УДК 517.983

Т. І. Звоздецький

ОПИС РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНОГО ОПЕРАТОРНОГО РІВНЯННЯ, ЩО МІСТИТЬ УЗАГАЛЬНЕНЕ ІНТЕГРУВАННЯ ГЕЛЬФОНДА-ЛЕОНТЬЄВА

T. I. Zvozdetskyi. *Description of solutions of an operator equation which contains Gelfond-Leont'ev integration*, Matematychni Studii, **20** (2003) 200–204.

We describe all linear continuous solutions $T\colon \mathcal{H}(G_1)\to\mathcal{H}(G_2)$ of the operator equation $T\mathcal{I}_{\varrho_1,\mu_1}=\mathcal{I}_{\varrho_2,\mu_2}T$, where $\mathcal{I}_{\varrho_i,\mu_i}$ is the Gelfond-Leont'ev integration in the space of analytic functions $\mathcal{H}(G_i)$ $(i\in\{1,2\})$.

Т. И. Звоздецкий. *Описание решений одного операторного уравнения, содержащего обобщенное интегрирование Гельфонда-Леонтьева* // Математичні Студії. – 2003. – Т.20, №2. – С.200–204.

Получено описание всех линейных непрерывных решений $T\colon \mathcal{H}(G_1)\to\mathcal{H}(G_2)$ операторного уравнения $T\mathcal{I}_{\varrho_1,\mu_1}=\mathcal{I}_{\varrho_2,\mu_2}T$, где $\mathcal{I}_{\varrho_i,\mu_i}$ — обобщенное интегрирование Гельфонда-Леонтьева в пространстве аналитических функций $\mathcal{H}(G_i)$ $(i\in\{1,2\})$.

Для $i\in\{1,2\}$ розглянемо числа $\varrho_i>0$ і $\mu_i\in\mathbb{C}$ $(\mathrm{Re}\,\mu_i>0)$, зіркові відносно нуля області $G_i\subset\mathbb{C}$ та оператор $\mathcal{I}_{\varrho_i,\mu_i}$ узагальненого інтегрування Гельфонда-Леонтьєва в $\mathcal{H}(G_i)$, який діє за правилом

$$(\mathcal{I}_{\varrho_i,\mu_i}f)(z)=\frac{z}{\Gamma\left(\frac{1}{\varrho_i}\right)}\int\limits_0^1 t^{\mu_i-1}(1-t)^{\frac{1}{\varrho_i}-1}f\left(zt^{\frac{1}{\varrho_i}}\right)dt,\quad f\in\mathcal{H}(G_i),$$

де $\mathcal{H}(G_i)$ — простір усіх аналітичних в області G_i функцій, наділений топологією компактної збіжності. У цій статті описуються всі лінійні неперервні розв'язки $T\colon \mathcal{H}(G_1)\to\mathcal{H}(G_2)$ операторного рівняння

$$T\mathcal{I}_{\varrho_1,\mu_1}=\mathcal{I}_{\varrho_2,\mu_2}T. \tag{1}$$

Відзначимо, що в [1] описано розв'язки (1) у випадку, коли $G_1=G_2$, $\varrho_1=\varrho_2$ і $\mu_1=\mu_2$, а в [2] отримано критерій еквівалентності операторів $\mathcal{I}_{\varrho_1,\mu_1}$ в $\mathcal{H}(G_1)$ та $\mathcal{I}_{\varrho_2,\mu_2}$ в $\mathcal{H}(G_2)$.

Нехай лінійний неперервний оператор $T\colon \mathcal{H}(G_1)\to\mathcal{H}(G_2)$ задовольняє (1). Позначимо $E_\lambda^{(i)}(z)=E_{\varrho_i}(\lambda z;\mu_i)$, $\lambda,z\in\mathbb{C}$, $i\in\{1,2\}$, де

$$E_\varrho(z;\mu)=\sum_{n=0}^\infty\frac{z^n}{\Gamma(n/\varrho+\mu)},\qquad z\in\mathbb{C},\quad \varrho>0,\quad \mu\in\mathbb{C}\ (\mathrm{Re}\,\mu>0),$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 47B38.

є функцією Міттаг-Леффлера. Покладемо $t(\lambda, z) = (TE_\lambda^{(1)})(z)$ ($\lambda \in \mathbb{C}$, $z \in G_2$), $\varphi = T1 \in \mathcal{H}(G_2)$. Тоді, якщо подіяти обома частинами рівності (1) на функцію $E_\lambda^{(1)}(z)$ і врахувати, що

$$\left(\mathcal{I}_{\varrho_1,\mu_1} E_\lambda^{(1)}\right)(z) = \frac{1}{\lambda}\left(E_\lambda^{(1)}(z) - \frac{1}{\Gamma(\mu_1)}\right), \quad z \in \mathbb{C},$$

то одержимо $(E - \lambda \mathcal{I}_{\varrho_2,\mu_2})\, t(\lambda, z) = \frac{1}{\Gamma(\mu_1)}\varphi(z)$, де E — тотожний оператор в $\mathcal{H}(G_2)$. Тому

$$t(\lambda, z) = \frac{1}{\Gamma(\mu_1)} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \left(\mathcal{I}_{\varrho_2,\mu_2}^n \varphi\right)(z). \tag{2}$$

Відзначимо, що в [1] побудовано неперервну згортку $*$ для оператора $\mathcal{I}_{\varrho_2,\mu_2}$ в $\mathcal{H}(G_2)$, тобто неперервну білінійну, комутативну й асоціативну операцію $*\colon \mathcal{H}(G_2) \times \mathcal{H}(G_2) \to \mathcal{H}(G_2)$, для якої $\mathcal{I}_{\varrho_2,\mu_2}(\varphi * f) = (\mathcal{I}_{\varrho_2,\mu_2}\varphi) * f$, $\varphi, f \in \mathcal{H}(G_2)$. А саме, для $\varphi, f \in \mathcal{H}(G_2)$

$$(\varphi * f)(z) = \varphi(0) f(z) +$$

$$+ \frac{z}{\varrho_2 \Gamma(\mu_2)} \int_0^1 t^{\mu_2 - 1}(1-t)^{\frac{1}{\varrho_2}-1} \left(A_{\varrho_2,\mu_2}\varphi\right)' \left(z(1-t)^{\frac{1}{\varrho_2}}\right) f\left(z t^{\frac{1}{\varrho_2}}\right) dt,$$

де A_{ϱ_2,μ_2} — ізоморфізм простору $\mathcal{H}(G_2)$ на себе, для якого $(A_{\varrho_2,\mu_2} E_\lambda^{(2)})(z) = E_{\varrho_2}(\lambda z; 1)$ (зауважимо, що $1 * f = f$). Якщо скористатись тепер цією згорткою $*$, то рівність (2) можна записати у вигляді [1]

$$t(\lambda, z) = \frac{\Gamma(\mu_2)}{\Gamma(\mu_1)} \left(\varphi * E_\lambda^{(2)}\right)(z). \tag{3}$$

Зрозуміло, що нульовий оператор T задовольняє (1). Тому будемо вважати, що T ненульовий. Тоді $\varphi(z) \not\equiv 0$. Отже, або $\varphi(0) \neq 0$ (покладемо в цьому випадку $k = 0$), або

$$\exists k \in \mathbb{N} : \varphi(0) = \varphi'(0) = \ldots = \varphi^{(k-1)}(0) = 0, \quad \varphi^{(k)}(0) \neq 0. \tag{4}$$

Нехай $\mathcal{D}_{\varrho_2,\mu_2}$ — оператор узагальненого диференціювання Гельфонда-Леонтьєва, який на функціях із повної в $\mathcal{H}(G_2)$ системи $\{E_\lambda^{(2)}(z) : \lambda \in \mathbb{C}\}$ визначається співвідношенням $(\mathcal{D}_{\varrho_2,\mu_2} E_\lambda^{(2)})(z) = \lambda E_\lambda^{(2)}(z)$. У [3] встановлено, що $\mathcal{D}_{\varrho_2,\mu_2}$ продовжується до лінійного неперервного оператора, що діє з $\mathcal{H}(G_2)$ в $\mathcal{H}(G_2)$.

Оскільки $\left(\mathcal{I}_{\varrho_2,\mu_2}\mathcal{D}_{\varrho_2,\mu_2} f\right)(z) = f(z) - f(0)$, $f \in \mathcal{H}(G_2)$, то, враховуючи (4), матимемо, що $\varphi = \mathcal{I}_{\varrho_2,\mu_2}^k \varphi_1$, де $\varphi_1 = \mathcal{D}_{\varrho_2,\mu_2}^k \varphi$, причому

$$\varphi_1(0) = \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} \frac{\Gamma(k/\varrho_2 + \mu_2)}{\Gamma(\mu_2)} \neq 0.$$

Використовуючи співвідношення (2) і (3), тепер одержимо

$$\mathcal{D}_{\varrho_2,\mu_2}^k t(\lambda, z) = \frac{1}{\Gamma(\mu_1)} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \left(\mathcal{I}_{\varrho_2,\mu_2}^n \varphi_1\right)(z) = \frac{\Gamma(\mu_2)}{\Gamma(\mu_1)} \left(\varphi_1 * E_\lambda^{(2)}\right)(z). \tag{5}$$

В [1] встановлено, що коли $\varphi_1(0) \neq 0$, то оператор $T_1 f = \varphi_1 * f$, $f \in \mathcal{H}(G_2)$, є ізоморфізмом простору $\mathcal{H}(G_2)$ на себе. Тому, якщо пригадати ще означення функції $t(\lambda, z)$, то з (5) отримаємо, що

$$E_\lambda^{(2)}(z) = \frac{\Gamma(\mu_1)}{\Gamma(\mu_2)} \left(T_1^{-1} \mathcal{D}^k_{\varrho_2,\mu_2} T E_\lambda^{(1)}\right)(z), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad z \in G_2. \tag{6}$$

Оскільки порядок цілої функції Міттаг-Леффлера $E_\varrho(z;\mu)$ дорівнюї ϱ, то при фіксованому $z \in G_2 \setminus \{0\}$ ліва частина рівності (6) як ціла функція від λ має порядок ϱ_2, а порядок правої частини рівності (6) як цілої функції від λ не перевищує ϱ_1 (бо оператори T, $\mathcal{D}_{\varrho_2,\mu_2}$ та T_1^{-1} є лінійними й неперервними у відповідних просторах). Тому $\varrho_1 \geq \varrho_2$.

Розглянемо тепер два випадки. Нехай $\varrho_1 > \varrho_2$. Тоді функція $\psi(\zeta)$, яка визначається формулою

$$\psi(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n/\varrho_1 + \mu_1)}{\Gamma(n/\varrho_2 + \mu_2)} \zeta^n, \qquad \zeta \in \mathbb{C}, \tag{7}$$

є цілою.

Тому оператор B, який на функцію $f \in \mathcal{H}(G_1)$ діє за правилом [4]

$$(Bf)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=r} \psi\left(\frac{z}{\zeta}\right) f(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta}, \qquad z \in \mathbb{C}, \tag{8}$$

де $r > 0$ таке, що $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\} \subset G_1$, лінійно й неперервно діє з $\mathcal{H}(G_1)$ в $\mathcal{H}(G_2)$. Крім цього, для $m \geq 0$

$$Bz^m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n/\varrho_1 + \mu_1)}{\Gamma(n/\varrho_2 + \mu_2)} z^n \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=r} \frac{d\zeta}{\zeta^{n-m+1}} = \frac{\Gamma(m/\varrho_1 + \mu_1)}{\Gamma(m/\varrho_2 + \mu_2)} z^m.$$

Тому

$$\left(BE_\lambda^{(1)}\right)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{\Gamma(n/\varrho_1 + \mu_1)} Bz^n = E_\lambda^{(2)}(z), \quad z \in G_2. \tag{9}$$

Отже, характеристична функція $t(\lambda, z) = (TE_\lambda^{(1)})(z)$ оператора T (якщо скористатися формулою (3)) подається у вигляді

$$t(\lambda, z) = \frac{\Gamma(\mu_2)}{\Gamma(\mu_1)} \left[\varphi * \left(BE_\lambda^{(1)}\right)\right](z), \tag{10}$$

де $\varphi = T1 \in \mathcal{H}(G_2)$. Враховуючи повноту в $\mathcal{H}(G_1)$ системи функцій $\{E_\lambda^{(1)}(z) : \lambda \in \mathbb{C}\}$ та лінійність і неперервність операторів T, B і згортки $*$ у відповідних просторах, отримаємо, що для $f \in \mathcal{H}(G_1)$

$$Tf = \frac{\Gamma(\mu_2)}{\Gamma(\mu_1)} [\varphi * (Bf)], \tag{11}$$

де $\varphi \in \mathcal{H}(G_2)$.

Нехай тепер $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho$. Тоді, пригадуючи властивості оператора $A_{\varrho,\mu}$, матимемо, що

$$A^{-1}_{\varrho,\mu_2} A_{\varrho,\mu_1} E^{(1)}_\lambda(z) = E^{(2)}_\lambda(z), \quad \lambda, z \in \mathbb{C}. \tag{12}$$

Якщо порівняти останню рівність з рівністю (9), то природно в цьому випадку означити

$$Bf = A^{-1}_{\varrho,\mu_2} A_{\varrho,\mu_1} f, \qquad f \in \mathcal{H}(G_2). \tag{13}$$

Зауважимо, що так визначений оператор B є ізоморфізмом простору $\mathcal{H}(G_2)$ на себе.

Використовуючи співвідношення (6) і (12), одержимо

$$E^{(1)}_\lambda(z) = \frac{\Gamma(\mu_1)}{\Gamma(\mu_2)} \left(B^{-1} T_1^{-1} \mathcal{D}^k_{\varrho,\mu_2} T E^{(1)}_\lambda \right)(z), \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \quad z \in G_2. \tag{14}$$

Розглянемо функцію $f_0 \in \mathcal{H}(G_1)$, для якої G_1 — область аналітичності. Тоді з (14), враховуючи повноту в $\mathcal{H}(G_1)$ системи функцій $\{E^{(1)}_\lambda(z) : \lambda \in \mathbb{C}\}$, отримаємо

$$f_0(z) = \frac{\Gamma(\mu_1)}{\Gamma(\mu_2)} \left(B^{-1} T_1^{-1} \mathcal{D}^k_{\varrho,\mu_2} T f_0 \right)(z), \qquad z \in G_1 \cap G_2.$$

Але права частина цієї рівності — функція з простору $\mathcal{H}(G_2)$. Тому $G_2 \subset G_1$. Крім цього, з (3), (12) і (13) випливає, що і в даному випадку функція $t(\lambda, z)$ подається у вигляді (10), а тому оператор T зображається формулою (11).

Отже, встановлено необхідність у наступній теоремі.

Теорема. *Ненульовий лінійний неперервний оператор $T\colon \mathcal{H}(G_1) \to \mathcal{H}(G_2)$ є розв'язком рівняння (1) тоді і лише тоді, коли $\varrho_1 \geq \varrho_2$ і у випадку $\varrho_1 = \varrho_2$ правильне включення $G_1 \supset G_2$. При цьому оператор T подається у вигляді (11), де $\varphi \in \mathcal{H}(G_2)$, а оператор B визначається формулою (8) (якщо $\varrho_1 > \varrho_2$) або формулою (13) (якщо $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho$).*

Доведемо достатність. Нехай $\varrho_1 \geq \varrho_2$ і $G_1 \supset G_2$ при $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho$. Тоді оператор B, який визначається відповідно формулою (8) або (13), лінійно й неперервно діє з $\mathcal{H}(G_1)$ в $\mathcal{H}(G_2)$ (зауважимо, що в другому випадку $\mathcal{H}(G_1) \subset \mathcal{H}(G_2)$). Тому для фіксованої функції $\varphi \in \mathcal{H}(G_2)$ формулою (11) визначається лінійний неперервний оператор $T\colon \mathcal{H}(G_1) \to \mathcal{H}(G_2)$ (якщо врахувати ще білінійність і неперервність згортки $*$ в $\mathcal{H}(G_2)$).

Щоб переконатися, що T задовольняє рівняння (1), досить перевірити відповідну рівність на функціях із повної в $\mathcal{H}(G_1)$ системи $\{E^{(1)}_\lambda(z) : \lambda \in \mathbb{C}\}$. З (10), (9), (13), (12) і (3) випливає, що характеристична функція $t(\lambda, z) = (TE^{(1)}_\lambda)(z)$ оператора T задовольняє співвідношення (2), звідки матимемо, що $\left(T\mathcal{I}_{\varrho_1,\mu_1} E^{(1)}_\lambda\right)(z) = \left(\mathcal{I}_{\varrho_2,\mu_2} T E^{(1)}_\lambda\right)(z)$, якщо лише зауважити, що

$$T1 = \frac{\Gamma(\mu_2)}{\Gamma(\mu_1)}[\varphi * (B1)] = \frac{\Gamma(\mu_2)}{\Gamma(\mu_1)} \left[\varphi * \left(\frac{\Gamma(\mu_1)}{\Gamma(\mu_2)}\right)\right] = \varphi * 1 = \varphi.$$

Теорему доведено.

Зауваження 1. Якщо $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ і $G_1 = G_2 = G$, то оператор B збігається з тотожним оператором у просторі $\mathcal{H}(G)$ і формула (11) дає загальний вигляд переставних з $\mathcal{I}_{\varrho,\mu}$ в $\mathcal{H}(G)$ операторів T, отриманий в [1].

Зауваження 2. Якщо оператори $\mathcal{I}_{\varrho_1,\mu_1}$ в $\mathcal{H}(G_1)$ та $\mathcal{I}_{\varrho_2,\mu_2}$ в $\mathcal{H}(G_2)$ еквівалентні, то, за доведеним вище, з рівності (1) випливає, що $\varrho_1 \geq \varrho_2$. Подібно, з рівності $T^{-1}\mathcal{I}_{\varrho_2,\mu_2} = \mathcal{I}_{\varrho_1,\mu_1}T^{-1}$ випливає, що $\varrho_2 \geq \varrho_1$. Тому $\varrho_1 = \varrho_2$. Але тоді $G_1 \supset G_2$ і $G_2 \supset G_1$. Тому, $G_1 = G_2$. Отже, з доведеної у цій статті теореми випливають необхідні умови еквівалентності операторів $\mathcal{I}_{\varrho_1,\mu_1}$ в $\mathcal{H}(G_1)$ та $\mathcal{I}_{\varrho_2,\mu_2}$ в $\mathcal{H}(G_2)$, які, як доведно в [2], є також достатніми.

ЛІТЕРАТУРА

1. Линчук Н.Е. *Представление коммутантов оператора обобщенного интегрирования Гельфонда-Леонтьева* // Изв. вузов. Математика. – 1985. – №5. – С.72–74.
2. Звоздецький Т.І. *Еквівалентність двох операторів узагальненого інтегрування у просторі аналітичних функцій* // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту. Математика. – Вип. 160. – 2003. – С.73–75.
3. Линчук Н.Е. *Представление решений некоторых операторных уравнений в аналитических пространствах и их применения,* Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1987. – 121 с.
4. Линчук С.С. *Диагональные операторы в пространствах аналитических функций и их приложения* // Актуальные вопросы теории функций: Сб. научн. тр. – Ростов н/Д, 1987. – С.118–121.

Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича
вул. Коцюбинського 2, м. Чернівці, 58012
mathan@chnu.cv.ua

Надійшло 16.09.2003