УДК 517.986

Я. В. Микитюк

ФАКТОРИЗАЦІЯ ФРЕДГОЛЬМОВИХ ОПЕРАТОРІВ

Ya. V. Mykytyuk. *Factorization of Fredholm operators*, Matematychni Studii, **20** (2003) 185–199.

We consider a factorization problem for Fredholm operators along the chains of orthogonal projectors in Banach operator algebras and describe a class of such algebras in which the factorization problem has a solution.

Я. В. Микитюк. *Факторизация операторов Фредгольма* // Математичні Студії. – 2003. – Т.20, №2. – С.185–199.

Изучается проблема факторизации фредгольмовых операторов вдоль непрерывной цепочки ортопроекторов в банаховых алгебрах операторов. Описан класс банаховых алгебр, в которых задача факторизации имеет решение.

1. Вступ. Нехай H — гільбертів простір, а $\mathfrak{P}$ — повний ланцюжок ортопроекторів $P\colon H \to H$. Ланцюжок $\mathfrak{P}$ породжує *трансформатори* трикутної зрізки $\mathcal{P}^+$ і $\mathcal{P}^- = I-\mathcal{P}^+$, що діють в алгебрі $\mathcal{B}_\infty(H)$ компактних операторів. Позначимо через Σ множину всіх банахових алгебр $\mathfrak{S} \subset \mathcal{B}_\infty(H)$, в яких є неперервними трансформатори $\mathcal{P}^\pm$. Для алгебри $\mathfrak{S} \in \Sigma$ покладемо $\mathfrak{S}^\pm = \mathcal{P}^\pm\mathfrak{S}$. Тоді $\mathfrak{S}^+$ і $\mathfrak{S}^-$ є замкненими підалгебрами в $\mathfrak{S}$, що складаються з вольтерових операторів і

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}^+ \dot{+} \mathfrak{S}^-.$$

Нехай $\mathfrak{S} \in \Sigma$ і $Q \in \mathfrak{S}$. Ми будемо говорити, що оператор $I-Q$ допускає факторизацію в $\mathfrak{S}$, якщо його можна подати у вигляді

$$I - Q = (I + K_-)^{-1}(I + K_+)^{-1}, \tag{1.1}$$

де $K_+ \in \mathfrak{S}^+$, $K_- \in \mathfrak{S}^-$. Зауважимо, що оператори $K_\pm = K_\pm(Q)$ однозначно визначаються оператором Q.

Факторизація вигляду (1.1) відіграє важливу роль в цілому ряді питань. Зокрема, при розв'язуванні інтегральних рівнянь та обернених задач спектральної теорії. Перша робота з факторизації фредгольмових операторів належить М. Г. Крейну [1]. В ній розглядався випадок, коли $H = L_2(a,b)$ і $\mathfrak{S} = \mathcal{B}_2(H)$, де $\mathcal{B}_2(H)$ — клас операторів Гільберта-Шмідта. Потім у статті І. Ц. Гохберга і М. Г. Крейна [2] вивчалася загальна

2000 *Mathematics Subject Classification:* 47A68, 47A46.

задача факторизації операторів $I-Q$ в симетрично нормованих ідеалах (с.н. ідеалах). Зокрема, доведено ([2]), що умова

$$\forall P \in \mathfrak{P} \qquad \operatorname{Ker}(I - PQP) = \{0\} \tag{Ψ}$$

є необхідною і достатньою для факторизації оператора $I - Q$ в ідеалах Неймана-Шаттена $\mathcal{B}_p(H)$, $p \in (1, \infty)$. В подальшому теорія факторизації розвивалася у різноманітних напрямках (див. наприклад, [5]–[8]). Детальний виклад базових положень теорії факторизації можна знайти у книгах [3], [4]. Однак, проблема факторизації в банахових алгебрах, які не є с.н. ідеалами залишається мало вивченою. Найбільш відомим і, можливо, єдиним прикладом алгебри, яка не є с.н. ідеалом і для якої задача факторизації детально вивчена, є алгебра інтегральних операторів з неперервним ядром ([3, розд. 5]). Поштовхом до написання даної статті послужила задача факторизації в деяких спеціальних банахових алгебрах, що не є с.н. ідеалами і виникають при розв'язуванні оберненої спектральної задачі для оператора Штурма-Ліувілля з сингулярним потенціалом. Нас цікавили відповіді на три наступні запитання, які ми сформулюємо для абстрактної банахової алгебри $\mathfrak{S} \subset \mathcal{B}_\infty(H)$.

1) Чи є умова (Ψ) необхідною і достатньою для факторизації оператора $I-Q$, $(Q \in \mathfrak{S})$ в алгебрі $\mathfrak{S}$?
2) Чи неперервні відображення $\mathfrak{S} \ni Q \mapsto K_\pm(Q) \in \mathfrak{S}$?
3) Наскільки "масивна" в $\mathfrak{S}$ множина $\Gamma_\mathfrak{S}$ тих $Q \in \mathfrak{S}$, для яких оператор $I - Q$ не допускає факторизації в $\mathfrak{S}$?

У цій статті зроблено спробу знайти відповіді на сформульовані вище запитання. Отримані тут абстрактні результати не є вичерпними, однак, їх можна досить ефективно застосовувати до конкретних алгебр. Прикладів таких застосувань виявилося досить багато, і тому це стане об'єктом розгляду окремої статті.

Опишемо коротко суть отриманих результатів. Для банахової алгебри $\mathfrak{S} \in \Sigma$ через $\Phi_\mathfrak{S}$ позначимо множину всіх тих $Q \in \mathfrak{S}$, для яких оператор $I-Q$ допускає факторизацію в $\mathfrak{S}$, а через $\Psi_\mathfrak{S}$ множину всіх тих $Q \in \mathfrak{S}$, для яких виконується умова (Ψ). Щоб дати відповідь на запитання 1) потрібно вказати критерій належності алгебри $\mathfrak{S}$ до класу

$$\Sigma_f := \{\mathfrak{S} \in \Sigma : \Phi_\mathfrak{S} = \Psi_\mathfrak{S}\}.$$

На жаль, знайти такий критерій не вдалося. Невідомо навіть чи включення $\Sigma_f \subset \Sigma$ є строгим. Однак, вдалося знайти прості достатні умови (теорема 3.2), що забезпечують належність $\mathfrak{S}$ до класу Σ_f. Зауважимо також, що всі ідеали $\mathcal{B}_p(H)$, $p \in (1, \infty)$, належать до Σ_f.

На запитання 2) можна дати повнішу відповідь. Виявляється, що для довільних $\mathfrak{S} \in \Sigma$ множина $\Phi_\mathfrak{S}$ відкрита, а відображення

$$\Phi_\mathfrak{S} \ni Q \mapsto K_\pm(Q) \in \mathfrak{S}$$

локально ліпшицеві (теорема 3.3).

У зв'язку із запитанням 3) розглянемо клас Σ^0, що складається з тих алгебр $\mathfrak{S} \in \Sigma$, для яких множина $\mathfrak{S} \cap \mathcal{B}_0(H)$ скрізь щільна в банаховій алгебрі $\mathcal{B}_\infty(H)$. Тут $\mathcal{B}_0(H)$ — множина операторів скінченного рангу. Виявляється, що коли $\mathfrak{S} \in \Sigma_f \cap \Sigma^0$, то множина $\Gamma_\mathfrak{S}$ ніде не щільна в $\mathfrak{S}$. Більше того, з неї можна вийти за допомогою довільно малих за нормою спеціальних скінченновимірних збурень (теорема 3.4).

Статтю побудовано у наступний спосіб. В п.2 ми коротко викладаємо основні означення та факти теорії факторизації фредгольмових операторів з монографій [3], [4]. Далі, в п.3 ми формулюємо основні результати статті, а в пп. 4 та 5 подаємо доведення.

2. Попередні відомості. Надалі H — сепарабельний нескінченновимірний гільбертів простір з нормою $\|\cdot\|$. Через $\mathcal{B}(H)$ ми позначаємо банахову алгебру всіх лінійних неперервних скрізь заданих операторів, що діють в H. Відповідно $\mathcal{B}_\infty(H)$ — банахова алгебра всіх компактних операторів з $\mathcal{B}(H)$, а $\mathcal{B}_0(H)$ — лінійний простір всіх скінченновимірних операторів з $\mathcal{B}(H)$. Крім цього, вживатимемо скорочення: $\mathcal{B} := \mathcal{B}(H)$, $\mathcal{B}_\infty := \mathcal{B}_\infty(H)$, $\mathcal{B}_0 := \mathcal{B}_0(H)$.

2.1. Ланцюжки. Множину ортопроекторів $\mathfrak{P} \subset \mathcal{B}$ назвемо *ланцюжком*, якщо для довільної пари $P_1, P_2 \in \mathfrak{P}$ або $P_1 < P_2$ або $P_2 < P_1$.

Ланцюжок називається *замкненим*, якщо він є замкненою множиною в сильній операторній топології.

Замкнений ланцюжок називається *неперервним*, якщо для довільної пари $P_1, P_2 \in \mathfrak{P}$ $(P_1 < P_2)$, існує $P \in \mathfrak{P}$ таке, що $P_1 < P < P_2$.

Ланцюжок $\mathfrak{P}$ назвемо *повним*, якщо він є неперервним і $0, I \in \mathfrak{P}$.

Строго зростаюча проекторнозначна функція $[0,1] \ni t \mapsto P(t)$ називається *параметризацією ланцюжка* $\mathfrak{P}$, якщо ланцюжок $\mathfrak{P}$ збігається з множиною значень функції $P(\cdot)$. *Параметризацію* $P(\cdot)$ ланцюжка $\mathfrak{P}$ назвемо *гладкою*, якщо для кожного $f \in H$ функція $t \mapsto (P(t)f|f)$ абсолютно неперервна на $[0,1]$.

Теорема 2.1 ([3]). *Кожен повний ланцюжок допускає гладку параметризацію.*

Всюди надалі $\mathfrak{P}$ — деякий повний ланцюжок, а $[0,1] \ni t \mapsto P(t)$ — фіксована гладка параметризація ланцюжка $\mathfrak{P}$.

Для операторної функції $F\colon \mathfrak{P} \to \mathcal{B}$ через

$$\int\limits_{\mathfrak{P}} F(P)\,dP\ , \qquad \int\limits_{\mathfrak{P}} dP\,F(P)$$

ми позначаємо інтеграли Рімана-Стільтьєса за ланцюжком $\mathfrak{P}$ (див. [3],[4]).

2.2. Трансформатори трикутної зрізки. Приймемо за означенням

$$\mathcal{B}^+ := \{B \in \mathcal{B} : \forall P \in \mathfrak{P} \quad (I-P)BP = 0\},$$
$$\mathcal{B}^- := \{B \in \mathcal{B} : \forall P \in \mathfrak{P} \quad PB(I-P) = 0\}.$$

Оператор $B \in \mathcal{B}^+ (B \in \mathcal{B}^-)$ назвемо верхньо трикутним (нижньо трикутним) відносно ланцюжка $\mathfrak{P}$.

Позначимо через $\mathcal{B}_p := \mathcal{B}_p(H)(1 \le p \le \infty)$ ідеали Неймана-Шаттена і нехай

$$\mathcal{B}_\infty^+ := \mathcal{B}_\infty \cap \mathcal{B}^+, \quad \mathcal{B}_\infty^- := \mathcal{B}_\infty \cap \mathcal{B}^-.$$

Оператори з $\mathcal{B}_\infty^+$ і $\mathcal{B}_\infty^-$ є вольтеровими (див. [3]). Легко переконатися, що $\mathcal{B}_\infty^+$ і $\mathcal{B}_\infty^-$ замкнені підпростори в $\mathcal{B}_\infty$ і $\mathcal{B}_\infty^+ \cap \mathcal{B}_\infty^- = \{0\}$. Позначимо через $\mathcal{P}^+(\mathcal{P}^-)$ проектор, що проектує лінійний простір

$$\widetilde{\mathcal{B}}_\infty := \mathcal{B}_\infty^+ \dot{+} \mathcal{B}_\infty^-$$

на $\mathcal{B}_\infty^+(\mathcal{B}_\infty^-)$ паралельно до $\mathcal{B}_\infty^-(\mathcal{B}_\infty^+)$. Оператори $\mathcal{P}^+, \mathcal{P}^-$ називаються трансформаторами трикутної зрізки. Термін *трансформатор*, запропонований І. Ц. Гохбергом і М. Г. Крейном для операторів, що діють з одної операторної алгебри в іншу. Домовимося, що якщо $\mathcal{T}\colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ — деякий трансформатор з областю визначення $\mathfrak{D}(\mathcal{T})$ і $\mathfrak{S}_I, \mathfrak{S}_{II}$ — вкладені в $\mathcal{B}$ банахові простори, то запис $\mathcal{T} \in (\mathfrak{S}_I, \mathfrak{S}_{II})$ означатиме, що:

1) $\mathfrak{S}_I \subset \mathfrak{D}(\mathcal{T}), \quad \mathcal{T}(\mathfrak{S}_I) \subset \mathfrak{S}_{II}$;

2) звуження $\mathcal{T}$ на $\mathfrak{S}_I$ — неперервний оператор, який діє з $\mathfrak{S}_I$ в $\mathfrak{S}_{II}$.

Відомо ([3]), що оператори $\mathcal{P}^+, \mathcal{P}^-$ — неперервні проектори в ідеалах $\mathcal{B}_p$, $(1 < p < \infty)$ і $\mathcal{P}^\pm \in (\mathcal{B}_\omega, \mathcal{B}_\infty)$, де $\mathcal{B}_\omega$ — ідеал Мацаєва. Для трансформаторів $\mathcal{P}^+, \mathcal{P}^-$ правильні рівності

$$\mathcal{P}^+(K) + \mathcal{P}^-(K) = K, \qquad K \in \widetilde{\mathcal{B}}_\infty,$$

$$\mathcal{P}^\pm = \mathcal{I}\mathcal{P}^\mp\mathcal{I}, \tag{2.1}$$

де $\mathcal{I}$ — задана формулою $\mathcal{I}(K) = K^*$ інволюція в алгебрі $\mathcal{B}$.

Зауваження 2.2. Трансформатори $\mathcal{P}^+, \mathcal{P}^-$, зрозуміло, залежать від вибору ланцюжка $\mathfrak{P}$ (який вважається фіксованим). Їх ми розглядаємо як оператори, що діють в $\mathcal{B}$ і область визначення яких збігається з $\widetilde{\mathcal{B}}_\infty$.

Означення 2.3 ([3]). *Симетрично-нормованим ідеалом* (с.н. ідеалом) алгебри $\mathcal{B}$ називається кожний двосторонній ідеал $\mathfrak{S}$, в якому визначена своя норма $\|\cdot\|_{\mathfrak{S}}$, що перетворює $\mathfrak{S}$ в повний банахів простір, при цьому

$$\|AXB\|_{\mathfrak{S}} \le \|A\|_{\mathcal{B}}\|X\|_{\mathfrak{S}}\|B\|_{\mathcal{B}} \qquad (A, B, \in \mathcal{B},\ X \in \mathfrak{S})$$

і $\|X\|_{\mathfrak{S}} = \|X\|_{\mathcal{B}}$ для довільного одновимірного оператора $X \in \mathfrak{S}$.

Зауваження 2.4. Кожен с.н. ідеал $\mathfrak{S}$ містить $\mathcal{B}_0$. При цьому щільність $\mathcal{B}_0$ в $\mathfrak{S}$ є необхідною і достатньою умовою сепарабельності $\mathfrak{S}$. Зокрема, ідеали $\mathcal{B}_p$ $(p \ge 1)$ є прикладами сепарабельних с.н. ідеалів.

2.3. Теорема Гохберга-Крейна про факторизацію. Нехай $\mathfrak{S}$ — вкладена в $\mathcal{B}_\infty$ банахова алгебра. Ми будемо говорити, що оператор $I - Q$, $Q \in \mathfrak{S}$ факторизується в $\mathfrak{S}$, якщо $I - Q = (I + K_-)^{-1}(I + K_+)^{-1}$, де $K_\pm \in \mathcal{B}_\infty^\pm \cap \mathfrak{S}$.

Приймемо

$$\mathcal{W}^+ = \{I + R_+ : R_+ \in \mathcal{B}_\infty^+\}, \qquad \mathcal{W}^- = \{I + R_- : R_- \in \mathcal{B}_\infty^-\},$$

$$\mathcal{W} := \{V = V_- V_+ : V_+ \in \mathcal{W}^+, V_- \in \mathcal{W}^-\}.$$

Легко переконатися, що $\mathcal{W}^+$ і $\mathcal{W}^-$ є підгрупами в групі оборотних операторів, при цьому $\mathcal{W}^+ \cap \mathcal{W}^- = \{I\}$. Звідси, зокрема, випливає, що кожен оператор $V \in \mathcal{W}$ однозначно записується у вигляді добутку

$$V = U_-^{-1}U_+^{-1}, \qquad U_+ \in \mathcal{W}^+,\ U_- \in \mathcal{W}^-. \tag{2.2}$$

Розглянемо множини

$$\begin{aligned} \Phi &:= \{Q = I - V : \quad V \in \mathcal{W}\}, \\ \Psi &:= \{Q \in \mathcal{B}_\infty : \forall P \in \mathfrak{P} \quad \operatorname{Ker}(I - PQP) = \{0\}\}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

З результатів монографії [3] випливає, що справедлива наступна лема.

Лема 2.5. *1)* $\Phi \subset \Psi$, *2)* $\mathcal{B}_\omega \cap \Psi \subset \Phi$.

І на завершення сформулюємо загальну факторизаційну теорему з [3].

Теорема 2.6 ([3]). *Для того, щоб* $Q \in \Phi$ *необхідно і досить, щоб* $Q \in \Psi$ *і збігався в рівномірній операторній топології хоча б один з інтегралів*

$$K_+(Q) := \int_{\mathfrak{P}} (I - PQP)^{-1} PQ\, dP, \qquad K_-(Q) := \int_{\mathfrak{P}} dP\, QP(I - PQP)^{-1}.$$

Якщо хоча б один з цих інтегралів збігається, то збігається і другий, при цьому $K_\pm(Q) \in \mathcal{B}_\infty^\pm$ *і* $I - Q = (I + K_-(Q))^{-1}(I + K_+(Q))^{-1}$.

3. Формулювання основних результатів. Кожному $Q \in \mathcal{B}_\infty$ поставимо у відповідність трансформатори $\mathcal{M}_Q$ і $\mathcal{M}^Q$, які діють в $\mathcal{B}$ за формулами

$$\mathcal{M}_Q(R) := \mathcal{P}^+(QR), \qquad \mathfrak{D}(\mathcal{M}_Q) := \{X \in \mathcal{B} : QX \in \widetilde{\mathcal{B}}_\infty\},$$

$$\mathcal{M}^Q(R) := \mathcal{P}^-(RQ), \qquad \mathfrak{D}(M^Q) := \{X \in \mathcal{B} : XQ \in \widetilde{\mathcal{B}}_\infty\}.$$

Приймаючи до уваги (2.1), отримуємо, що

$$\mathcal{M}^Q = \mathcal{I}\mathcal{M}_{Q^*}\mathcal{I}, \qquad Q \in \mathcal{B}_\infty. \tag{3.1}$$

З властивостей трансформаторів $\mathcal{P}^\pm$ (див. п.2) випливає, що для довільного $Q \in \mathcal{B}_\omega$

$$\mathcal{M}_Q, \mathcal{M}^Q \in (\mathcal{B}, \mathcal{B})$$

і для довільного $Q \in \mathcal{B}_\infty$

$$\mathcal{M}_Q, \mathcal{M}^Q \in (\mathfrak{S}, \mathfrak{S}),$$

де $\mathfrak{S}$ — довільний с.н. ідеал, в якому неперервні трансформатори $\mathcal{P}^\pm$.

Трансформатори $\mathcal{M}_Q$ та $\mathcal{M}^Q$ вперше з'явилися в роботах І. Ц. Гохберга та М. Г. Крейна (див. [3, стор.206]). Суть їхнього зв'язку з факторизацією оператора $I - Q$ пояснює наступне твердження (див. також [4, Ch.XXII.8]).

Твердження 3.1. *Нехай* $Q \in \widetilde{\mathcal{B}}_\infty$ *і* $Q_+ = \mathcal{P}^+(Q)$, $Q_- = \mathcal{P}^-(Q)$. *Для того, щоб* $Q \in \Phi$ *необхідно і досить, щоб хоча б одне з рівнянь*

$$(I - \mathcal{M}_Q)(K) = Q_+\,, \qquad K \in \mathfrak{D}(\mathcal{M}_Q), \tag{3.2}$$

$$(I - \mathcal{M}^Q)(K) = Q_-\,, \qquad K \in \mathfrak{D}(\mathcal{M}^Q), \tag{3.3}$$

мало розв'язок. Якщо одне з рівнянь (3.2), (3.3) має розв'язок, то виконуються співвідношення

$$\operatorname{Ker}(I - \mathcal{M}_Q) = \{0\}, \qquad Q_+ \in \operatorname{Im}(I - \mathcal{M}_Q), \tag{3.4}$$

$$\operatorname{Ker}(I - \mathcal{M}^Q) = \{0\}, \qquad Q_- \in \operatorname{Im}(I - \mathcal{M}^Q), \tag{3.5}$$

тобто обидва рівняння мають єдині розв'язки

$$K_+(Q) = (I - \mathcal{M}_Q)^{-1}(Q_+), \qquad K_-(Q) = (I - \mathcal{M}^Q)^{-1}(Q_-)$$

відповідно, при цьому $I - Q = (I + K_-(Q))^{-1}(I + K_+(Q))^{-1}$.

Основні результати цієї статті сформулюємо у вигляді трьох теорем. Почнемо з теореми про достатні умови належності до класу Σ_f.

Теорема 3.2. *1) Нехай $\mathfrak{S}_1 \in \Sigma_f$, $\mathfrak{S} \in \Sigma$. Якщо $\mathfrak{S}$ — правосторонній (лівосторонній) ідеал в $\mathfrak{S}_1$, то $\mathfrak{S} \in \Sigma_f$.*

2) Нехай $\mathfrak{S}_1 \in \Sigma_f$, $\mathfrak{S} \in \Sigma$ і $\mathfrak{S}_1$ — двосторонній ідеал в $\mathfrak{S}$. Якщо $\mathfrak{S}_1$ всюди щільний в $\mathfrak{S}$, то $\mathfrak{S} \in \Sigma_f$.

3) Нехай $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2 \in \Sigma_f$, $\mathfrak{S} \in \Sigma$ і $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}_2$. Тоді $\mathfrak{S} \in \Sigma_f$.

Властивості відображень $Q \mapsto K_\pm(Q)$ описує наступна теорема

Теорема 3.3. *Нехай $\mathfrak{S} \in \Sigma$. Тоді множина $\Phi_\mathfrak{S}$ відкрита в $\mathfrak{S}$, а відображення*

$$\Phi_\mathfrak{S} \ni Q \mapsto K_\pm(Q) \in \mathfrak{S}$$

локально ліпшицеві.

Нагадаємо, що через Σ^0 ми позначаємо клас, що складається з тих алгебр $\mathfrak{S} \in \Sigma$, для яких множина $\mathfrak{S} \cap \mathcal{B}_0$ всюди щільна в банаховій алгебрі $\mathcal{B}_\infty$. Позначимо

$$\Sigma_f^0 := \Sigma_f \cap \Sigma^0.$$

Теорема 3.4. *1) Нехай $Q \in \Phi$ і $Q_1 \in \mathcal{B}_0$. Тоді множина*

$$\Lambda := \{\lambda \in \mathbb{C} : (Q + \lambda Q_1) \notin \Phi\}$$

замкнена і $\mu(\Lambda) = 0$, де μ — міра Лебега в $\mathbb{C}$.

2) Нехай $\mathfrak{S} \in \Sigma_f$, $Q \in \mathfrak{S}$ і $Q_1 \in \mathcal{B}_0 \cap \mathfrak{S}$. Якщо $\|Q - Q_1\|_\mathcal{B} < 1$, то існують довільно малі за модулем числа $\lambda \in \mathbb{C}$, для яких $(Q + \lambda Q_1) \in \Phi_\mathfrak{S}$.

3) Нехай $\mathfrak{S} \in \Sigma_f^0$. Тоді множина $\Phi_\mathfrak{S}$ всюди щільна в $\mathfrak{S}$.

4.1. Доведення теореми 3.3. Почнемо з доведення твердження 3.1.

Доведення твердження 3.1. Нехай $Q \in \widetilde{\mathcal{B}}_\infty$. Припустимо, що рівняння (3.2) має розв'язок K_+. Тоді, очевидно, що $K_+ \in \mathcal{B}_\infty^+$ і

$$\mathcal{P}^+(K_+ - QK_+ - Q) = 0.$$

Звідки випливає, що оператор $R_- := K_+ - QK_+ - Q$ належить до $\mathcal{B}_\infty^-$ і

$$(I - Q)(I + K_+) = (I + R_-).$$

Оскільки оператор $K_- := (1 + R_-)^{-1} - I$ теж належить до $\mathcal{B}_\infty^-$, то

$$I - Q = (I + K_-)^{-1}(I + K_+)^{-1} \tag{4.1}$$

і, отже, $Q \in \Phi$. Зауважимо, що якщо б рівняння (3.2) мало більше, ніж один розв'язок, то це суперечило б єдиності зображення оператора $I - Q$ у вигляді (2.2). Отже, виконуються співвідношення (3.4). З рівності 4.1 випливає, що

$$\mathcal{P}^-(K_- - K_-Q - Q) = 0,$$

тобто оператор K_- є розв'язком рівняння (3.3). Цей розв'язок теж єдиний з огляду на єдиність зображення оператора $I-Q$ у вигляді (2.2). Отже, виконуються співвідношення (3.5).

Подібно доводимо, що з існування розв'язку рівняння (3.3) випливає, що виконуються співвідношення (3.4), (3.5) і $Q \in \Phi$.

Припустимо тепер, що $Q \in \Phi$. Тоді для деяких $K_+ \in \mathcal{B}_\infty^+, K_- \in \mathcal{B}_\infty^-$ виконується рівність (4.1). Зі сказаного вище випливає, що оператор K_- є розв'язком рівняння (3.3). □

Доведення теореми 3.3. Нехай

$$S_t := \{Q \in \mathfrak{S} : \quad \|Q\|_{\mathfrak{S}} \leq t\}, \qquad t > 0, \tag{4.2}$$

і

$$c := \max\{\|\mathcal{P}^+\|_{\mathfrak{S}\to\mathfrak{S}}, \|\mathcal{P}^-\|_{\mathfrak{S}\to\mathfrak{S}}\}, \qquad r := \frac{1}{2c}.$$

З означення оператора $\mathcal{M}_Q$ випливає, що

$$\|\mathcal{M}_Q\|_{\mathfrak{S}\to\mathfrak{S}} \leq c\|Q\|_{\mathfrak{S}}. \tag{4.3}$$

Тому для всіх $Q \in S_r$

$$\|\mathcal{M}_Q\|_{\mathfrak{S}\to\mathfrak{S}} \leq \frac{1}{2}, \qquad \|(I-\mathcal{M}_Q)^{-1}\|_{\mathfrak{S}\to\mathfrak{S}} \leq 2. \tag{4.4}$$

Звідси, приймаючи до уваги тотожність

$$(I-\mathcal{M}_{Q_1})^{-1} - (I-\mathcal{M}_{Q_2})^{-1} = (I-\mathcal{M}_{Q_1})^{-1}\mathcal{M}_{(Q_1-Q_2)}(I-\mathcal{M}_{Q_2})^{-1}, \qquad Q_1, Q_2 \in S_r,$$

отримуємо нерівність

$$\|(I-\mathcal{M}_{Q_1})^{-1} - (I-\mathcal{M}_{Q_2})^{-1}\|_{\mathfrak{S}} \leq 4c\|Q_1 - Q_2\|_{\mathfrak{S}}, \qquad Q_1, Q_2 \in S_r. \tag{4.5}$$

Згідно з твердженням 3.1 $S_r \subset \Phi_{\mathfrak{S}}$ і для довільних $Q_1, Q_2 \in S_r$ виконується рівність

$$K_+(Q_1) - K_+(Q_2) = \big((I-\mathcal{M}_{Q_1})^{-1} - (I-\mathcal{M}_{Q_2})^{-1}\big)\mathcal{P}^+Q_1 + (I-\mathcal{M}_{Q_2})^{-1}\mathcal{P}^+(Q_1-Q_2),$$

з якої, з врахуванням нерівностей (4.4) і (4.5), отримуємо, що

$$\|K_+(Q_1) - K_+(Q_2)\|_{\mathfrak{S}} \leq 4c\|Q_1 - Q_2\|_{\mathfrak{S}}, \qquad Q_1, Q_2 \in S_r. \tag{4.6}$$

Отже, відображення $S_r \ni Q \mapsto K_+(Q) \in \mathfrak{S}$ є ліпшицевим.

Нехай тепер $Q_0 \in \Phi_{\mathfrak{S}}$. Позначимо

$$c_1 := (1 + \|K_+(Q_0)\|_{\mathfrak{S}})(1 + \|K_-(Q_0)\|_{\mathfrak{S}}), \qquad r_1 := \frac{r}{c_1}.$$

Тоді для відображення $\eta\colon \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}$, заданого формулою

$$\eta(R) := (I + K_-(Q_0))R(I + K_+(Q_0)), \qquad R \in \mathfrak{S},$$

виконується оцінка

$$\|\eta(R_1) - \eta(R_2)\|_{\mathfrak{S}} \leq c_1\|R_1 - R_2\|_{\mathfrak{S}}, \qquad R_1, R_2 \in \mathfrak{S}, \tag{4.7}$$

і, зокрема, $\eta(R) \in S_r$ для довільних $R \in S_{r_1}$. Тому для довільних $R \in S_{r_1}$

$$I - Q_0 - R = \Big(I + K_-(Q_0)\Big)^{-1}\Big(I - \eta(R)\Big)\Big(I + K_+(Q_0)\Big)^{-1} = \\ = \Big(I + K_-(Q_0)\Big)^{-1}\Big(I + K_-(\eta(R))\Big)^{-1}\Big(I + K_+(\eta(R))\Big)^{-1}\Big(I + K_+(Q_0)\Big)^{-1},$$

а, отже, $(Q_0 + R) \in \Phi$ і

$$K_+(Q_0 + R) = (I + K_+(Q_0))(I + K_+(\eta(R))) - I.$$

Звідси, приймаючи до уваги (4.6) і (4.7), отримуємо, що

$$\|K_+(Q_0 + R_1) - K_+(Q_0 + R_2)\|_{\mathfrak{S}} \leq \\ \leq 4c\|I + K_+(Q_0)\|_{\mathfrak{S}}\|\eta(R_1) - \eta(R_2)\|_{\mathfrak{S}} \leq 4cc_1^2\|R_1 - R_2\|_{\mathfrak{S}}, \qquad R_1, R_2 \in S_{r_1}.$$

Тим самим ми довели, що множина $\Phi_{\mathfrak{S}}$ є відкритою в $\mathfrak{S}$, а відображення

$$\Phi_{\mathfrak{S}} \ni Q \mapsto K_+(Q) \in \mathfrak{S}$$

локально ліпшицеве. Подібно доводимо, що локально ліпшицевим є відображення

$$\Phi_{\mathfrak{S}} \ni Q \mapsto K_-(Q) \in \mathfrak{S}.$$

□

4.2. Доведення теореми 3.2. Для доведення теореми 3.2 нам потрібна наступна лема.

Лема 4.1. *Нехай $\mathfrak{S} \in \Sigma$, а оператори $Q, \widetilde{Q} \in \mathcal{B}_\infty$ пов'язані рівністю*

$$I - \widetilde{Q} = (I + M_-)(I - Q)(I + M_+),$$

де $M_\pm \in \mathcal{B}_\infty^\pm$. Тоді справедливі твердження:

1) $Q \in \Phi \iff \widetilde{Q} \in \Phi$;

2) $Q \in \Psi \iff \widetilde{Q} \in \Psi$.

Доведення. Нагадаємо, що $\mathcal{B}_\infty^+$ і $\mathcal{B}_\infty^-$ — операторні алгебри і оператори $(I + M_+)^{-1} - I$ і $(I + M_-)^{-1} - I$ належать до $\mathcal{B}_\infty^+$ і $\mathcal{B}_\infty^-$ відповідно. Тому справедливість твердження 1) нескладно випливає з означення множини Φ, а для доведення твердження 2) досить довести імплікацію

$$Q \in \Psi \Longrightarrow \widetilde{Q} \in \Psi. \tag{4.8}$$

Для цього залишається окремо розглянути випадки $M_+ = 0$ і $M_- = 0$. Оскільки вони подібні, то ми обмежимося лише випадком $M_+ = 0$.

Отже, нехай $Q \in \Psi$ і $M_+ = 0$. Тоді

$$\widetilde{Q} = Q - M_- + M_-Q.$$

Оскільки $M_- \in \mathcal{B}_\infty^-$, то $PM_- = PM_-P$ для довільних $P \in \mathfrak{P}$ і, отже, правильна рівність

$$I - P\widetilde{Q}P = (I + PM_-P)(I - PQP),$$

з якої, враховуючи, що $Q \in \Psi$ і $-M_- \in \Phi \subset \Psi$, отримуємо оборотність операторів $I - P\widetilde{Q}P$. Тому $\widetilde{Q} \in \Psi$. □

З леми 4.1 випливає наступне твердження.

Наслідок 4.2. *Якщо* $Q \in \Psi$, $R \in \Phi$ *і* $(Q - R) \in \mathcal{B}_\omega$, *то* $Q \in \Phi$.

Доведення. Приймемо

$$\widetilde{Q} = I - (I + K_-(R))(I - Q)(I + K_+(R)).$$

Тоді згідно з лемою 4.1 $\widetilde{Q} \in \Psi$. Очевидно, що

$$\widetilde{Q} = (I + K_-(R))(Q - R)(I + K_+(R))$$

і, отже, $\tilde{Q} \in \mathcal{B}_\omega \cap \Psi$. З огляду на лему 2.5, отримуємо, що $\widetilde{Q} \in \Phi$. Повторне застосування леми 4.1 дає, що $Q \in \Phi$. $\square$

Доведення теореми 3.2. Згідно з лемою 2.5, $\Phi \subset \Psi$, а, отже, $\Phi_{\mathfrak{S}} \subset \Psi_{\mathfrak{S}}$. Тому для того, щоб довести, що алгебра $\mathfrak{S} \in \Sigma$ належить до класу Σ_f, досить довести імплікацію

$$Q \in \Psi_{\mathfrak{S}} \Longrightarrow Q \in \Phi_{\mathfrak{S}}.$$

Зауважимо, що для довільного $Q \in \Phi$ справедливі рівності

$$K_+(Q) = \mathcal{P}^+(Q + QK_+(Q)), \qquad K_-(Q) = \mathcal{P}^-(Q + K_-(Q)Q). \tag{4.9}$$

Доведемо, наприклад, першу рівність. Якщо $Q \in \Phi$, то елементарна перевірка показує, що оператор

$$X = \mathcal{P}^+(Q + QK_+(Q))$$

задовольняє рівняння $(I - \mathcal{M}_Q)X = \mathcal{P}^+Q$. Згідно з твердженням 3.1 це рівняння має єдиний розв'язок і він дорівнює $K_+(Q)$. Отже, $X = K_+(Q)$. Подібно доводиться друга рівність.

1) Нехай $\mathfrak{S}_1 \in \Sigma_f$ і $\mathfrak{S} \in \Sigma$. Обмежимося розглядом випадку, коли $\mathfrak{S}$ є правостороннім ідеалом в $\mathfrak{S}_1$. Випадок, коли $\mathfrak{S}$ — лівосторонній ідеал в $\mathfrak{S}_1$, розглядається подібно.

Виберемо довільний оператор $Q \in \Psi_{\mathfrak{S}}$. Тоді $Q \in \Psi_{\mathfrak{S}_1}$ і, отже, $Q \in \Phi$, $K_\pm(Q) \in \mathfrak{S}_1$. Оскільки $\mathfrak{S}$ — правосторонній ідеал в $\mathfrak{S}_1$, то оператор $Q + QK_+(Q)$ належить до $\mathfrak{S}$. Тому, враховуючи (4.9), маємо, що $K_+(Q) \in \mathfrak{S}$. З означення операторів $K_\pm(Q)$ випливає, що

$$(I - Q)(I + K_+(Q))(I + K_-(Q)) = I$$

і, отже,

$$K_-(Q) = QK_+(Q)K_-(Q) + QK_-(Q) + QK_+(Q) + Q - K_+(Q)K_-(Q)) - K_+(Q).$$

З останньої рівності, приймаючи до уваги, що $\mathfrak{S}$ — правосторонній ідеал в $\mathfrak{S}_1$ і $Q, K_+(Q) \in \mathfrak{S}$, отримуємо, що $K_-(Q) \in \mathfrak{S}$. Отже, $Q \in \Phi_{\mathfrak{S}}$, тобто твердження 1) доведено.

2) Нехай $\mathfrak{S} \in \Sigma$, $\mathfrak{S}_1 \in \Sigma_f$ — двосторонній ідеал в $\mathfrak{S}$ і $\mathfrak{S}_1$ всюди щільний в $\mathfrak{S}$. Зауважимо, що згідно з теоремою 3.3, існує $r > 0$ таке, що куля S_r (див. (4.2)), міститься в $\Phi_{\mathfrak{S}}$. Нехай $Q \in \Psi_{\mathfrak{S}}$. Оскільки $\mathfrak{S}_1$ всюди щільний в $\mathfrak{S}$, то існує оператор $R \in S_r$ такий, що $(Q - R) \in \mathfrak{S}_1$. Приймемо

$$\widetilde{Q} = (I + K_-(R))(Q - R)(I + K_+(R)).$$

Тоді
$$I - \widetilde{Q} = (I + K_-(R))(I - Q)(I + K_+(R)).$$
Оскільки $(Q - R) \in \mathfrak{S}_1$, $K_\pm(R) \in \mathfrak{S}$ і $\mathfrak{S}_1$ є двостороннім ідеалом в $\mathfrak{S}$, то $\widetilde{Q} \in \mathfrak{S}_1$. Крім того, з леми 4.1 випливає, що $\widetilde{Q} \in \Psi$. Але $\mathfrak{S}_1 \in \Sigma_f$, а, отже, $\widetilde{Q} \in \Phi_{\mathfrak{S}_1}$. Зі сказаного робимо висновок, що
$$I - Q = (I + K_-(R))^{-1}(I + K_-(\widetilde{Q}))^{-1}(I + K_+(\widetilde{Q}))^{-1}(I + K_+(R))^{-1}.$$
Тому $K_\pm(Q) \in \mathfrak{S}$ і, отже, $Q \in \Phi_{\mathfrak{S}}$. Твердження 2) доведено.

3) Нехай $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2 \in \Sigma_f$, $\mathfrak{S} \in \Sigma$ і $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}_2$. Виберемо довільний оператор $Q \in \Psi_{\mathfrak{S}}$. Тоді, очевидно, $K_\pm(Q) \in \mathfrak{S}_j$ $(j = 1, 2)$, і, отже, $K_\pm(Q) \in \mathfrak{S}$. Отже, $Q \in \Phi_{\mathfrak{S}}$. Твердження 3) доведено. □

5. Доведення теореми 3.4. Доведення теореми ми розіб'ємо на три частини, які оформимо у вигляді окремих кроків.

5.1. Крок 1.

Означення 5.1. Нехай X — банахів простір. Для функції $f\colon [0,1] \to X$ і розбиття $\tau = (t_j)_{j=0}^{j=n}$ проміжка $[0,1]$ покладемо
$$S_2(f, \tau) := \sum_{j=1}^{n} \|f(t_j) - f(t_{j-1})\|_X^2.$$
Позначимо через T множину всіх розбиттів τ проміжку $[0,1]$, наділену природним частковим порядком, тобто $\tau_1 \prec \tau_2$, якщо розбиття $\tau_2 \in T$ є подрібненням розбиття $\tau_1 \in T$. Нехай $A_2([0,1], X)$ — множина всіх неперервних функцій $f\colon [0,1] \to X$, для яких
$$\lim_{\tau \in T} S_2(f, \tau) = 0.$$
Позначимо також $A_2[0,1] := A_2([0,1], \mathbb{C})$. Якщо J — скінченний замкнений відрізок, то подібно визначаємо множину $A_2(J)$.

Зауваження 5.2. Нехай J — замкнений відрізок. Легко бачити, що множина $A_2(J)$ — комплексна алгебра відносно звичайних операцій множення і додавання функцій.

Лема 5.3. *Нехай J — скінченний замкнений відрізок, $f \in A_2(J)$ і $\Lambda = f(J)$. Тоді $\mu(\Lambda) = 0$, де μ — міра Лебега на комплексній площині $\mathbb{C}$.*

Доведення. Очевидно, що досить розглянути випадок $J = [0,1]$.Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$. Тоді існує таке $\tau_0 \in T$, що з співвідношення $\tau_0 \prec \tau$ випливає, що $S_2(f, \tau) \le \varepsilon$. Нехай $\tau_0 = (t_j)_{j=0}^{j=n}$ і
$$\omega(f, \Delta_j) := \max\{|f(\xi) - f(\eta)| : \xi, \eta \in \Delta_j\}, \quad \Delta_j = [t_j, t_{j-1}], j \in \{1, \dots, n\}.$$
Доведемо, що
$$\sum_{j=1}^{n} \omega(f, \Delta_j)^2 \le \varepsilon.$$

Справді, у кожному проміжку Δ_j існують такі точки $t_{j,1}, t_{j,2}$, що $t_{j,1} \leq t_{j,2}$ і $\omega(f, \Delta_j) = |f(t_{j,2}) - f(t_{j,1})|$. Утворимо розбиття τ, додаючи до точок розбиття τ_0 точки $t_{j,1}, t_{j,2}$ ($j \in \{1, \dots, n\}$). Оскільки $\tau_0 \prec \tau$, то

$$\sum_{j=1}^{n} \omega(f, \Delta_j)^2 = \sum_{j=1}^{n} |f(t_{j,2}) - f(t_{j,1})|^2 \leq S_2(f, \tau) \leq \varepsilon.$$

Приймемо

$$K_j := \{z \in \mathbb{C} : |z - f(t_j)| \leq \omega(f, \Delta_j)\}, \qquad j \in \{1, \dots, n\}.$$

Тоді $\Lambda \subset \bigcup\limits_{j=1}^{n} K_j$ і, отже, $\mu(\Lambda) \leq \pi \sum\limits_{j=1}^{n} \omega(f, \Delta_j)^2 \leq \pi\varepsilon$. Оскільки ε — довільне додатне число, то $\mu(\Lambda) = 0$. $\square$

Твердження 5.4. *Нехай $n \in \mathbb{N}$ і*

$$p_n(\lambda, t) = \lambda^n + \sum_{j=1}^{n} a_j(t)\lambda^{n-j}, \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \quad t \in [0, 1],$$

де $a_1, \dots, a_n \in A_2[0, 1]$. Тоді множина

$$\Lambda(p_n) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists\, t \in [0, 1] \quad p_n(\lambda, t) = 0\}$$

є компактом в $\mathbb{C}$ і

$$\mu(\Lambda(p_n)) = 0. \tag{5.1}$$

Доведення. Компактність множини $\Lambda(p_n)$ очевидна. Для доведення рівності (5.1) застосуємо індукцію. Згідно з лемою 5.3 рівність (5.1) правильна у випадку $n = 1$. Припустимо, що рівність (5.1) правильна для $(n-1) \in \mathbb{N}$. Тоді $\mu(\Lambda(p_{n-1})) = 0$, де $p_{n-1} = n^{-1}(p_n)'_\lambda$. З компактності множини $\Lambda(p_n)$ випливає, що множина

$$\Omega := \{t \in (0, 1) : \forall \lambda \in \Lambda(p_n) \quad p_{n-1}(\lambda, t) \neq 0\}$$

відкрита в $(0, 1)$. Очевидно, що

$$\Lambda(p_n) \subset \Lambda(p_n, \Omega) \cup \Lambda(p_n, \{0\}) \cup \Lambda(p_n, \{1\}) \cup \Lambda(p_{n-1}),$$

де

$$\Lambda(p_n, K) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists\, t \in K \quad p_n(\lambda, t) = 0\}, \qquad K \subset [0, 1].$$

Оскільки $\mu(\Lambda(p_{n-1})) = 0$, а множини $\Lambda(p_n, \{0\})$ та $\Lambda(p_n, \{1\})$ є скінченними, то для доведення (5.1) досить довести, що для кожної точки $t_0 \in \Omega$ існує такий окіл $J \subset \Omega$, що $\mu(\Lambda(p_n, J)) = 0$. Зафіксуємо точку $t_0 \in \Omega$ і нехай $b^0 = (a_1(t_0), \dots, a_n(t_0)) \in \mathbb{C}^n$. Задамо функцію

$$\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \ni (\zeta, b) \to \varphi(\zeta, b) := \zeta^n + \sum_{k=1}^{n} b_k \zeta^{n-k},$$

де $b = (b_1, \dots, b_n)$. З означення множини Ω випливає, що многочлен $\varphi(\zeta, b^0)$ має n простих коренів. Тому, згідно з теоремою про неявну функцію, існує окіл $W \subset \mathbb{C}^n$ точки b^0 і гладкі функції $\lambda_j : W \to \mathbb{C}\,(j = 1, \dots, n)$ такі, що

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \exists\, b \in W \quad \varphi(\lambda, b) = 0\} = \bigcup_{j=1}^{n} \lambda_j(W).$$

З неперервності функції

$$[0,1] \ni t \mapsto a(t) := (a_1(t), \dots , a_n(t)) \in \mathbb{C}^n$$

випливає, що існує замкнений відрізок $J = [c, d] \subset \Omega_0$, такий, що $t_0 \in (c, d)$ і $a(J) \subset W$. Тоді

$$\Lambda(p_n, J) = \bigcup_{j=1}^{n} \psi_j(J), \tag{5.2}$$

де

$$\psi_j(t) := \lambda_j(a(t)), \qquad t \in J, \ \ j \in \{1, \dots , n\}.$$

Оскільки функції $\lambda_j \, (j \in \{1, \dots , n\})$ є гладкими, то існує така стала $C > 0$, що для довільних $t_1, t_2 \in J$

$$|\psi_j(t_1) - \psi_j(t_2)| \leq C \sum_{k=1}^{n} |a_k(t_1) - a_k(t_2)|, \quad j \in \{1, \dots , n\},$$

і, отже,

$$|\psi_j(t_1) - \psi_j(t_2)|^2 \leq nC^2 \sum_{k=1}^{n} |a_k(t_1) - a_k(t_2)|^2, \quad j \in \{1, \dots , n\}.$$

З останньої нерівності випливає, що $\psi_j \in A_2(J) \, (j \in \{1, \dots , n\})$. Приймаючи до уваги (5.2) і лему 5.3, отримуємо, що $\mu(\lambda(p_n, J)) = 0$. □

5.2. Крок 2. Зафіксуємо $Q \in \Phi$. Тоді $Q \in \Psi$ і, отже, для кожного $t \in [0, 1]$ оператор $I - P(t)QP(t)$ оборотний. Звідси легко отримуємо, що для кожного $t \in [0, 1]$ оператор $I - P(t)Q$ оборотний і

$$\Big(I - P(t)Q\Big)^{-1} = \Big(I - P(t)QP(t)\Big)^{-1}\Big(I + P(t)Q(I - P(t))\Big). \tag{5.3}$$

Позначимо

$$G(t) := \Big(I - P(t)Q\Big)^{-1} P(t), \qquad t \in [0, 1].$$

З огляду на (5.3), справджується рівність

$$G(t) = \Big(I - P(t)QP(t)\Big)^{-1} P(t). \tag{5.4}$$

Твердження 5.5. *Нехай $A \in \mathcal{B}_2$, $B \in \mathcal{B}_\infty$ і*

$$G_1(t) := AG(t)B, \qquad t \in [0, 1].$$

Тоді оператор-функція $t \mapsto G_1(t) \in \mathcal{B}_2$ належить до класу $A_2([0, 1], \mathcal{B}_2)$.

Доведення. Зауважимо, що неперервність функції $G_1(\cdot)$ нескладно випливає з компактності операторів Q, A і B. Домовимося, що всюди в доведенні через $\|\cdot\|$ і $\|\cdot\|_2$ ми позначаємо норми в $\mathcal{B}$ і $\mathcal{B}_2$ відповідно. Нехай $0 \le y < x \le 1$ і $\Delta P = P(x) - P(y)$. Враховуючи очевидну рівність

$$\Big(I - P(x)Q\Big)^{-1} - \Big(I - P(y)Q\Big)^{-1} = \Big(I - P(x)Q\Big)^{-1}\Big(P(x) - P(y)\Big)Q\Big(I - P(y)Q\Big)^{-1},$$

отримуємо, що

$$G(x) - G(y) = G(x)\Delta P + G(x)\Delta PQG(y). \tag{5.5}$$

Для довільного $R \in \mathcal{B}_\infty$ і довільного розбиття $\tau = (t_j)_{j=0}^{j=n}$ проміжку $[0,1]$ позначимо

$$m(R,\tau) := \max_j \|\Delta_j PR\|^2, \quad \Delta_j P = P(t_j) - P(t_{j-1}), \quad j \in \{1,\dots,n\}.$$

Оскільки для довільного $R \in \mathcal{B}_\infty$ оператор-функція $t \mapsto P(t)R$ неперервна, то

$$\lim_{\tau \in T} m(B,\tau) = 0, \qquad R \in \mathcal{B}_\infty. \tag{5.6}$$

Очевидно, що неперервна оператор-функція

$$[0,1] \ni t \mapsto (I - P(t)QP(t))^{-1} \in \mathcal{B}.$$

Звідки, приймаючи до уваги (5.4), отримуємо, що

$$\sup_{t\in[0,1]} \|G(t)\| = C < \infty.$$

Тому з огляду на (5.5)

$$S_2(G_1,\tau) = \sum_{j=1}^{n} \|AG(t_j)\Delta_j PB + AG(t_j)\Delta_j PQG(t_{j-1})B\|_2^2 \le$$

$$\le 2m(B,\tau)\sum_{j=1}^{n} \|AG(t_j)\Delta_j P\|_2^2 + 2Cm(Q,\tau)\|B\|^2 \sum_{j=1}^{n} \|AG(t_j)\Delta_j P\|_2^2 .$$

Враховуючи (5.6) і означення 5.1, бачимо, що досить лише переконатися у тому, що

$$\sup_{\tau\in T} \sum_{j=1}^{n} \|AG(t_j)\Delta_j P\|_2^2 < \infty. \tag{5.7}$$

З очевидної рівності $G(t) = P(t) + G(t)QP(t)$ випливає, що

$$\sum_{j=1}^{n} \|AG(t_j)\Delta_j P\|_2^2 \le 2\sum_{j=1}^{n} \|A\Delta_j P\|_2^2 + 2\sum_{j=1}^{n} \|AG(t_j)Q\Delta_j P\|_2^2 =$$

$$= 2\|A\|_2^2 + 2\|\sum_{j=1}^{n} AG(t_j)Q\Delta_j P\|_2^2 \le 2\|A\|_2^2(1 + \|b(\tau)\|),$$

де
$$b(\tau) := \sum_{j=1}^{n} G(t_j) Q \Delta_j P.$$
Оскільки $Q \in \Phi$, то згідно з факторизаційною теоремою 2.6 в рівномірній операторній топології
$$\lim_{\tau \in T} b(\tau) = \int_{\mathfrak{P}} (I - PQP)^{-1} PQ \, dP$$
і, отже, $\sup_{\tau \in T} \|b(\tau)\| < \infty$. Тим самим (5.7) доведено. □

5.3. Крок 3.

Доведення теореми 3.4. 1) Нехай $Q \in \Phi$, $Q_1 \in \mathcal{B}_0$ і $\operatorname{rank} Q_1 = n$. Тоді з огляду на наслідок 4.2
$$\Lambda := \{\lambda \in \mathbb{C} : (Q + \lambda Q_1) \notin \Psi\},$$
тобто
$$\Lambda = \Big\{\lambda \in \mathbb{C} : \exists\, t \in [0,1] \quad \operatorname{Ker}\Big(I - P(t)(Q + \lambda Q_1)\Big) \neq \{0\}\Big\}. \tag{5.8}$$
Подамо оператор Q_1 у вигляді добутку $Q_1 = BA$, де $A, B \in \mathcal{B}_0$ і $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B = n$. Враховуючи, що $Q \in \Phi$, приймемо (див. твердження 5.5)
$$G(t) := (I - P(t)Q)^{-1} P(t), \qquad G_1(t) := AG(t)B, \qquad t \in [0,1].$$
Приймаючи до уваги (5.8) і рівність
$$\Big(I - P(t)Q\Big)^{-1} \Big(I - P(t)(Q + \lambda Q_1)\Big) = I - \lambda G(t) BA,$$
маємо
$$\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists\ t \in [0,1] \quad \operatorname{Ker}(I - \lambda G(t) BA) \neq \{0\}\}.$$
Добре відомо, що для довільних $M, L \in \mathcal{B}$ оборотність оператора $I - ML$ рівносильна до оборотності оператора $I - LM$. Тому
$$\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists\, t \in [0,1] \quad \det(I - \lambda G_1(t)) = 0\}.$$
Згідно з твердженням 5.5, оператор-функція G_1 належить до класу $A_2([0,1], \mathcal{B}_2)$. Отже,
$$\det(I - \lambda G_1(t)) = 1 + \sum_{j=1}^{n} a_j(t) \lambda^j,$$
де $n \in \mathbb{N}$, а функції a_j ($j \in \{1, \dots, n\}$) належать до класу $A_2[0,1]$. Приймаючи до уваги твердження 5.4, отримуємо, що множина Λ є образом множини нульової міри при відображенні $h(\lambda) = 1/\lambda$ і, отже, $\mu(\Lambda) = 0$. Замкненість множини Λ очевидна.

2) Нехай тепер $\mathfrak{S} \in \Sigma_f$, $Q \in \mathfrak{S}$, $Q_1 \in \mathcal{B}_0 \cap \mathfrak{S}$ і $\|Q - Q_1\|_{\mathcal{B}} < 1$. Очевидно, що тоді оператор $R = Q - Q_1$ належить до $\Psi_{\mathfrak{S}}$, а, отже, і до $\Phi_{\mathfrak{S}}$. Згідно з вже доведеним, міра Лебега множини
$$\widetilde{\Lambda} := \{\lambda \in \mathbb{C} : (R + \lambda Q_1) \notin \Phi\}$$
дорівнює нулеві. Звідси легко випливає твердження 2).

Справедливість твердження 3) негайно випливає з 2) і означення класу Σ_f^0. Теорему 3.4 доведено. □

ЛІТЕРАТУРА

1. Крейн М.Г. *Об одном методе решения линейных интегральных уравнений первого и второго рода* // ДАН СССР. – 1955. – Т.100, № 2. – С. 413–416.
2. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. *О факторизации операторов в гильбертовом пространстве* // *Acta scien. math.* – 1964. – V. 25, № 1-2. – P. 90–123.
3. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. – М.: Наука, 1967.
4. Gohberg I., Goldberg S., Kaashoek M.A. Classes of linear operators, Vol.2. – Basel; Boston; Berlin: Birkhaser Verlag, 1993.
5. Сахнович Л.А. *Факторизация операторов в* $L_2(a,b)$ // Функц. анализ и его прил. – 1979. – Т.13, № 3. – С. 40–45.
6. Ben-Artzi A., Gohberg I. *Lower upper factorizations of operators with middle terms* // Journal of Functional Analysis – 1988. – V. 77. – P. 309–325.
7. Gohberg I. *Factorizations of semi-separable operators along continuous chains of projections* // J. Math. Anal.Appl. – 1988. – V. 133. – P. 27–33.
8. Milman M.H. *A factorization on the semi-infinite interval I: General Theory* // J. Math. Anal.Appl. 1988. – V. 131. – P. 127–156.

Львівський національний університет імені Івана Франка,
механіко-математичний факультет

Надійшло 17.08.2003