УДК 517.518

Э. А. Стороженко*

НЕРАВЕНСТВА ТИПА ЛАНДАУ-АДАМАРА ДЛЯ МЕР ПОЛИНОМА И ЕГО ПРОИЗВОДНЫХ

E. A. Storozhenko. *The inequalities of Landau-Hadamard type for the measures of a polynomial and its derivatives*, Matematychni Studii, **20** (2003) 92–96.

The measure of the derivative of a polynomial is estimated by the measures of the polynomial and its second derivative. Two sharp estimates are proved with different by the order constants according to initial conditions.

Э. А. Стороженко. *Неравенства типа Ландау-Адамара для мер полинома и его производных* // Математичні Студії. – 2003. – Т.20, №1. – С.92–96.

Мера производной полинома оценивается через меры полинома и его второй производной. В зависимости от начальных условий доказаны две окончательные оценки с разными по порядку константами.

1. Введение. Важный цикл исследований, выясняющих экстремальные свойства функций, связан с получением неравенств между нормами производных различных порядков этих функций. Первые неравенства такого типа встречаются у Е. Ландау (1913 г.) и Ж. Адамара (1914 г.) и имеют вид

$$\sup|f'(x)| \le C\left(\sup|f(x)|\cdot\sup|f''(x)|\right)^{1/2}, \tag{1}$$

константа C зависит от области изменения x: $C=2$, если $x\in(0,\infty)$ и $C=\sqrt{2}$, когда $x\in(-\infty,\infty)$. В настоящее время известны многочисленные аналоги неравенства (1) для функции и её производных из различных пространств L_p с $p\ge 1$. Имеются в виду в первую очередь результаты А. Н. Колмогорова, учеников С. Б. Стечкина (В. Н. Габушина, Л. В. Тайкова и др.) и Н. П. Корнейчука (В. Ф. Бабенко, А. А. Личуна и др.). В случае пространств L_p с $0<p<1$ теоремы формулируются достаточно сложно, а вопрос о точности констант в неравенствах не обсуждается (см. статью В. Н. Габушина [1]).

Наши результаты относятся к алгебраическим полиномам $P_n(z)$ с комплексными коэффициентами, а в качестве меры полинома P_n (по К. Малеру [2]) понимается функционал

$$\|P_n\|_0=\exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln|P_n(e^{it})|dt\right).$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 30C10, 30C15.

*Работа частично поддержана ДФФД, грант No. Ф7/329-2001.

Выбор такой меры обусловлен таким предельным равенством

$$\lim_{p\to 0}\|P_n\|_p=\lim_{p\to 0}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|P_n(e^{it})|^p dt\right)^{1/p}=\|P_n\|_0,$$

а важность изучения случая $p=0$ определяется тем, что из неравенства $\|P_n\|_0\le C_n\|Q_n\|_0$ вытекает оценка $\|P_n\|_p\le C_n\|Q_n\|_p$, $0<p\le\infty$. Здесь C_n одна и та же константа для всех p (см. об этом в [3]).

2. Вспомогательные факты. В доказательствах используется один результат N. Y. Briyn, T. A. Springer, В. В. Арестов [3] относительно мер композиции полиномов по Г. Сеге. Напомним это определение. Пусть

$$P_n(z)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k z^k,\qquad Q_n(z)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b_k z^k,$$

тогда

$$R_n(z)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k b_k z^k\quad\text{— композиция } P_n \text{ и } Q_n,$$

которую кратко обозначим $R_n=P_n\otimes Q_n$. Указанный выше результат B-S-A позволяет оценивать меру полинома R_n посредством мер P_n и Q_n:

$$\|R_n\|_0\le\|P_n\|_0\cdot\|Q_n\|_0. \tag{2}$$

Для вычисления меры полинома, кроме определения, обычно применяется полиномиальный вариант формулы Йенсена

$$\|P_n\|_0=|a_n|\prod_{|z_k|>1}|z_k|,\qquad z_k\text{ — нули } P_n. \tag{3}$$

Окончательность полученных оценок обычно реализуется на конкретных полиномах. С этой целью понадобятся меры полиномов

$$U(z)=(1+z)^n-1\quad\text{и}\quad V(z)=(1+z)^n-nz-1,\quad n\ge 2.$$

Мера $U(z)$ подсчитана в работе [4]:

$$\|U_n\|_0=\|(1+z)^n-1\|_0=\prod_{\pi/6<k<5\pi/6}2\sin\frac{\pi k}{n}=A_n, \tag{4}$$

$$A_n\approx(1,4)^n.$$

Для оценки меры полинома V_n сначала установим, что, если $\sigma_n(P_n)=\sum_{k=0}^{n}a_k\left(1-\frac{k}{n+1}\right)z^k$ — среднее арифметическое полиномов $\sum_{k=0}^{m}a_k z^k$, $m\in\{0,...,n\}$, то

$$\|\sigma_n(P_n)\|_0\le\|P_n\|_0.$$

Действительно, запишем полином P_n в виде $P_n(z)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b_k z^k$ и представим $\sigma_n(P_n)$ как композицию с полиномом P_n:

$$\sigma_n(P_n)=P_n\otimes\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)z^k=P_n\otimes Q_n.$$

Очевидно, что

$$Q_n(z) = (1+z)^n - \frac{n}{n+1}(1+z)^{n-1} \cdot z = (1+z)^{n-1}\left(1 + \frac{z}{n+1}\right)$$

и $\|Q_n\|_0 = 1$. Остается применить оценку (2). Далее, преобразуем V_n:

$$V_n(z) = (1+z)^n - nz - 1 = z\left[\frac{(1+z)^n - 1}{z} - n\right] = z\left[\sum_{k=0}^{n-1}(1+z)^k - n\right] =$$

$$= z\sum_{k=1}^{n}\left[(1+z)^k - 1\right] = z^2\sum_{k=0}^{n-2}\sum_{m=0}^{k}(1+z)^m = z^2(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}\left(1 - \frac{k}{n-1}\right)(1+z)^k.$$

Теперь ясно, что

$$\|V_n\|_0 \le (n-1)\|\sum_{k=0}^{n-2}(1+z)^k\|_0 = (n-1)\|(1+z)^{n-1} - 1\|_0, \qquad n \ge 2$$

и с учетом (4)

$$\|V_n\|_0 \le (n-1)A_{n-1}. \tag{5}$$

Точное значение меры полинома V_n нам неизвестно. Но оценка (5) близка к истинной, так как на основании неравенства В. В. Арестова

$$\|V_n'\|_0 \le n\|V_n\|_0 \qquad \text{и} \qquad \|V_n\|_0 \ge \|(1+z)^{n-1} - 1\|_0 = A_{n-1}.$$

3. Основные теоремы.

Теорема 1. *Для любого полинома P_n справедливо неравенство*

$$\|P_n'(z) - P_n'(0)\|_0 \le A_{n-1}\left(\frac{n}{n-1}\|P_n\|_0\|P_n''\|_0\right)^{1/2}. \tag{6}$$

Равенство (6) реализуется на полиномах вида

$$P_n(z) = c\left(1 + e^{it}z\right)^n, \qquad c \in \mathbb{Z}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Доказательство. Если $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k z^k$, то

$$P_n'(z) - P_n'(0) = \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}k a_k z^{k-1}$$

и верна композиция

$$[P_n'(z) - P_n'(0)]\,z = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k z^k \otimes \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}k z^k = P_n \otimes S_n, \tag{7}$$

где $S_n(z) = [(1+z)^n - nz - 1]' \cdot z = zn\left[(1+z)^{n-1} - 1\right]$. Поэтому на основании оценок (2), (3) и (4)

$$\|P_n'(z) - P_n'(0)\|_0 \le \|P_n\|_0 \cdot nA_{n-1}. \tag{8}$$

Для сравнения $P_n'(z) - P_n'(0)$ с полиномом P_n'' запишем $P_n'(z)$ в более удобном виде:

$$P_n'(z) - P_n'(0) = z\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}b_k z^k.$$

Тогда

$$P_n''(z) = \sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}b_k(k+1)z^k$$

и

$$\left(P_n'(z) - P_n'(0)\right)z^{-1} = \sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}b_k(k+1)z^k \otimes \sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}\frac{z^k}{k+1} = P_n'' \otimes T_{n-2},$$

где

$$T_{n-2} = z^{-1}\int_0^z \sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}u^k du = \frac{1}{n-1}z^{-1}\left[(1+z)^{n-1} - 1\right]$$

и

$$\|T_{n-2}\|_0 = \frac{1}{n-1}A_{n-1}.$$

Следовательно,

$$\|P_n'(z) - P_n'(0)\|_0 \le \frac{A_{n-1}}{n-1}\|P_n''\|_0 \tag{9}$$

Остается перемножить оценки (8) и (9). Окончательность оценки (6) сразу следует из равенств $\|P_n\|_0 = c$, $\|P_n'(z) - P_n'(0)\|_0 = cnA_{n-1}$ и $\|P_n''\|_0 = cn(n-1)$, если $P_n(z) = c\,(1+e^{it}z)^n$. $\square$

Замечание 1. Так как полиномы $P_n'(z) - P_n'(0)$ и $P_n''(z)$ не зависят от свободного члена P_n и его коэффициента при z, то эти коэффициенты можно выбрать с наименьшим значением меры полинома. Тогда неравенство (6) будет иметь вид:

$$\|P_n'(z) - P_n'(0)\|_0 \le A_{n-1}\left(\frac{n}{n-1}\|P_n''\|_0 \inf_{A,B}\|P_n - (A+Bz)\|_0\right)^{1/2}. \tag{10}$$

Такая новая форма записи позволит расширить множество полиномов, реализующих оценку (10). В самом деле, пусть $P_n(z) = (1+z)^n - nz - 1$. Тогда $P_n'(0) = 0$, $\|P_n'(z)\|_0 = nA_{n-1}$, $\|P_n''(z)\|_0 = n(n-1)$ и $\inf_{A,B}\|P_n(z) - (A+Bz)\|_0 = 1$ и непосредственная подстановка этих мер в обе части оценки (10) приводит к равенству левой и правой частей. Аналогичное наблюдение приводит к оценке

$$\|P_n'\|_0 \le n\inf_C\|P_n - C\|_0.$$

Если предположить, что полином P_n удовлетворяет некоторому дополнительному условию, то константу в теореме 1 можно уменьшить.

Теорема 2. *Пусть полином $P_n(z)$ удовлетворяет условию $P_n'(0) = 0$. Тогда*

$$\|P_n'(z)\|_0 \le \left(A_{n-1}\frac{n}{n-1}\|P_n\|_0\|P_n''\|_0\right)^{1/2}. \tag{11}$$

Доказательство. Сохраняя схему рассуждений предыдущей теоремы, представим P'_n в виде композиций с полиномами P_n и P''_n. Пусть

$$P_n(z) = \sum_{k=0,\ a_1=0}^{n} \binom{n}{k} a_k z^k \qquad \text{и} \qquad P'_n(z) = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} a_k k z^{k-1}.$$

Тогда

$$P'_n(z)z = P_n(z) \otimes \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k z^k = P_n(z) \otimes n(1+z)^{n-1} \cdot z.$$

Далее, если полином P'_n записать в виде

$$P'_n(z) = z \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} b_k z^k,$$

то композиция P'_n с P''_n примет вид

$$P'_n(z)z^{-1} = P''_n \otimes \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} \frac{z^k}{k+1} = P''_n \otimes z \int_0^z \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} u^k du =$$

$$= P''_n \otimes \frac{1}{n-1} \left[(1+z)^{n-1} - 1\right].$$

Следовательно,

$$\|P'_n\|_0 \le n\|P_n\|_0,$$

$$\|P'_n\|_0 \le \frac{A_{n-1}}{n-1}\|P''_n\|_0$$

и теорема доказана. □

Вопрос об окончательности оценки (11) упирается в вычисление меры экстремального полинома $P_n(z)$. Естественно в качестве такого полинома взять $P_n(z) = (1+z)^n - nz - 1$ с $P'_n(0) = 0$. Точно определяются меры $\|P'_n\|_0 = nA_{n-1}$ и $\|P''_n\|_0 = n(n-1)$. Но для меры полинома P_n известны лишь оценки (см. (5))

$$A_{n-1} \le \|P_n\|_0 \le (n-1)A_{n-1}.$$

Поэтому этот полином является экстремальным лишь с точностью до множителя $\frac{1}{n-1}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Габушин В. Н. *Неравенства между производными в метриках L_p при $0 < p \le \infty$* // Изв. АН СССР, Серия мат. – 1976. – Т.40, №4. – С.869–892.
2. Mahler K. *On the zeros of the derivative of a polynomial* // Proc. Roy. Soc. (London) – 1961. – V. 264, №1317 – P.145–154.
3. Арестов В. В. *Интегральные неравенства для алгебраических многочленов на единичной окружности* // Матем. заметки. – 1990. – Т. 48, №4. – С.7–18.
4. Стороженко Э. А. *К проблеме Малера о нулях полиномов и их производных* // Матем. сборник. – 1996. – Т. 178, №5. – С.111-120.

Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова
jurish@te.net.ua

Поступило 10.06.2003