А. М. Степин

Р. И. ГРИГОРЧУКУ — 50 ЛЕТ

23 февраля 2003 года исполнилось 50 лет известному математику, члену редколегии журнала "Математичнi студiї" Р. И. Григорчуку. В этой заметке я хочу рассказать о его становлении как специалиста, ведущего активную исследовательскую работу.

Родился Ростислав в Тернополе, в семье математика. Его отец, Иван Федорович Григорчук, на протяжении длительного времени, и вплоть до настоящего, преподовал математику в Черновицком университете. В Черновцах Ростислав Григорчук окончил среднюю школу, причем за время обучения в школе проявились его математические способности. Он успешно участвовал в Республиканской и Всесоюзной математических олимпиадах для школьников.

В Московский Государственный университет Ростислав Григорчук поступил в 1970 году. Впервые я встретился с ним в августе-сентябре 1972 года во время осенних полевых работ, куда обычно напрявляли студентов третьего курса под присмотром молодых преподователей. Такими кураторами в тот год были: от кафедры теории функций и функционального анализа — я и от кафедры дифференциальных уравнений — Михаил Александрович Шубин (ныне он профессор в Бостоне). Педагогическим итогом тогда стало то, что двое студентов, Ростислав Григорчук и Сергей Пидкуйко записались под мое научное руководство.

В течение 1972-73 учебного года эти студенты и ряд других работали в семинаре, который я начал вести на механико-математическом факультете в 1968 году. Успехи Григорчука в этом семинаре были заметны настолько, что уже в следующем учебном году я рекомендовал ему посещать семинар Я. Г. Синая на мехмате и семинар Д. В. Аносова в математическом институте, в работе которых участвовал и сам.

Среди моих математических интересов в то время был вопрос об изоморфизме равноэнтропийных бернуллиевских действий аменабельных групп, то есть таких, коротые обладают банаховым средним. Гипотезу о том, что это так, я сформулировал в 1970 году и тогда же анонсировал, что она подтверждается для действий счетных локально конечных групп.

С помощью приема продолжения изоморфизма действий с подгруппы на всю группу, мне удалось в 1972-73 гг. свести указанную гипотезу к случаю действий бернсайдовских групп (бесконечных периодических групп с конечным набором образующих). Действительно, бесконечная периодическая группа, не содержащая счетной локально-конечной подгруппы, содержит бернсайдовскую подгруппу. Таким образом, ставал вопрос о существовании аменабельных бернсайдовских групп. Этот вопрос (примерно в то же время поставленый и Дж. Розенблатом) непосредственным образом связан с эргодической теорией групп преобразований, поскольку энтропийный инвариант имеет смысл только для действий аменабельных групп.

Как стало известно позднее (1980), этот вопрос является усилением известной проблемы Дэя (1957) о существовании неэлементарных аменабельных групп. (Группа элементарна, если она принадлежит минимальному классу, содержащему конечные и абелевы группы и замкнутому относительно операций расширения, индуктивного предела

2000 *Mathematics Subject Classification:* 01A70.

и перехода к подгруппе и факторгруппе; в 1980 году Чоу подметил, что бернсайдовские группы неэлементарны.)

К 1973-74 гг. уже были известны конструкции, решающие проблему Бернсайда о существовании конечнопорожденных бесконечных периодических групп, как в общем, так и в ограниченном вариантах; это конструкции Голода (1964), Новикова-Адяна (1968), Алешина (1972). Имея в виду применение к задачам об аменабельных группах и полугруппах вероятностного критерия аменабельности (Кестен, 1959; Дэй, 1954), я предложил Григорчуку занятся изучением случайных блужданий на счетных группах и, в особенности, простых случайных блужданий в случае конечно-порожденных групп (простота означает, что начальное распределение равномерно и сосредоточено на множестве образующих и их обратных). В этом направлении одной из первых учебных задач было вычислить (с помощью теории представлений) вероятность возвращения в единицу для простого блуждания на решетке в группе Гейзенберга.

Для того, чтобы контролировать изменение спектрального радиуса простого блуждания на группе G (или, более обще, G-пространстве X) при введении в G новых соотношений (не забудем, что требуется построить периодическую группу), Ростислав Григорчук вывел формулу, связывающую спектральный радиус с показателем роста α_H подгруппы H в копредставлении $X = F_n/H$. Тогда я обратил его внимание на связь вычисления (оценки) величини α_H с алгоритмической разрешимостью проблемы тождества слов для группы $G = F_n/H$ (в том случае, когда подгруппа H нормальна), а также на публикации по этой проблеме, начиная с работ Тартаковского в “Математическом сборнике”. Далее, одна работа Саши Лифшица (1974), относящаяся к проблеме изоморфизма сдвигов Бернулли, помогла мне подметить схожесть некоторых комбинаторных задач, возникающих как в теории кодирования, так и при использовании вероятностного подхода к построению аменабельных полугрупп. Этот круг вопросов и некоторые из полученных к тому времени результатов в этом направлении, составили содержание нашего, совместного с Р. И. Григорчуком, доклада на IV Международном симпозиуме по теории кодирования и передачи информации (Репино-Куоккала, 1976).

В аспирантские годы (1976-78) Ростислав, не используя алгоритм Дэна, разрабатывает метод оценки спектрального радиуса случайных блужданий на группах со свойством слабого налегания определяющих соотношений. С другой стороны, в нашей совместной работе был найден, также основанный на алгоритме Дэна, эффективный критерий возможности кодирования, выраженный с помощью производящих функций кода; были явно выписаны уравнения для производящих функций кодов без перекрытий и получено достаточное условие аменабельности полугрупп, задаваемых кодами.

В связи с вопросом о существовании аменабельных бернсайдовских групп, отмечу, что (как говорят) фон Нейман в своем докладе на Международном конгрессе математиков в Амстердаме (1954) упомянул следующий вопрос: верно ли, что неаменабельность счетной группы эквивалентна существованию в ней подгруппы F_2? Вероятностный метод не приводит к ответу на этот вопрос, однако он вполне мог бы дать отрицательный ответ на следующее усиление вышеприведенной гипотезы, которое я предложил Р. Григорчуку в качестве одного из сюжетов для кандидатской диссертации: если счетная транзитивная группа преобразований G не имеет конечно-аддитивной инвариантной меры, то G содержит подгруппу F_2, действующую свободно. Ростислав Иванович построил контрпример к этому высказыванию, именно, используя оценки для спектрального радиуса случайных блужданий.

Поскольку вероятностный подход, как оказалось, не давал возможности построить аменабельную бернсайдовскую группу последовательным введением соотношений в F_2, то для ответа на вопрос о существовании таких групп потребовался новый подход, непосредственно связаный с теорией групп преобразований. Я поручил Ростиславу Григорчуку (тогда он был аспирантом третьего года обучения) ознакомится со статьей С. В. Алешина 1972 года и подготовить вариант геометрической конструкции бернсайдовских групп. Ростислав Иванович стал работать в этом направлении и продолжил готовить материалы к защите кандидатской диссертации. В декабре 1978 года в Совете механико-математического факультета МГУ он защитил диссертацию на тему “Банаховы средние на однородных пространствах и случайные блуждания”, а в июне следующего года — сдал в журнал “Функциональный анализ и его приложения” небольшую заметку “К проблеме Бернсайда о периодических группах”, в которой было изложена новая конструкция, дающая примеры бернсайдовских групп. За эту работу и результаты, полученные в его кандидатской диссертации, Р. И. Григорчуку была присуждена премия Московского математического общества для молодых математиков.

В связи с только что упомянутой заметкой в “Функциональном анализе” мне вспоминается, как еще летом 1980 года мы с Ростиславом ощутили предвкушение положительного ответа на вопрос о существовании аменабальних бернсайдовских групп. Дело в том, что для конечно-определенних групп, получаемых геометрической конструкцией, есть простой алгоритм (т.н. переписывающий процесс), решающий проблему тождества слов, и я уговорил А. Д. Варшавского (моего приятеля, имевшего доступ к высокоскоростной вычислительной машине) посчитать показатель короста для одной из таких бернсайдовских групп. Результат численного эксперимента указал на ее аменабельность.

Уже в 1981-82 учебном году Ростислав Иванович развил геометрическую конструкцию, построил несчетное семейство бесконечних групп с двумя образующими и анонсировал существование среди них групп, имеющих рост, промежуточний между полиномиальным и показательным, что давало решение проблем Милнора (1968) и Дэя. Далее, оказалось, что упомянутое несчетное семейство образует компакт в пространстве 2-порожденных групп, снабженном локальной топологией, базирующейся на идее локального изоморфизма конечно-порожденных групп, предложенной мною в 1978 г. В этом компакте почти абелевы группы всюду плотны и, стало быть, аменабельные группы образуют массивное множество; последнее получается с помощью комбинаторного критерия аменабельности и аппроксимационных соображений. Таким образом, мой подход к решению проблемы Дэя не требует доказывать промежуточность роста групп. Этим не ограничивается использование локальной топологии в изучении нового класса бернсайдовских групп, а также и других классов.

Период с 1984 по 1987 год фактически завершает описываемый здесь этап совместных с Р. И. Григорчуком исследований в направлении, пограничном между эргодической теорией групп преобразований и асимптотической теорией групп. Тогда вышла наша с Григорчуком работа о модели Изинга с магнитным полем в случае, когда решеткой служит модулярная группа движений плоскости Лобачевского, а также и некоторые другие неаменабельные группы. Эта задача ведет свое начало от Г. Бете и рассматривалась известным специалистом по математической физике Т. Редже, вместе со своими сотрудниками Лундом и Разетти. Нам удалось полностью решить вопрос о фазовых переходах в этой модели и, что особенно интересно, вычислить термодинамические функции.

После этого Ростислав Иванович выполнил работу о связи сложности по Колмогорову с вопросом об алгоритмической разрешимости проблеми тождества слов. В 1987 году им была найдена правильная формулировка эргодической теоремы для действий свободных групп; отмечу, что это было сделано еще до того, как Линденштраус доказал эргодическую теорему для действий произвольных аменабельных групп. В том же году Григорчуку присвоили звание профессора, а докторскую диссертацию по алгебре (точнее, по специальности "математическая логика, алгебра и теория чисел") он защитил еше в 1985 году.

С этого времени публикации Ростислава Ивановича посвящены преимущественно вопросам алгебры и, отчасти, геометрии. В 1988 году он получает следующее обобщение теоремы Громова о почти нильпотентности групп полиномиального роста: полугруппа с законом сокращения, имеющая полиномиальный рост, почти нильпотентна по Мальцеву. Григорчуком предложено обобщение вопроса о связи полиномиального роста и нильпотентности, а именно, закон сокращения заменяется на свойство инверсности полугруппы; последнее означает, что каждому элементу g можно сопоставить элемент g^*, для которого $gg^*g = g$, и притом все идемпотенты в полугруппе коммутируют. Нашим учеником, Андреем Мелешкиным показано, что в такой постановке вопроса ответ отрицателен (1989); с другой стороны, при естественном дополнительном предположении о существовании нуля в полугруппе идемпотентов из полиномиального роста следует почти нильпотентность.

В 1990 году Р. И. Григорчук, будучи в Киото на Международном конгрессе математиков, участвовал в сопутствующем симпозиуме по теории полугрупп и в своем докладе там сформулировал ряд нерешенных вопросов. На один из этих вопросов, а именно, о взаимоотношенни аменабельности полугруппы и ее группы частных, нам с Григорчуком удалось дать ответ в статье, опубликованной в "Вестнике Московского университета" (1998). Еще одну работу нашего совместного интереса Ростислав Иванович опубликовал в 1995 году; в ней сделано обобщение полученного ранее мной и Таги-заде способа вычисления топологической энтропии символических систем, который основан на рассмотрении графа зацеплений запрещенных переходов.

В заключение отмечу, что описанное выше переплетение наших математических интересов отражает, как говорится, объективную реальность. Мои результаты приводили к постановкам вопросов, на некоторые из которых отвечал Григорчук. Иногда я высказывал гипотезы с учетом его результатов. Три сформулированные мной проблемы об аменабельных группах до сих пор остаются открытыми. Недавно Ростислав Иванович предпринял попытку решить одну из них, но она устояла. Зная его изобретательность, делаю вывод: мне удалось поставить хорошую задачу.

Работы, выполненные Р. И. Григорчуком после 1985-87 гг. можно объединить в следующие циклы: алгебраические вопросы, связанные с геометрией; уравнения в группах; исследование функций роста групп; неаменабельность и парадоксальные разбиения в духе Хаусдорфа-Банаха-Тарского; свойства групп, порожденных автоматами; спектры случайных блужданий. Отмечу также несколько публикаций, относящихся к проблеме Атьи об L^2-числах Бетти и к вопросам об ограниченных когомологиях.

Р. И. Григорчук активно сотрудничает с математиками, работающими в интересующих его областях, и охотно взаимодействует с молодежью. Известные мне ученики и молодые сотрудники Ростислава Ивановича — это Т. Нагнибеда, Л. Бартольди, А. Жук, В. Некрашевич, М. Мамагани, Т. Чечерини-Зильберштейн; назову здесь также наших общих учеников А. Болтенкова и А. Мелешкина.

Я завершу этот краткий очерк пожеланием Ростиславу Ивановичу Григорчуку долгих лет жизни, творческой активности и новых учеников.

Московский государственный университет