УДК 517.95

М. Д. Починайко, Ю. М. Сидоренко

ІНТЕГРУВАННЯ ДЕЯКИХ (2+1)-ВИМІРНИХ ІНТЕГРОВНИХ СИСТЕМ МЕТОДАМИ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ РОЗСІЯННЯ ТА БІНАРНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ДАРБУ

M. D. Pochynaiko, Yu. M. Sydorenko. *Integrating of some (2+1)-dimentional integrable systems by methods of inverse scattering problem and binary Darboux transformation*, Matematychni Studii, **20** (2003) 119–132.

For space-twodimentional symetric generalizations of the $KdV(2dKdV)$ and modified KdV equation $2dmKdV$ for alternative by known $L-P-Q$ Manacov's triad the Lax pairs $L-A$ are constructed. The binary Darboux transformations for the associated linear systems with $2dKdV, 2dmKdV$ and formulas for solution the studied equations in explicit forms are found. It is shown that explicit solutions of $2dKdV, 2dmKdV$ equations and solutions of space-twodimentional nonlinear Schroedinger equations obtained by the inverse scattering method for Dirac's operator are contained among solutions obtained by binary Darboux transformation as a special case.

М. Д. Починайко, Ю. М. Сидоренко. *Интегрирование некоторых (2+1)-мерных интегрируемых систем методами обратной задачи рассеяния и бинарных преобразований Дарбу* // Математичні Студії. – 2003. – Т.20, №2. – С.119–132.

Для пространственно-двумерного обобщения уравнения $KdV(2dKdV)$ и модифицированного KdV альтернативно известным $L-P-Q$ триадам Манакова построена $L-A$ пара Лакса. Найдены бинарные преобразования Дарбу для ассоциированных с уравнениями $2dKdV$ и $2dmKdV$ линейных систем; выписаны формулы точных решений исследуемых уравнений; показано, что точные решения этих уравнений, а также пространственно-двумерных уравнений Шредингера, полученные методом обратной задачи рассеяния для оператора Дирака, содержатся среди решений, полученных при помощи бинарного преобразования Дарбу.

Вступ. У статті досліджуються добре відомі в математичній та теоретичній фізиці нелінійні просторово-двовимірні інтегровні системи, тісно пов'язані з лінійним рівнянням Дірака. А саме, оператор Дірака відіграє роль оператора Лакса у відповідних зображеннях Захарова-Шабата-Манакова.

Обернена задача розсіяння для системи рівнянь Дірака, як відомо, вперше розглядалася в роботах Л. П. Нижника (див., наприклад, [1]), а застосування цих результатів для дослідження деяких нелінійних еволюційних моделей наведено в [2–6].

Крім методу оберненої задачі розсіяння (МОЗР), який в класичному варіанті грунтується на дослідженні рівнянь Гельфанда-Левітана-Марченка [7–9], для побудови широких класів точних розв'язків інтегровних систем можна застосовувати інші, більш "алгебризовані" методи [10–17].

2000 *Mathematics Subject Classification:* 12G99, 14H05.

Ця стаття виникла в результаті наукових дискусій з професором Л. П. Нижником про порівняння класів точних розв'язків нелінійних інтегровних моделей, отриманих МОЗР [2–6] і методом перетворень Дарбу-Матвєєва [11, 14, 15], за що автори висловлюють йому щиру вдячність.

Стаття має таку структуру. В першому розділі ми стисло наводимо основні результати оберненої задачі розсіяння для оператора Дірака і їхні застосування для інтегрування просторово-двовимірних рівнянь Шредінгера, а також (2+1)-вимірної моделі $mKdV$ (модифікованого рівняння Кортевега де Вріза). Другий розділ присвячений побудові бінарних перетворень Дарбу для нелінійних систем, асоційованих з оператором Дірака. Ми показуємо, що точні розв'язки, отримані МОЗР в першому розділі, містяться серед розв'язків, отриманих за допомогою бінарних перетворень Дарбу. Також розглянуто декілька фізично важливих редукцій досліджуваних рівнянь, в тому числі відоме рівняння Л. П. Нижника (простово-симетричне узагальнення рівняння KdV). Проведено також порівняння отриманих нами розв'язків цього рівняння і відомих раніше [6–18].

Для просторово-двовимірного узагальнення рівняння $KdV(2dKdV)$ та модифікованого $KdV(2dmKdV)$ альтернативно до відомих $L-P-Q$-тріад Манакова побудовано $L-A$ пару Лакса. Знайдено бінарні перетворення Дарбу для асоційованих з рівняннями $2dKdV$ і $2dmKdV$ лінійних систем; виписано формули точних розв'язків досліджуваних рівнянь; встановлено, що точні розв'язки цих рівнянь, а також просторово-двовимірних рівнянь Шредінгера, отримані методом оберненої задачі розсіяння для оператора Дірака [1], містяться серед розв'язків, отриманих за допомогою бінарного перетворення Дарбу.

Система нелінійних просторово-двовимірних рівнянь Шредінгера, яку часто називають рівняннями Деві-Стюардсона, розглядалася в багатьох працях [2, 3, 5–12, 14, 19]. Зокрема, в [2] систему рівнянь

$$\begin{aligned} u_{1t} &= k_1 u_{1xx} - k_2 u_{1yy} + 2\left(v_1 - v_2\right) u_1, \\ u_{2t} &= k_2 u_{2yy} - k_1 u_{2xx} + 2\left(v_2 - v_1\right) u_2, \\ v_{1x} &= k_2 \left(u_1 u_2\right)_y, v_{2y} = k_1 \left(u_1 u_2\right)_x, \end{aligned} \tag{1}$$

де k_1, k_2 — довільні сталі, записано у вигляді узагальненого зображення Лакса (тріади Манакова)

$$LP - QL = 0, \tag{2}$$

де

$$L = \begin{pmatrix} \partial_x & u_1 \\ u_2 & \partial_y \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} V - v_1 & 2k_1 u_{1x} \\ 2k_2 u_{2y} & V - v_2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} V - v_1 & -2k_2 u_{1y} \\ -2k_1 u_{2x} & V - v_2 \end{pmatrix},$$

$$V = \partial_t + k_1 \partial_{xx}^2 + k_2 \partial_{yy}^2.$$

Для інтегрування системи (1) [2] використовують обернену задачу розсіяння для системи Дірака [6]

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \varphi_1(x,y)}{\partial x} + u_1(x,y)\varphi_2(x,y) = 0, \\ &\frac{\partial \varphi_2(x,y)}{\partial y} + u_2(x,y)\varphi_1(x,y) = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

де $u_1, u_2 \in L_2(\mathbb{R}^2)$. Обернена задача розсіяння для системи (3) полягає в знаходженні коефіцієнтів (потенціалів) u_1, u_2 за заданим оператором розсіяння. Нагадаємо основні результати ([6]).

Розв'язки системи (3) допускають асимптотики

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1(y) \\ a_2(x) \end{pmatrix} \quad (x + y \to -\infty),$$

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1(y) \\ b_2(x) \end{pmatrix} \quad (x + y \to +\infty).$$

Оператор S визначається рівністю

$$b = Sa, \quad b = \begin{pmatrix} b_1(y) \\ b_2(x) \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} a_1(y) \\ a_2(x) \end{pmatrix}.$$

Якщо $u_1 \equiv u_2 \equiv 0$, то оператор S збігається з одиничним оператором I. Доведено ([6]), що в просторі $L_2(\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2)$ існує обернений оператор S^{-1}. Оператори S і S^{-1} мають вигляд

$$S = I + F, \quad S^{-1} = I + G,$$

де $F = \|F_{ij}\|_{i,j=1}^2$, $G = \|G_{ij}\|_{i,j=1}^2$ — матричні інтегральні оператори Гільберта-Шмідта, діагональні елементи F_{ii}, G_{ii} $(i \in \{1, 2\})$ є інтегральними операторами Вольтерра

$$F_{11} = W_{1+}, \quad F_{22} = W_{2+}, \quad G_{11} = W_{1-}, \quad G_{22} = W_{2-},$$

де "+" ("-") означає змінну верхню (нижню) межу інтегрування. Для знаходження коефіцієнтів u_1, u_2 досить задати оператори F_{12}, G_{21} або F_{21}, G_{12}, які називають даними розсіяння. Коефіцієнти u_1, u_2 визначаються за допомогою рівностей

$$u_1 = B_{12}(x, y; x + 0), \quad u_2 = -B_{21}(x, y; y - 0), \tag{4}$$

де B_{12}, B_{21} — розв'язки інтегральних рівнянь

$$\begin{aligned} &B_{12}(x, y; \eta) + F_{12}(y, \eta) - \int_x^\infty B_{12}(x, y; \tau) \left[\int_{-\infty}^y G_{21}(\tau, s) F_{12}(s, \eta)\, ds \right] d\tau = 0, \\ &B_{21}(x, y; \eta) + G_{21}(x, \eta) - \int_{-\infty}^y B_{21}(x, y; \tau) \left[\int_x^\infty F_{12}(\tau, s) G_{21}(s, \eta)\, ds \right] d\tau = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Коефіцієнти системи (3) задовольняють умову (2). З останнього випливає, що $P\varphi$- розв'язок системи (3). Доведено ([2, 6]), що тоді ядра $F_{12}(y, x)$, $G_{21}(x, y)$ інтегральних операторів F_{12}, G_{21} є розв'язками еволюційних рівнянь

$$\begin{aligned} &\partial_t F_{12}(y, x, t) - \left[k_1 \partial_{xx}^2 - k_2 \partial_{yy}^2 \right] F_{12}(y, x, t) = 0, \\ &\partial_t G_{21}(x, y, t) + \left[k_1 \partial_{xx}^2 - k_2 \partial_{yy}^2 \right] G_{21}(x, y, t) = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Використавши результати оберненої задачі розсіяння для системи Дірака (3) розв'язки нелінійної системи Шредінгера (1) отримуємо за формулами (4), та розв'язками рівнянь (5), (6). Рівняння (5) є інтегральними рівняннями Фредгольма другого роду, що допускають точні розв'язки у випадку вироджених ядер. А саме, нехай ядра F_{12}, G_{21} мають вигляд

$$F_{12}(y,x,t)=f_1(y,t)\,f_2^T(x,t),\quad G_{21}(x,y,t)=g_1(y,t)\,g_2^T(x,t),$$

де $f_i=(f_{i1},...,f_{in})$, $g_i=(g_{i1},...,g_{in})$, $i\in\{1,2\}$. Тоді з (4), (5) отримуємо

$$\begin{aligned} u_1(x,y,t)&=-f_1(y,t)\,[I+Q_2Q_1]^{-1}\,f_2^T(x,t),\\ u_2(x,y,t)&=g_2(x,t)\,[I+Q_1Q_2]^{-1}\,g_1^T(y,t), \end{aligned}\tag{7}$$

де матриці Q_1, Q_2 обчислюються за формулами

$$Q_1=-\int_{-\infty}^{y}g_1^T(s,t)f_1(s,t)\,ds,\quad Q_2=\int_{x}^{\infty}f_2^T(s,t)g_2(s,t)\,ds.$$

При цьому еволюційні рівняння (6) для функцій f_i, g_i ($i\in\{1,2\}$) записуються у вигляді

$$\begin{aligned} f_{1t}+k_2f_{1yy}=0,\quad f_{2t}-k_1f_{2xx}=0,\\ g_{2t}+k_1g_{2xx}=0,\quad g_{1t}-k_2g_{1yy}=0. \end{aligned}\tag{8}$$

Нелінійні рівняння Шредінгера (1) є гамільтоновою системою [3] (див., також [19]) вигляду

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}=\frac{\delta H_2}{\delta u_2},\quad \frac{\partial u_2}{\partial t}=-\frac{\delta H_2}{\delta u_1},$$

з функцією Гамільтона

$$H_2=\iint\limits_{\mathbb{R}^2}[k_2u_{1y}u_{2y}-k_1u_{1x}u_{2x}-u_1u_2\,(k_1\partial_xJ_y-k_2\partial_yJ_x)\,u_1u_2],$$

де $J_x=(\partial_x)^{-1}$, $J_y=(\partial_y)^{-1}$.

В [4, 6] доведено, що, взявши за функцію Гамільтона один із вищих інтегралів руху

$$H_3=\iint\limits_{\mathbb{R}^2}[u_{2xx}u_{1x}-3u_2u_{1x}\partial_xJ_yu_1u_2]dxdy+\iint\limits_{\mathbb{R}^2}[u_{1yy}u_{2y}-3u_1u_{2y}\partial_yJ_xu_1u_2]dxdy,$$

гамільтонова система

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}=\frac{\delta H_3}{\delta u_2},\quad \frac{\partial u_1}{\partial t}=-\frac{\delta H_3}{\delta u_1},$$

еквівалентна до нелінійної системи рівнянь

$$\begin{aligned} &u_{1t}+u_{1yyy}-u_{1xxx}-3v_1u_{1y}+3v_2u_{1x}-3v_3u_1-3v_4u_1+3u_1v_{2x}=0,\\ &u_{2t}+u_{2yyy}-u_{2xxx}-3v_1u_{2y}+3v_2u_{2x}+3v_3u_2+3v_4u_2-3u_2v_{1y}=0,\\ &v_{1x}=(u_1u_2)_y,\quad v_{2y}=(u_1u_2)_x,\quad v_{3x}=(u_{1y}u_2)_y,\quad v_{4x}=(u_1u_{2x})_x. \end{aligned}\tag{9}$$

Система (9) допускає узагальнене зображення Лакса (тріаду Манакова) [4]

$$LP-QL=0,$$

де

$$L = \begin{pmatrix} \partial_x & u_1 \\ u_2 & \partial_y \end{pmatrix},$$

P, Q — деякі матричні еволюційні оператори третього порядку. Розв'язки системи (9) отримують із (4), (5) та еволюційних рівнянь

$$\partial_t F_{12}(y,x,t) = \partial_x^3 F_{12}(y,x,t) - \partial_y^3 F_{12}(y,x,t),$$

$$\partial_t G_{21}(x,y,t) = \partial_x^3 G_{21}(x,y,t) - \partial_y^3 G_{21}(x,y,t).$$

Розв'язки системи (9) виражаються формулами (7), де замість еволюційних рівнянь (8) треба розглядати рівняння

$$\begin{aligned} \left(\partial_t + \partial_y^3\right) f_1(y,t) = 0, \quad \left(\partial_t - \partial_x^3\right) f_2(x,t) = 0, \\ \left(\partial_t + \partial_y^3\right) g_1(y,t) = 0, \quad \left(\partial_t - \partial_x^3\right) g_2(x,t) = 0. \end{aligned}$$

Тут для дослідження рівнянь (1) ми використовуємо зображення Лакса $[L, A_2] = 0$ (див. [12]), обмеживщись випадком $k_1 = -1$, $k_2 = 1$, а також заміною $t \to t_2$ і масштабним перетворенням $y \to \frac{1}{k} y$. Тоді $L = \begin{pmatrix} \partial_x & u_1 \\ u_2 & k\partial_y \end{pmatrix}$,

$$A_2 = \begin{pmatrix} \partial_{t_2} + (\partial_x - k\partial_y)^2 - 2v_1 & -2k\partial_y u_1 + 2u_1 \partial_x \\ 2\partial_x u_2 - 2k u_2 \partial_y & \partial_{t_2} - (\partial_x - k\partial_y)^2 - 2v_2 \end{pmatrix}.$$

Для дослідження рівнянь (9) використовуємо знайдене нами зображення Лакса $[L, A_3] = 0$, де враховуємо заміну $t \to t_3$ та масштабне перетворення $y \to \frac{1}{k} y$. При цьому

$$A_3 = \begin{pmatrix} \begin{array}{l} \partial_{t_3} + (k\partial_y - \partial_x)^3 + \\ 3(v_1 - u_1 u_2)\partial_x - \\ 3k(v_1 - u_1 u_2)\partial_y + \\ 3k(u_1 u_2)_y - 3u_1 u_{2x} - 3v_3; \end{array} & \begin{array}{l} 3(ku_{1y} - u_{1x})\partial_x - \\ 3k(ku_{1y} - u_{1x})\partial_y + \\ +3ku_{1xy} - 3k^2 u_{1yy} + \\ 3u_1(v_1 - v_2); \end{array} \\ \begin{array}{l} 3(u_{2x} - ku_{2y})\partial_x - \\ 3k(u_{2x} - ku_{2y})\partial_y + \\ 3u_{2xx} - 3ku_{2yx} + \\ 3u_2(v_1 - v_2); \end{array} & \begin{array}{l} \partial_{t_3} + (k\partial_y - \partial_x)^3 + \\ 3(v_2 - u_1 u_2)\partial_x - \\ 3k(v_2 - u_1 u_2)\partial_y + \\ 3ku_{1y}u_2 - 3(u_1 u_2)_x + 3v_4; \end{array} \end{pmatrix}$$

За введених обмежень системи (1), (9) мають відповідно вигляд

$$\begin{gathered} u_{1t} + u_{1xx} + k^2 u_{1yy} - 2(v_1 - v_2)u_1 = 0, \\ u_{2t} - u_{2xx} - k^2 u_{2yy} - 2(v_2 - v_1)u_2 = 0, \\ v_{1x} = k(u_1 u_2)_y, \quad v_{2y} = k^{-1}(u_1 u_2)_x, \end{gathered} \tag{1'}$$

$$\begin{gathered} u_{1t} + k^3 u_{1yyy} - u_{1xxx} - 3kv_1 u_{1y} + 3v_2 u_{1x} - 3v_3 u_1 - 3v_4 u_1 + 3u_1 v_{2x} = 0, \\ u_{2t} + k^3 u_{2yyy} - u_{2xxx} - 3kv_1 u_{2y} + 3v_2 u_{2x} + 3v_3 u_2 + 3v_4 u_2 - 3ku_2 v_{1y} = 0, \\ v_{1x} = k(u_1 u_2)_y, \quad v_{2y} = k^{-1}(u_1 u_2)_x, \quad v_{3x} = k^2(u_{1y} u_2)_y, \quad v_{4x} = (u_1 u_{2x})_x. \end{gathered} \tag{9'}$$

Бінарні перетворення Дарбу для нелінійних систем, асоційованих з оператором Дірака L. Розглянемо оператор Дірака L вигляду

$$L = \begin{pmatrix} \partial_x & u_1 \\ u_2 & k\partial_y \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Нехай

1) $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$ — довільний розв'язок (вектор-стовпчик) системи

$$LY = 0, \tag{10}$$

а $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1K} \\ \varphi_{21} & \cdots & \varphi_{2K} \end{pmatrix}$ — деякий фіксований $(2 \times K)$-матричний розв'язок системи (10).

2) $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_{11} & \cdots & \psi_{1K} \\ \psi_{21} & \cdots & \psi_{2K} \end{pmatrix}$ — деякий фіксований $(2 \times K)$-матричний розв'язок транспонованої системи рівнянь

$$L^\tau \psi = 0, \quad L^\tau := \begin{pmatrix} -\partial_x & u_2 \\ u_1 & -k\partial_y \end{pmatrix}.$$

3) Функції Y, φ, ψ залежать від еволюційних параметрів t_2, t_3, що випливає з рівнянь

$$A_i Y = 0, \quad A_i \varphi = 0, \quad A_i^\tau \psi = 0, \ i \in \{2, 3\},$$

відповідно.

Транспоновані оператори A_2^τ, A_3^τ мають вигляд:

$$A_2^\tau = \begin{pmatrix} -\partial_{t_2} + (\partial_x - k\partial_y)^2 - 2v_1 & -2u_2\partial_x + 2k\partial_y u_2 \\ 2ku_1\partial_y - 2\partial_x u_1 & -\partial_{t_2} - (\partial_x - k\partial_y)^2 - 2v_2 \end{pmatrix},$$

$$A_3^\tau = \begin{pmatrix} \begin{matrix} -\partial_{t_3} - (k\partial_y - \partial_x)^3 - \\ 3\partial_x (v_1 - u_1 u_2) + \\ 3k\partial_y (v_1 - u_1 u_2) + \\ 3k (u_1 u_2)_y - 3u_1 u_{2x} - 3v_3; \end{matrix} & \begin{matrix} -3\partial_x (u_{2x} - ku_{2y}) + \\ 3k\partial_y (u_{2x} - ku_{2y}) + \\ 3u_{2xx} - 3ku_{2yx} + \\ 3u_2 (v_1 - v_2); \end{matrix} \\ \begin{matrix} -3\partial_x (ku_{1y} - u_{1x}) + \\ 3k\partial_y (ku_{1y} - u_{1x}) + \\ 3ku_{1xy} - 3k^2 u_{1yy} + \\ 3u_1 (v_1 - v_2); \end{matrix} & \begin{matrix} -\partial_{t_3} - (k\partial_y - \partial_x)^3 \times \\ 3\partial_x (v_2 - u_1 u_2) + \\ 3k\partial_y (v_2 - u_1 u_2) + \\ 3ku_{1y} u_2 - 3 (u_1 u_2)_x + 3v_4 \end{matrix} \end{pmatrix}.$$

Безпосередньою перевіркою доводиться справедливість наступного твердження.

Твердження. *$(K \times K)$-матричні функції*

$$P[\psi, \varphi] := -k\psi_2^T \varphi_2,$$

$$Q[\psi, \varphi] := \psi_1^T \varphi_1, R_2[\psi, \varphi] := k\left[\left(\psi_{2x}^T \varphi_2 - \psi_2^T \varphi_{2x}\right) + k\left(\psi_{1y}^T \varphi_1 - \psi_1^T \varphi_{1y}\right)\right],$$

$$R_3[\psi, \varphi] := k\Big[\psi_{2x}^T \varphi_{2x} - \psi_{2xx}^T \varphi_2 - \psi_2^T \varphi_{2xx} + k^2\left(\psi_{1y}^T \varphi_{1y} - \psi_{1yy}^T \varphi_1 - \psi_1^T \varphi_{1yy}\right) + $$
$$+3k\psi_1^T \varphi_1 \int^x (u_1 u_2)_y dx + 3k^{-1} \psi_2^T \varphi_2 \int^y (u_1 u_2)_x dy\Big]$$

задовольняють такі співвідношення

$$P_y = Q_x, \ P_{t_2} = R_{2x}, \ P_{t_3} = R_{3x}, \ Q_{t_2} = R_{2y}, \ Q_{t_3} = R_{3y}, \ R_{2t_3} = R_{3t_2}. \tag{11}$$

Наслідок 1. *Із співвідношень (11) випливає існування матричного* $(K \times K)$ *потенціалу* $\Omega := \Omega[\psi, \varphi]$ *:*

$$d\Omega[\psi, \varphi] = Pdx + Qdy + R_2dt_2 + R_3dt_3.$$

Зауваження. Оскільки потенціал $\Omega[\psi, \varphi]$ визначається з точністю до сталої $(K \times K)$-матриці C, його завжди можна зробити невиродженим (локально) в околі довільної фіксованої точки $(x_0, y_0, t_{20}, t_{30})$ розширеного простору $\bar{R}_4$.

Теорема. *Нехай* $\hat{Y} := Y - \varphi(C + \Omega[\psi, \varphi])^{-1}\Omega[\psi, Y]$, *де*

$$\Omega[\psi, \varphi] := \int_{M_0}^{M} Pdx + Qdy + R_2dt_2 + R_3dt_3, \tag{12}$$

$C + \Omega[\psi, \varphi]$ — *невироджений в околі т.* $M_0 \in \bar{\mathbb{R}}^4$ *потенціал,* $M_0 = (x_0, y_0, t_{20}, t_{30})$, $M = (x, y, t_2, t_3) \in \bar{\mathbb{R}}^4$ *є довільною точкою цього околу. Тоді функція* $\hat{Y} = \hat{Y}(x, y, t_2, t_3)$ *задовольняє рівняння*

$$\hat{L}\hat{Y} = 0, \quad \hat{A}_i\hat{Y} = 0, \ i \in \{2, 3\},$$

де оператор Дірака $\hat{L}$ *і еволюційні оператори* $\hat{A}_2$, $\hat{A}_3$ *мають, відповідно, вигляд*

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} \partial_x & \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 & k\partial_y \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \hat{u}_1 = u_1 - k\varphi_1(C + \Omega[\psi, \varphi])^{-1}\psi_2^T, \\ \hat{u}_2 = u_2 + k\varphi_2(C + \Omega[\psi, \varphi])^{-1}\psi_1^T, \end{array} \tag{13}$$

$$\hat{A}_2 = \begin{pmatrix} \partial_{t_2} - (\partial_x - k\partial_y)^2 - 2\hat{v}_1 & -2k\partial_y\hat{u}_1 + 2\hat{u}_1\partial_x \\ 2\partial_x\hat{u}_2 - 2k\hat{u}_2\partial_y & \partial_{t_2} - (\partial_x - k\partial_y)^2 - 2\hat{v}_2 \end{pmatrix},$$

$$\hat{A}_3 = \begin{pmatrix} \begin{array}{l} \partial_{t_3} + (k\partial_y - \partial_x)^3 + \\ 3(\hat{v}_1 - \hat{u}_1\hat{u}_2)\partial_x - \\ 3k(\hat{v}_1 - \hat{u}_1\hat{u}_2)\partial_y + \\ 3k(\hat{u}_1\hat{u}_2)_y - 3\hat{u}_1\hat{u}_{2x} - 3\hat{v}_3; \end{array} & \begin{array}{l} 3(k\hat{u}_{1y} - \hat{u}_{1x})\partial_x - \\ 3k(k\hat{u}_{1y} - \hat{u}_{1x})\partial_y + \\ 3k\hat{u}_{1xy} - 3k^2\hat{u}_{1yy} + \\ 3\hat{u}_1(\hat{v}_1 - \hat{v}_2); \end{array} \\ \begin{array}{l} 3(\hat{u}_{2x} - k\hat{u}_{2y})\partial_x - \\ 3k(\hat{u}_{2x} - k\hat{u}_{2y})\partial_y + \\ 3\hat{u}_{2xx} - 3k\hat{u}_{2yx} + \\ 3\hat{u}_2(\hat{v}_1 - \hat{v}_2); \end{array} & \begin{array}{l} \partial_{t_3} + (k\partial_y - \partial_x)^3 + \\ 3(\hat{v}_2 - \hat{u}_1\hat{u}_2)\partial_x - \\ -3k(\hat{v}_2 - \hat{u}_1\hat{u}_2)\partial_y + \\ 3k\hat{u}_{1y}\hat{u}_2 - 3(\hat{u}_1\hat{u}_2)_x + 3\hat{v}_4 \end{array} \end{pmatrix},$$

де

$$\hat{v}_{1x} = k(\hat{u}_1\hat{u}_2)_y, \quad \hat{v}_{2y} = k^{-1}(\hat{u}_1\hat{u}_2)_x, \quad \hat{v}_{3x} = k^2(\hat{u}_{1y}\hat{u}_2)_y, \quad \hat{v}_{4x} = (\hat{u}_1\hat{u}_{2x})_x. \tag{14}$$

Доведення грунтується на безпосередній перевірці формул (13), (14).

Наслідок 2. *Нехай функції* $u_1(x, y, t_2, t_3) := u_1; u_2(x, y, t_2, t_3) := u_2$ *задовольняють системи нелінійних рівнянь* $(1')$, $(9')$. *Тоді функції* $\hat{u}_1$, $\hat{u}_2$ *(13), (14) теж є розв'язками цих рівнянь.*

Зауваження. Широкі класи точних розв'язків рівнянь $(1')$, $(9')$ отримуються в явному вигляді з формул (12), (13) виходячи з тривіальних розв'язків $u_1 = u_2 \equiv 0$. Серед цих розв'язків містяться точні розв'язки, отримані МОЗР, що буде продемонстровано в наступному підрозділі.

Редукція до множини розв'язків, отриманих МОЗР.

1. Скалярний випадок.

У скалярному випадку розв'язки (7), (8) систем (1′), (9′) (при $k=1$) записуються у вигляді

$$\begin{aligned}\hat{u}_1(x,y,t_2,t_3) &= \frac{-f_1(y)f_2(x)}{1-\int\limits_{-\infty}^{y} g_1(s)f_1(s)ds\cdot\int\limits_{x}^{\infty} f_2(s)g_2(s)ds},\\ \hat{u}_2(x,y,t_2,t_3) &= \frac{g_1(y)g_2(x)}{1-\int\limits_{-\infty}^{y} g_1(s)f_1(s)ds\cdot\int\limits_{x}^{\infty} f_2(s)g_2(s)ds},\end{aligned}\tag{15}$$

де еволюцію функцій f_1, f_2, g_1, g_2 задають рівняння (17) ($k=1$).

Розглянемо потенціал $\Omega[\psi,\varphi]$ (12), реалізований у наступний спосіб:

1. $M_0 := (x_0, y_0, t_2, t_3)$, $M := (x, y, t_2, t_3)$,

2. $u_1(x,y,t_2,t_3) = u_2(x,y,t_2,t_3) = 0$;

$$\varphi = \begin{pmatrix} -f_1 & 0\\ 0 & g_2\end{pmatrix}, \psi = \begin{pmatrix} g_1 & 0\\ 0 & -f_2\end{pmatrix},\tag{16}$$

де

$$f_1 := f_1(y) = f_1(y,t_2,t_3), \quad g_1 := g_1(y) = g_1(y,t_2,t_3),$$

$$f_2 := f_2(x) = f_2(x,t_2,t_3), \quad g_2 := g_2(x) = g_2(x,t_2,t_3) -$$

скалярні функції змінних x, y та еволюційних параметрів t_2, t_3

$$\begin{aligned}&f_{1t_2} = -k^2 f_{1yy}, g_{1t_2} = k^2 g_{1yy}, f_{2t_2} = -f_{2xx}, g_{2t_2} = g_{2xx},\\ &f_{1t_3} = -k^3 f_{1yyy}, g_{1t_3} = -k^2 g_{1yyy}, f_{2t_3} = f_{2xxx}, g_{2t_3} = g_{2xxx}.\end{aligned}\tag{17}$$

За формулою (12) отримуємо $\Omega[\psi,\varphi] =$

$$\begin{aligned}&\int\limits_{M_0}^{M}\left(-k\psi_2^T\varphi_2\right)dx + \psi_1^T\varphi_1 dy = \int\limits_{M_0}^{M}(-k)\begin{pmatrix}0\\ -f_2\end{pmatrix}(0,g_2)\,dx + \begin{pmatrix}g_1\\ 0\end{pmatrix}(-f_1,0)\,dy =\\ &\qquad = \begin{pmatrix} -\int\limits_{y_0}^{y} g_1 f_1(y)dy & 0\\ 0 & k\int\limits_{x_0}^{x} f_2 g_2(x)dx\end{pmatrix} := \Omega[g,f].\end{aligned}\tag{18}$$

Нехай $C = \begin{pmatrix}0 & 1\\ \gamma & 0\end{pmatrix}$, $\gamma\in\mathbb{C}$. Тоді

$$(C+\Omega[g,f])^{-1} = -\left(\gamma + k\int\limits_{x_0}^{x} f_2 g_2(x)dx\int\limits_{y_0}^{y} g_1 f_1(y)dy\right)^{-1}\begin{pmatrix} k\int\limits_{x_0}^{x} f_2 g_2(x)dx & -1\\ -\gamma & -\int\limits_{y_0}^{y} g_1 f_1(y)dy\end{pmatrix},$$

і розв'язки $\hat{u}_1(x,y,t_2,t_3)$, $\hat{u}_2(x,y,t_2,t_3)$ (13) набувають вигляду

$$\begin{aligned}\hat{u}_1 &= -k\,(-f_1,0)\,(C+\Omega\,[g,f])^{-1}\begin{pmatrix}0\\ -f_2\end{pmatrix} = \frac{-kf_1(y)f_2(x)}{\gamma + k\int\limits_{x_0}^{x} f_2 g_2(x)dx\cdot\int\limits_{y_0}^{y} f_1 g_1(y)dy},\\ \hat{u}_2 &= k\,(0,g_2)\,(C+\Omega\,[g,f])^{-1}\begin{pmatrix}g_1\\ 0\end{pmatrix} = \frac{k\gamma g_1(y)g_2(x)}{\gamma + k\int\limits_{x_0}^{x} f_2 g_2(x)dx\cdot\int\limits_{y_0}^{y} g_1 f_1(y)dy}.\end{aligned}\tag{19}$$

Накладаючі відповідні умови на поводження функцій f_i, g_i, $i\in\{1,2\}$ при $x,y\to\pm\infty$, з формул (19) при $x_0=+\infty$, $y_0=-\infty$, $k=\gamma=1$ отримуємо формули (15) знайдені МОЗР.

2. Загальний матричний випадок. Формули (7), (8) для розв'язків $\hat{u}_1$, $\hat{u}_2$ в загальному випадку отримуються повністю подібно.

Нехай в формулах (16) функції f_i, g_i, $i\in\{1,2\}$ є векторами: $f_i=(f_{i1},...,f_{in})$, $g_i=(g_{i1},...,g_{in})$.

Тоді потенціал $\Omega\,[g,f]$ (18) є матричною функцією

$$\Omega\,[g,f] = \begin{pmatrix}\int\limits_{y_0}^{y} g_1^T f_1(y)dy & 0\\ 0 & -k\int\limits_{x_0}^{x} f_2^T g_2(x)dx\end{pmatrix}.$$

Виберемо $(2n\times 2n)$ матрицю C у вигляді

$$C=\begin{pmatrix}0 & I_n\\ I_n & 0\end{pmatrix};\quad I_n=\mathrm{diag}(1,...,1).$$

Використовуючи відому формулу

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}A_{11}^{-1}\left(I+A_{12}T^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}\right) & -A_{11}^{-1}A_{12}T^{-1}\\ -T^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & T^{-1}\end{pmatrix}$$

для блочної матриці A, де $T:=A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$, отримуємо

$$\hat{u}_1 = -k\,(-f_1,0)\begin{pmatrix}\int\limits_{y_0}^{y} g_1^T f_1(y)dy & I_n\\ I_n & -k\int\limits_{x_0}^{x} f_2^T g_2(x)dx\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0\\ -f_2^T\end{pmatrix} = kf_1A_{11}^{-1}A_{12}T^{-1}f_2^T,\tag{20}$$

подібно

$$\hat{u}_2 = -kg_2T^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}g_1^T,\tag{21}$$

де, в нашому випадку,

$$A_{12}=A_{21}=I_n,\quad A_{11}=\int\limits_{y_0}^{y} g_1^T f_1(y)dy,\quad A_{22}=-k\int\limits_{x_0}^{x} f_2^T g_2(x)dx.$$

Оскільки

$$A_{11}^{-1}T^{-1} = (TA_{11})^{-1} = \left[\left(A_{22} - A_{11}^{-1}\right)A_{11}\right]^{-1} = -\left(I_n - A_{22}A_{11}\right)^{-1},$$

то з формул (20)–(21) маємо

$$\hat{u}_1 = -kf_1(y)\left[I_n + k\int\limits_{x_0}^{x} f_2^T g_2(x)dx \int\limits_{y_0}^{y} g_1^T f_1(y)dy\right]^{-1} f_2^T(x),$$

$$\hat{u}_2 = kg_2(x)\left[I_n + \int\limits_{y_0}^{y} g_1^T f_1(y)dy \int\limits_{x_0}^{x} f_2^T g_2(x)dx\right]^{-1} g_1^T(y).$$

Аналогічно до скалярного випадку при $x_0 = +\infty$, $y_0 = -\infty$, $k = 1$, отримуємо формули (7).

Деякі редукції (2+1)-вимірних систем. I. Системи $(1')$, $(9')$ допускають обмеження $u_2 = \mu\bar{u}_1$, $u_1 := u$. Тоді системи $(1')$, $(9')$ набувають відповідно вигляду

$$\begin{gathered} iu_{t_2} = u_{xx} + k^2 u_{yy} - 2\left(v_1 - v_2\right)u, \\ v_{1x} = k\mu\left(|u|^2\right)_y, v_{2y} = -k^{-1}\mu\left(|u|^2\right)_x; \end{gathered} \tag{22}$$

$$\begin{gathered} u_{t_3} = \left(\partial_x^3 - k^3\partial_y^3\right)u + \\ +3\mu k^2\left(u_y + \frac{1}{2}u\partial_y\right)\int^{x}\left(|u|^2\right)_y dx - 3\mu k^{-1}\left(u_x + \frac{1}{2}u\partial_x\right)\int^{y}\left(|u|^2\right)_x dy. \end{gathered} \tag{23}$$

Рівняння (22) називають системою Деві-Стюардсона (ДСІ), а рівняння (23) є комплексним просторово-двовимірним узагальненням модифікованого рівняння KdV ($2dmKdV$).

Лема 1. *Оператори L, A_2, A_3 допускають редукції*

$$L^* = -\sigma(\mu)L\sigma^{-1}(\mu), \quad A_2^* = \sigma(\mu)A_2\sigma^{-1}(\mu), \quad A_3^* = -\sigma(\mu)A_3\sigma^{-1}(\mu),$$

де $\sigma(\mu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\mu^{-1}\end{pmatrix}$, $\mu \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Наслідок 3. *1. Розв'язки φ, ψ допускають співвідношення:*

$$\psi = \sigma(\mu)\bar{\varphi}.$$

2. Редукований потенціал $\Omega[\psi, \varphi]$ має вигляд:

$$\Omega[\varphi] := \Omega[\sigma(\mu)\bar{\varphi}, \varphi] = \int\limits_{M_0}^{M} k\mu^{-1}\varphi_2^*\varphi_2 dx + \varphi_1^*\varphi_1 dy -$$

$$ik\left[\mu^{-1}\varphi_{2x}^*\varphi_2 - \mu^{-1}\varphi_2^*\varphi_{2x} - k\left(\varphi_{1y}^*\varphi_1 - \varphi_1^*\varphi_{1y}\right)\right]dt_2 +$$

$$+k\left[\mu^{-1}\varphi_{2xx}^*\varphi_2 + \left(\varphi_2^*\varphi_{2xx} - \varphi_{2x}^*\varphi_{2x}\right) + k^2\left(\varphi_{1y}^*\varphi_{1y} - \varphi_{1yy}^{a}st\varphi_1 - \varphi_1^*\varphi_{1yy}\right) + \right.$$

$$+3k\mu\varphi_1^*\varphi_1 \int^x \left(|u|^2\right)_y dx - 3k^{-1}\varphi_2^*\varphi_2 \int^y \left(|u|^2\right)_x dy\Bigg] dt_3.$$

3. Нехай C є ермітовою матрицею ($C^* = C$), тоді $\hat{u}_1$, $\hat{u}_2$ (13) задовольняють редукційні співвідношення $\hat{u}_2 = \mu\hat{\bar{u}}_1$ і є розв'язками систем (22), (23).

Зауважимо, що рівняння (23) допускає дійсну версію $u = \bar{u}$:

$$u_{t_3} = \left(\partial_x^3 - k^3\partial_y^3\right) u + 3\mu k^2 \left(u_y + \frac{1}{2}u\partial_y\right) \int^x \left(u^2\right)_y dx-$$

$$-3\mu k^{-1} \left(u_x + \frac{1}{2}u\partial_x\right) \int^y \left(u^2\right)_x dy, \tag{24}$$

а розв'язок рівняння (24) має вигляд

$$\hat{u} = u + k\mu^{-1}\varphi_1 \left(C + \Omega\left[\varphi\right]\right)^{-1} \varphi_2^T,$$

де φ_i, $i \in \{1, 2\}$ — дійсні функції.

II. Система (9′) допускає редукцію $u_1 := u, \left(y \to \frac{1}{k}y\right)$, $u_2 = \mu \in \mathbb{R}$:

$$u_{t_3} = \left(\partial_x^3 - k^3\partial_y^3\right) u + 3\mu k^2 \partial_y u \int^x u_y dx - 3\mu k^{-1}\partial_x u \int^y u_x dy. \tag{25}$$

Рівняння (25) є просторово-двовимірним симетричним узагальненням рівняння KdV, відомим як рівняння Нижника ([5, 18]), а оператори L, L^* мають вигляд

$$L = \begin{pmatrix} \partial_x & u \\ \mu & k\partial_y \end{pmatrix}, \quad L^* = \begin{pmatrix} -\partial_x & \mu \\ \bar{u} & -k\partial_y \end{pmatrix}.$$

Функції φ, $\bar{\psi}$, які є розв'язками рівнянь $L\varphi = 0$, $L^*\bar{\psi} = 0$, задовольняють співвідношення

$$k\varphi_{2xy} = \mu u\varphi_2, k\varphi_{2y} = -\mu\varphi_1, k\bar{\psi}_{1xy} = \mu\bar{u}\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_{1x} = \mu\bar{\psi}_2.$$

Враховуючи останні співвідношення, редукований потенціал Ω_r має вигляд

$$\Omega_r := C + \int_{M_0}^{M} Pdx + Qdy + R_2dt_2 + R_3dt_3 =$$

$$= C - k\int_{M_0}^{M} \mu^{-1}\varphi_{2x}^*\varphi_2 dx + \mu^{-1}\varphi_2^*\varphi_{2y}dy - i\left[\mu^{-1}\varphi_{2xx}^*\varphi_2 - \mu^{-1}\varphi_{2x}\varphi_2 - \right.$$

$$-k\left(k\mu^{-1}\varphi_{2y}^*\varphi_{2y} - k\mu^{-1}\varphi_2^*\varphi_{2yy}\right)\Big] dt_2 - \Big[\mu^{-1}\varphi_{2xx}^*\varphi_{2x} - \mu^{-1}\varphi_{2xxx}^*\varphi_2 - \varphi_{2x}^*\varphi_{2xx} - \tag{26}$$

$$-k^2\left(k\mu^{-1}\varphi_y^*\varphi_{2yy} - k\mu^{-1}\varphi_{2yy}^*\varphi_{2y} - k\mu^{-1}\varphi_2^*\varphi_{2yyy}\right) -$$

$$-\left. 3k\varphi_2^*\varphi_{2y}\int^x u_y dx - 3k^{-1}\varphi_{2x}^*\varphi_2\int^y u_x dy\right] dt_3 := \Omega_r\left[\varphi_2\right].$$

Лема 2. *З формул (26) маємо співвідношення*

1. $P + P^* = -k\left(\varphi_2^*\varphi_2\right)_x$,
2. $Q + Q^* = -k\left(\varphi_2^*\varphi_2\right)_y$,
3. $R_3 + R_3^* = -k\left(\varphi_2^*\varphi_2\right)_{t_3}$.

Наслідок 4. *1. Потенціал $\Omega_r[\varphi_2]$ задовольняє співвідношення*

$$\Omega_r[\varphi_2] + \Omega_r^*[\varphi_2] = C + C^* - k\left(\varphi_2^*\varphi_2\right)\big|_{M_0}^{M}.$$

2. При $C = \tilde{C} - \frac{1}{2}k\varphi_2^*\varphi_2(M_0)$, де $\tilde{C}^* = -\tilde{C}$, отримуємо

$$\Omega_r[\varphi_2] + \Omega_r^*[\varphi_2] = -k\varphi_2^*\varphi_2(x,y,t_3).$$

Лема 3. *З перетворення Дарбу $L \to \hat{L}$, $A_3 \to \hat{A}_3$ (13) при редукціях*

$$\varphi_1 = -k\mu^{-1}\varphi_{2y}, \quad \psi_2 = -\mu^{-1}\psi_{1x}, \quad \psi_1 = \mu\bar{\varphi}_2,$$

маємо

$$\mu \to \hat{\mu} = (-1)^K \mu \frac{\det\Omega^*}{\det\Omega}.$$

Доведення. Величину

$$\hat{\mu} := \hat{u}_2 = \mu + k\varphi_2\Omega^{-1}[\psi,\varphi]\psi_1^T \equiv \mu + \mu k\varphi_2\Omega_r^{-1}[\varphi_2]\varphi_2^*$$

(13) обчислюємо, використовуючи відому алгебричну формулу $\det(I+AB) = \det(I+BA)$,

$$\hat{\mu} = (\det\hat{\mu}) = \mu\det\left(1 + k\varphi_2\Omega_r^{-1}[\varphi_2]\varphi_2^*\right) = \mu\det\left(I_k + k\varphi_2^*\varphi_2\Omega_r^{-1}[\varphi_2]\right) =$$
$$= \mu\det\left(I_k - \left(\Omega_r + \Omega_r^*\right)\Omega_r^{-1}\right) = \mu(-1)^K\frac{\det\Omega_r^*}{\det\Omega_r}.$$

□

Наслідок 5. *Нехай 1) $\det\Omega_r^*[\varphi_2] = \det\Omega_r[\varphi_2]$ (наприклад, $\bar{\Omega} = \Omega$), 2) $u = u(x,y,t_3)$ — розв'язок рівняння (25). Правильні наступні твердження.*

1. Функція

$$\hat{u} = u - k\varphi_1\Omega^{-1}[\psi,\varphi]\psi_2^T \equiv u + k^2\mu^{-1}\varphi_{2y}\Omega_r^{-1}[\varphi_2]\varphi_{2x}^*$$

є розв'язком рівняння (25) для парних значень K.

2. Функція $\hat{u} = -u - k^2\mu^{-1}\varphi_{2y}\Omega_r^{-1}[\varphi_2]\varphi_{2x}^*$ є розв'язком рівняння (25) для непарних значень K.

3. При $\bar{\varphi} = \varphi$, функція

$$\hat{u} = u + k^2\mu^{-1}\varphi_{2y}\Omega_r^{-1}[\varphi_2]\varphi_{2x}^T = u - k^2\mu^{-1}\frac{\begin{vmatrix}\Omega_r[\varphi_2] & \varphi_{2x}^T \\ \varphi_{2y} & 0\end{vmatrix}}{\left|\Omega_r[\varphi_2]\right|} \tag{27}$$

є дійсним розв'язком рівняння (25).

В найпростішому випадку при $K = 1$, $u = 0$, $k = \mu = 1$, $\left(\tilde{C} = 0\right)$, $\bar{\varphi}_2 = \varphi_2$ розв'язок (27) набуває вигляду

$$\hat{u} = 2\frac{\varphi_{2x}\varphi_{2y}}{\varphi_2^2},$$

де функція φ_2 задовольняє рівняння $\varphi_{2xy} = 0$.

Поклавши $\varphi(x,y,t) = f(x,t) + g(x,t)$, отримаємо відомий розв'язок Л. П. Нижника [5] (див., також [18])

$$\hat{u} = -2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\ln\left(f(x,t) + g(x,t)\right).$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Нижник Л.П. Обратная нестационарная задача рассеяния. — Киев: Наук. думка, 1973. – 182 с.
2. Нижник Л.П., Починайко М.Д. *Интегрирование пространственно-двумерного нелинейного уравнений Шредингера методом обратной задачи* // Функцион. анализ и его прилож. – 1982. – Т.16, №1. – С.80–82.
3. Нижник Л.П., Починайко М.Д. *Нелинейное пространственно-двумерное уравнение Шредингера как интегрируемая гамильтонова система* // Успехи мат. наук. – 1982. – Т.37, №4. – С.111–112.
4. Починайко М.Д. *Высшее пространственно-двумерное нелинейное уравнение Шредингера* // Спектральная теория дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1986. – С.103–106.
5. Нижник Л.П. *Интегрирование многомерных нелинейных уравнений методом обратной задачи* // ДАН СССР. – 1980. – Т.254, №2. – С.332–335.
6. Нижник Л.П. Обратные задачи рассеяния для гиперболических уравнений. – Киев: Наук. думка, 1991. – 232 с.
7. Ablowitz M., Habevman R. *Non-linear evolution equations – two and three dimensions* // Phys. Rev. Lett. – 1975. – V.35, no 18. – P.1185–1189.
8. Cornille H. *Solutions of the generalized non-linear Schvodinger equation in two spatial dimensions* // J. Math. Phys. – 1979. – V.20, №1. – P.199–209.
9. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов: Метод обратной задачи. – М.: Наука, 1980. – 319 с.
10. Захаров В.Е. Метод обратной задачи рассеяния // Солитоны / Под ред. Р.Буллафа, Ф.Кодри. – М.: Мир, 1983. – С.270–309.
11. Matveev V.B., Salle M.A. Darboux transformations and solitons. – Berlin; Heidelderg: Springer, 1991. – 120 p.
12. Nimmo J.C. *Darboux transformations for two-dimensional Zakharov-Shabat* /AKNS spectral problem // Inverse Problems. – 1992. – V.8. – P.219–243.
13. Guil F., Manas M. *Darbox transformation for the Davey-Stewartson equations* // Phys. Lett. A. – 1996. – V.217. – P.1–6.
14. Сидоренко Ю.М. *Бінарні перетворення і (2+1)-вимірні інтегровні системи* // Укр.мат.журнал. – 2002. – Т.54, №11. - С. 1531–1550.
15. Sydorenko Yu.M. *Factorization of matrix differential operators and Darboux-like transformations* // Matematychni Studii. – 2003. – V.19, №2. – P.181–192.
16. Dubrovsky V.G., Formusatik I.B. *The construction of exact rational solutions with constant asymptotic values at infinity of two-dimentional NVN integrable nonlinear evolution equations via $\bar{\partial}$-dressing method* // J.Phys. A: Math. Gen. – 2001. – V.34. – P.1937–1851.
17. Dubrovsky V.G., Formusatik I.B. and Lisitsyn Ya.V. *New exact solution of some two-dimentional integrable nonlinear evolution equations via $\bar{\partial}$-dressing method* // Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. Mathematic ans its Application. – Kyiv, 2002. Part 1. – P.302-313.
18. Nizhnik L.P. *Inverse scattering problem for the wave eqations and its applications* // Parameter Identification and Inverse Problems in Hydrology, Geology and Ecology/ J.Gottlieb and P.DuChateu(eds.) – Kluwer Academic Publisher, 1996. – P.233-238.

19. Кулиш П.П., Липовский В.Д. *О гамильтоновой интерпретации метода обратной задачи для уравнений Деви-Стюардсона* // Зап.науч.семинаров ЛОМИ АН СССР. – 1987. – Т.164. – С.147–170.

Національний університет “Львівська політехніка”
Львівський національний університет імені Івана Франка

Надійшло 30.06.2003