2 є або множина $\{a_1, b_1, \ldots, b_{\frac{k}{2}}\}$ або $\{a_1, b_2, \ldots, b_k, b_{k+1}, \ldots, b_{2k}\}$, де $b_{k+1}, \ldots, b_{2k} \in X$. Припустимо, що образом є $\{a_1, b_1, \ldots, b_{\frac{k}{2}}\}$. Розглянемо множину $A_3 = \{a_1, b_2, b_3\}$. З визначення відстані між множинами в $B(X)$ маємо

$$d_b(A_1, A_3) = \frac{1}{3}, \quad d_b(A_2, A_3) = \frac{2}{3}.$$

Легко бачити, що для того, щоб при відображенні φ зберігались відстані між точками, необхідно, щоб образом множини A_3 була $\frac{k}{3}$–елементна підмножина множини $\{a_1, b_1, \ldots, b_{\frac{k}{2}}\}$. Далі розглянемо множину $A_4 = \{a_1, b_2, b_3, b_4\}$ і т.д. Оскільки кількість елементів в образах множин $A_i, i \geq 1$, на кожному кроці зменшується на 1, то на $k{+}1$–му кроці ми не зможемо побудувати образ множини $A_{k+1} = \{a_1, b_2, \ldots, b_k, b_{k+1}\}$ так, щоб всі відстані при ізометрії φ були збережені. А тому наше припущення неправильне. Отже образом множини A_2 є множина

$$\phi(A_2) = \{a_1, b_2, \ldots, b_k, b_{k+1}, \ldots, b_{2k}\}.$$

Подібно, образами множин $A_i = \{a_1, b_2, \ldots, b_i\}, i \geq 3$ є такі множини:

$$\begin{array}{l}
\varphi(A_3) = \{a_1, b_2, \ldots, b_k, b_{k+1}, \ldots, b_{3k}\} \\
\varphi(A_4) = \{a_1, b_2, \ldots, b_k, b_{k+1}, \ldots, b_{4k}\} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varphi(A_k) = \{a_1, b_2, \ldots, b_k, b_{k+1}, \ldots, b_{k^2}\} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array} \tag{3}$$

Оскільки φ — бієктивне відображенням простору $B(X)$ на себе, то існує деяка множина S, образом якої є множина $A_1 = \{a_1\}$. З рівності відстаней

$$d_b(S, A_1) = d_b(\varphi(S), \varphi(A_1)) = d_b(A_1, \varphi(A_1)) = \frac{k-1}{k},$$

випливає, що в множині S точно k елементів, причому $a_1 \in S$. В цій множині можуть бути також деякі елементи $b_i, i \geq 2$. А тому, не обмежуючи загальності, можемо вважати , що

$$S = \{a_1, b_2, \ldots, b_m, c_{m+1}, \ldots, c_k\},$$

де $c_{m+1}, \dots, c_k \in X$, $k \geq m \geq 1$. З рівностей 3 випливає

$$d_b(S, A_k) = d_b(\varphi(S), \varphi(A_k)) = d_b(A_1, A_{k^2}) = \frac{k^2 - 1}{k^2}. \tag{4}$$

З іншого боку

$$d_b(S, A_k) = d_b(\{a_1, b_2, \dots, b_m, c_{m+1}, \dots, c_k\}, \{a_1, b_2, \dots, b_k\}) = \frac{2k - 2m}{2k - m}. \tag{5}$$

Враховуючи 4 і 5 маємо

$$\frac{k^2 - 1}{k^2} = \frac{2k - 2m}{2k - m}$$

Останню рівність можна переписати у вигляді:

$$(k^2 + 1)m = 2k, \tag{6}$$

Число $k^2 + 1$ ділиться на k тоді і тільки тоді, коли $k = 1$. Якщо $k \neq 1$, то на k ділиться m, але $m \leq k$, отже $m = k$ і з рівності 6 отримуємо, що $k = 1$. Це означає, що образ одноелементної можини A_1 також одноелементна множина. Оскільки множину A_1 ми вибирали довільно, то при ізометричному відображенні образом будь-якої одноелементної множини завжди є одноелементна множина,

Нехай тепер $C = \{b_1, \dots, b_k\}$, $b_1, \dots, b_k \in X$ — деяка множина, φ –деяка ізометрія простору $B(X)$. Покажемо, що образ множини C при ізометрії також k–елементна множина. Справді, нехай образом множини $\{b_1\}$ є деяка одноелементна множина $\{c_1\}$. Тоді з рівностей 3 випливає, що образом $\{b_1, b_2\}$ буде множина $\{c_1, c_2\}$, і т.д., образом $\{b_1, \dots, b_r\}$ — $\{c_1, \dots, c_r\}$, що і потрібно було довести.

□

Доведення теореми 1. Нехай відображення $\varphi : B(X) \to B(X)$ є ізометрією. Враховуючи леми 1 і 2 для доведення достатності твердження теореми досить довести, що для будь–якої множини $S = \{s_1, \dots, s_r\}$, якщо $\varphi(\{s_i\}) = c_i, 1 \leq i \leq r$, то $c_i \in \varphi(S), 1 \leq i \leq r$. Справді, в просторі $B(X)$ справедлива рівність

$$d_b(\{s_i\}, S) = \frac{r - 1}{r}, \quad 1 \leq i \leq r. \tag{7}$$

Оскільки φ — ізометрія, то відстань між образами цих множин також повинна дорівнювати $\frac{r-1}{r}$, звідки

$$|\varphi(S) \cup \varphi(\{s_i\})| = |\varphi(S) \cup \{c_i\}| = r, \ 1 \leq i \leq r. \tag{8}$$

З леми 2 випливає, що

$$|\varphi(S)| = r. \tag{9}$$

З рівностей 8 і 9 отримуємо $c_i \in \varphi(S)$, $1 \leq i \leq r$, що і потрібно було довести.

Отже, будь-яка ізометрія нескінченного біотопного простору $B(X)$ задається перестановкою елементів множини X, а отже, група ізометрій нескінченого біотопного простору $B(X)$ ізоморфна до групи S_X. □

Зауваження. Можна розглядати також простір $\overline{B(X)}$, носієм якого є множина всіх непорожніх підмножин множини X, а метрика визначається рівністю (1). Група ізометрій простору $\overline{B(X)}$ також ізоморфна до групи S_X. Простори $B(X)$ і $\overline{B(X)}$ для будь-якої множини X завжди неоднорідні.

ЛІТЕРАТУРА

1. Marczewski F., Steinhaus H. *On certain distance of sets and the corresponding distance of functions*// Colloquium Matematicum. – 1958 . – V. 6. – P. 319–327.
2. Deza M.M., Laurent M. Geometry of cuts and metrics. Berlin: Springer, 1997. – 588p. (Російський переклад: Деза М., Лоран М. Геометрия разрезов и метрик. – Москва: МЦНМО, 2001. – 736с.)
3. Олійник Б.В. *Універсальність зліченних просторів Хемінга щодо ізоморфних занурень* // Вісник Київського університету. Сер. фіз.–мат. науки. – 1996. – Вип.2. – С. 53–62.
4. Олійник Б.В. Ізоморфні занурення і метрика Громова–Хаусдорфа для скінченних метричних просторів. – Дис. канд. фіз.–мат. наук. – Київ: КНУ імені Тараса Шевченка, 2002. – 124 с.
5. Сущанський В.І., Сікора В.С. Операції на групах підстановок. Теорія та застосування. – Чернівці: Рута, 2003. – 255 с.

Національний університет "Києво–Могилянська академія"

Надійшло 10.09.2003