УДК 517.946

І. Д. Пукальський

ЗАГАЛЬНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ СИНГУЛЯРНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

I. D. Pukalsky. *Universal linear problem for singular parabolic equations*, Matematychni Studii, **20** (2003) 61–74.

Existence and uniqueness of a general problem for parabolic equations with any power order of coefficients degeneration in the space of classical functions with a power weight is proved. An estimate of a solution of the problem in corresponding spaces is found.

И. Д. Пукальский. *Общая краевая задача для сингулярных параболических уравнений* // Математичні Студії. – 2003. – Т.20, №1. – С.61–74.

В пространстве классических функций со степенным весом доказано существование и единственность решения общей краевой задачи для неравномерно параболических уравнений с произвольным степенным порядком вырождения коэффициентов. Найдена оценка решения задачи в соответствующих пространствах.

В сучасних прикладних і теоретичних дослідженнях дуже часто зустрічаються задачі з різними виродженнями. Так, у рівнянні Шредінгера, яке описує стан квантомеханічної системи, коефіцієнти визначають потенціальну енергію і мають степеневі особливості при молодших похідних [1]. В монографії [2] побудовано теорію класичних розв'язків задачі Коші та крайових задач для рівномірно параболічних рівнянь, які мають особливості обмеженого порядку на межі області. Узагальнений розв'язок загальної еліптичної задачі для рівняння з степеневим виродженням коефіцієнтів певного порядку на межі області досліджувався в [3], а крайові задачі для нерівномірно параболічних рівнянь з виродженням — в [4, 5, 6]. У цій статті у просторах класичних функцій з степеневою вагою вивчається загальна крайова задача для нерівномірно параболічних рівнянь без обмеження на степеневий порядок виродження коефіцієнтів рівняння і крайових операторів.

Постановка задачі і основний результат. Нехай D — обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з межею ∂D. Розглянемо в області $Q = [0,T) \times D$ для параболічного рівняння задачу знаходження функції $u(t,x)$, що задовольняє при $t > 0$, $t \neq t^{(0)}$, $t_0 \in [0,T)$ рівняння

$$(Lu)(t,x) \equiv \left[D_t - \sum_{|k| \leq 2b} A_k(t,x) D_x^k \right] u(t,x) = f_0(t,x), \tag{1}$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 35K35, 35K65.

і початкову умову
$$u(0,x)=\varphi(x), \tag{2}$$
а на бічній поверхні $\Gamma=(0,T)\times\partial D$ крайові умови
$$(L_j u)(t,x)|_\Gamma \equiv \lim_{x\to z}\left[\sum_{|l|\le r_j} B_l^{(j)}(t,x)D_x^l u(t,x)\right]=f_j(t,z) \tag{3}$$
для $x\in D$, $z\in\partial D$, $t\ne t^{(0)}$, де $0\le r_j\le 2b-1$, $j\in\{1,\dots,b\}$,$D_x^k=D_{x_1}^{k_1}\dots D_{x_n}^{k_n}$,$|k|=k_1+k_2+\dots+k_n$. Порядок особливості коефіцієнтів операторів L і L_j характеризуватимуть функції: $s_1(q_1,t)=|t-t^{(0)}|^{q_1}$ при $|t-t^{(0)}|\le 1$, $s_1(q_1,t)\equiv 1$, якщо $|t-t^{(0)}|\ge 1$;
$$s_2(q_2,x)=\begin{cases}|x-y|^{q_2}, & \text{якщо } |x-y|\le 1,\\ 1, & \text{якщо } |x-y|\ge 1;\end{cases}$$
$|x-y|=\min\limits_{y\in\partial D}\,[\sum_{i=1}^n(x_i-y_i)^2]^{1/2}$.

Нехай $\overline{Q}=[0,T]\times\overline{D}$, $\overline{D}=D\cup\partial D$, $P(t,x)$, $P_1(t^{(1)},x^{(1)})$, $P_2(t^{(2)},x^{(2)})$, $H_i(t^{(1)},x^{(2)})$ — довільні точки із $\overline{Q}$, $i\in\{1,\dots,n\}$, $x^{(1)}=(x_1^{(1)},\dots,x_n^{(1)})$, $x^{(2)}=(x_1^{(1)},\dots,x_{i-1}^{(1)},x_i^{(2)}$, $x_{i+1}^{(1)},\dots,x_n^{(1)})$.

Позначимо через $C^N(\gamma,\beta;q;Q)$ множину функцій $u(t,x)$, визначених в $\overline{Q}$, які мають неперервні частинні похідні в області $Q^{(0)}\equiv Q\setminus[(t,x),\,t=t^{(0)},\,x\in D]$ вигляду $D_t^jD_x^ku$, $2bj+|k|\le[N]$, для яких скінченна норма
$$|u;\gamma,\beta;q;Q|_N=|u;\gamma,\beta;q;Q|_{[N]}+[u;\gamma,\beta;q;Q]_N\equiv$$
$$\equiv\sup_{P\in\overline{Q}}\sum_{2bj+|k|\le[N]} s((2bj+q)\gamma+(k,\gamma-\beta);P)|D_t^jD_x^ku(P)|+$$
$$+\sum_{r=1}^n\Big[\sup_{P_1,H_r\in\overline{Q}}\sum_{2bj+|k|=[N]} s((2bj+q)\gamma+(k,\gamma-\beta)+\{N\}(\gamma-\beta_r);\tilde P_1)|x_r^{(1)}-x_r^{(2)}|^{-\{N\}}\times$$
$$\times|D_t^jD_x^ku(P_1)-D_t^jD_x^ku(H_r)|+$$
$$+\sum_{2bj+|k|=[N]}\sup_{H_r,P_2\in\overline{Q}} s\left(\left(2bj+q+2b\left\{\frac{N}{2b}\right\}\right)\gamma+(k,\gamma-\beta);\tilde P_2\right)|t^{(1)}-t^{(2)}|^{-\{\frac{N}{2b}\}}\times$$
$$\times|D_t^jD_x^ku(H_r)-D_t^jD_x^ku(P_2)|\Big],\qquad |u;\gamma,\beta;0;Q|_0=\sup_{P\in\overline{Q}}|u(P)|\equiv|u|_Q.$$
Тут позначено:
$$s(q;P)=s_1(q_1,t)\cdot s_2(q_2,x);\quad s((k,\gamma-\beta);P)=s_1((k,\gamma^{(1)}-\beta^{(1)}),t)\cdot s_2((k,\gamma^{(2)}-\beta^{(2)}),x),$$
$$(k,\gamma^{(\nu)}-\beta^{(\nu)})=\sum_{i=1}^n k_i(\gamma^{(\nu)}-\beta_i^{(\nu)}),\quad \nu=1,2,\{N\}=N-[N],$$
$[N]$ — ціла частина числа N,
$$s(q;\tilde P_\nu)=\min(s(q;H_i),s(q;P_\nu)),\quad \gamma^{(\nu)}\ge 0,\quad \beta_i^{(\nu)}\in(-\infty,\infty),\ i\in\{1,\dots,n\}.$$

$C^N(\mu(|k|),Q)$ — множина функцій $v_k(t,x)$, визначених в $\overline{Q}$, які мають частинні похідні в області $Q^{(0)}$ вигляду $D_x^m u$, $|m| \le [N]$, для яких скінченна норма

$$\|v_k;\mu(|k|);Q\|_N = \sup_{P\in\overline{Q}} \sum_{|l|\le N} s((k,\mu(|k|)) + \delta(|k|)\mu(0) + |l|;P)|D_x^l v_k(P)| +$$

$$+\sum_{r=1}^{n} \Big\{ \sum_{|l|=[N]} \Big[\sup_{P_1,H_r\in\overline{Q}} s((k,\mu(|k|)) + \delta(|k|)\mu(0) + |l|;P_1) s_2(\{N\},\tilde{x}) |x_r^{(1)} - x_r^{(2)}|^{-\{N\}} \times$$

$$\times |D_x^l v_k(P_1) - D_x^l v_k(H_r)| + \sup_{P_2,H_r\in\overline{Q}} s((k,\mu(|k|)) + \delta(|k|)\mu(0) + |l|;P_2) s_1\left(\frac{\{N\}}{2b},\tilde{t}\right) \times$$

$$\times |t^{(1)} - t^{(2)}|^{-\frac{\{N\}}{2b}} |D_x^l v_k(H_r) - D_x^l v_k(P_2)| \Big] + \sup_{P_2,H_r\in\overline{Q}} s((k,\mu(|k|)) + \delta(|k|)\mu(0);P_2) \times$$

$$\times s_2\left(\left\{\frac{N}{2b}\right\},t\right) |t^{(1)} - t^{(2)}|^{-\left\{\frac{N}{2b}\right\}} |v_k(H_r) - v_k(P_2)| \Big\},$$

де $(k,\mu^{(\nu)}(|k|)) = \sum_{i=1}^{n}(k_i\mu_i^{(\nu)}(|k|))$, $\nu \in \{1,2\}$; $\delta(0) = 1$, $\delta(|k|) = 0$ для $|k| \ne 0$, $\mu_i^{(\nu)}(|k|) \ge 0$.

Нехай для задачі (1)–(3) виконуються умови:

а) коефіцієнти рівняння

$$A_k(t,x) \in C^\alpha(\mu(|k|),Q)$$

для $|k| \le 2b-1$,

$$A_k(t,x) \in C^\alpha(\beta,Q)$$

для $|k| = 2b$, $\alpha \in (0,1)$;

$$B_l^{(j)}(t,x) \in C^{2b-r_j+\alpha_j}(Q)$$

для $|l| = r_j$,

$$B_l^{(j)}(t,x) \in C^{2b-r_j+\alpha_j}(\varepsilon^{(j)}(|l|),Q)$$

для $|l| \le r_j - 1$, якщо $r_j \ge 1$, $\alpha_j \in (0,1)$, $\partial D \in C^{2b+\alpha}$, і крайова задача

$$\left[D_t - \sum_{|k|=2b} s((k,\beta);P) A_k(P) D_x^k \right] u(P) \equiv g_0(P);$$

$$u(0,x) = \varphi(x),$$

$$\lim_{x\to z\in\partial D} \sum_{|l|=r_j} s((l,\beta);P) B_l^{(j)}(P) D_x^l u(t,x) \equiv g_j(t,z)$$

параболічна [7];

б) функції $f_0(t,x) \in C^\alpha(\gamma,\beta;2b;Q)$, $\varphi(x) \in C^{2b+\alpha}(\tilde{\gamma},\tilde{\beta};0;D)$, $\tilde{\gamma} = (0,\gamma^{(2)})$, $\tilde{\beta}_i = (0,\beta_i^{(2)})$, $i \in \{1,\ldots,n\}$, $f_j(t,x) \in C^{2b-r_j+\alpha_j}(\gamma,\beta;r_j;Q)$,

$$\gamma^{(\nu)} = \max\left(\max_i\big(1+\beta_i^{(\nu)}\big), \max_{i,|k|<2b} \frac{\mu_i^{(\nu)}(|k|) - (k,\beta^{(\nu)})}{2b-|k|}, \max_{\substack{i,j;|l|<r_j\\ r_j\ge 1}} \frac{\varepsilon_j^{(\nu)}(|l|) - (l,\beta)}{r_j - |l|} \right),$$

$\nu \in \{1,2\}$;

в) для довільного $\varepsilon > 0$ задача (1), (2) з крайовою умовою

$$(L_j u)(t,x)|_{\Gamma_\varepsilon} = f_j(t,x)$$

параболічна в області

$$\overline{Q} = \{(t,x) \in Q, s_1(1,t) \geq \varepsilon > 0, s_2(1,x) \geq \varepsilon > 0\},$$

$$\Gamma_\varepsilon = \{(t,x) \in Q, s_1(1,x) = \varepsilon, s_2(1,t) \geq \varepsilon > 0\}.$$

Правильна така теорема.

Теорема 1. *Нехай для задачі (1)–(3) виконані умови а), б), в). Тоді існує єдиний розв'язок задачі (1)–(3) в просторі $C^{2b+\alpha}(\gamma,\beta;0;Q)$ і для нього правильна оцінка*

$$|u;\gamma,\beta;0;Q|_{2b+\alpha} \leq C\Big(|f;\gamma,\beta;2b;Q|_\alpha + |\varphi;\tilde{\gamma},\tilde{\beta};0;D|_{2b+\alpha} + \sum_{j=1}^{b} |f_j;\gamma,\beta;r_j;Q|_{2b-r_j+\alpha_j}\Big). \quad (4)$$

Стала C залежить від n, α, α_j, diam Q, *норми коефіцієнтів операторів L, L_j.*

Оцінки розв'язків крайових задач для рівнянь з гладкими коефіцієнтами. Нехай $Q_m = \Big\{(t,x) \in Q, s_1(1,t) \geq m_1^{-1},\ s_2(1,x) \geq m_2^{-1}, m_1 > 1, m_2 > 1\Big\}$— зростаюча послідовність областей, яка при $m_\nu \to \infty$, $\nu \in \{1,2\}$ збігається до Q, $D_m = \{x, x \in D, s_2(1,x) \geq m_2^{-1}\}$, $\Gamma_m = (0,T) \times \partial D_m$. Розглянемо загальну крайову задачу для параболічного рівняння

$$(L^{(1)}u_m)(t,x) \equiv \left[D_t - \sum_{|k|\leq 2b} a_k(t,x) D_x^k\right] u_m(t,x) = F(t,x), \quad (5)$$

$$u_m(0,x) = \Phi(x), \quad (6)$$

$$(L_j^{(1)}u_m)(t,x)\Big|_\Gamma \equiv \lim_{x\to z} \left[\sum_{|l|\leq r_j} b_l^{(j)}(t,x) D_x^l\right] u_m(t,x) \equiv F_j(t,z). \quad (7)$$

Тут

$$a_k(t,x) = A_k^{(1)}(t,x), \quad F(t,x) = f_0^{(1)}(t,x),$$

$$\Phi(x) = \varphi(x), \quad F_j(t,x) = f_j^{(1)}(t,x), \quad b_l^{(j)}(t,x) = B_{l,1}^{(j)}(t,x),$$

якщо $(t,x) \in (0,T) \times D_m$. Для $(t,x) \in Q \setminus ((0,T) \times D_m)$, коефіцієнти $a_k(t,x)$, $b_l^{(j)}(t,x)$; функції $F(t,x)$, $F_j(t,x)$, $\Phi(x)$ є розв'язками зовнішньої задачі Діріхле

$$D_t u = \Delta u, \qquad u(0,x) = 0, \qquad u|_{\Gamma_m} = g(t,x),$$

де, наприклад, для $a_k(t,x)$ $g(t,x) = A_k^{(1)}(t,x)|_{\Gamma_m}$; для $\Phi(x)$ $g(t,x) = \varphi(x)|_{\partial D_m}$. Коефіцієнти $A_k^{(1)}(t,x)$, $B_{l,1}^{(j)}(t,x)$ в області $Q^{(1)} = \{(t,x) \in Q, s_1(1,t) \leq m_1^{-1}, x \in D_m\}$ визначаються таким чином. Якщо $|k| \leq 2b-1$ або $(k,\beta^{(1)}) \geq 0$ при $|k| = 2b$, то для $t^{(0)} \in [0, m_1^{-1}]$, $x \in D_m$

$$A_k^{(1)}(t,x) = \min\{A_k(t,x), A_k(m_1^{-1},x)\},$$

а для $t^{(0)} \geq m_1^{-1}$, $x \in D_m$

$$A_k^{(1)}(t,x) = \min\Big\{A_k(t,x), \frac{m_1(t^{(0)}-t)+1}{2}A_k(t^{(0)}-m_1^{-1},x)+ \\ +\frac{m_1(t-t^{(0)})+1}{2}A_k(t^{(0)}+m_1^{-1}x)\Big\}.$$

У випадку $(k,\beta^{(1)}) < 0$ при $|k| = 2b$ для $t^{(0)} \in [0, m_1^{-1}]$, $x \in D_m$ беремо

$$A_k^{(1)}(t,x) = \max\{A_k(t,x), A_k(m_1^{-1},x)\},$$

а для $t^{(0)} \geq m_1^{-1}$, $x \in D_m$

$$A_k^{(1)}(t,x) = \max\Big\{A_k(t,x), \frac{m_1(t^{(0)}-t)+1}{2}A_k(t^{(0)}-m_1^{-1},x)+ \\ +\frac{m_1(t-t^{(0)})+1}{2}A_k(t^{(0)}+m_1^{-1},x)\Big\}.$$

Якщо $|l| \leq r_j - 1$ або $(l,\beta^{(1)}) \geq 0$ при $|l| = r_j$, то для $t^{(0)} \in [0, m_1^{-1}]$, $x \in D_m$

$$B_{l,1}^{(j)}(t,x) = \min\{B_l^{(j)}(t,x), B_l^{(j)}(m_1^{-1},x)\},$$

а при $t^{(0)} \geq m_1^{-1}$, $x \in D_m$

$$B_{l,1}^{(j)}(t,x) = \min\Big\{B_l^{(j)}(t,x), \frac{m_1(t^{(0)}-t)+1}{2}B_l^{(j)}(t^{(0)}-m_1^{-1},x)+ \\ +\frac{m_1(t-t^{(0)})+1}{2}B_l^{(j)}(t^{(0)}+m_1^{-1},x)\Big\}.$$

У випадку $(l,\beta^{(1)}) < 0$ при $|l| = r_j$ для $t^{(0)} \in [0, m_1^{-1}]$, $x \in D_m$ беремо

$$B_{l,1}^{(j)}(t,x) = \max(B_l^{(j)}(t,x), B_l^{(j)}(m_1^{-1},x)),$$

а при $t^{(0)} \geq m_1^{-1}$, $x \in D_m$

$$B_{l,1}^{(j)}(t,x) = \max\Big(B_l^{(j)}(t,x), \frac{m_1(t^{(0)}-t)+1}{2}B_l^{(j)}(t^{(0)}-m_1^{-1},x)+ \\ +\frac{m_1(t-t^{(0)})+1}{2}B_l^{(j)}(t^{(0)}+m_1^{-1},x)\Big).$$

Визначимо також функції

$$f_j^{(1)}(t,x) = \min\Big(f_j(t,x), f_j(m_1^{-1},x)\Big)$$

для $t^{(0)} \in [0, m_1^{-1}]$, $x \in D_m$ і

$$f_j^{(1)}(t,x) = \min\Big(f_j(t,x), \frac{m_1(t^{(0)}-t)+1}{2}f_j(t^{(0)}-m_1^{-1},x)+\frac{m_1(t-t^{(0)})+1}{2}f_j(t^{(0)}+m_1^{-1},x)\Big)$$

для $t^{(0)} \geq m_1^{-1}$, $x \in D_m$, $j \in \{0,1,\ldots,b\}$.

Введемо в просторі $C^{2b+\alpha}(Q)$ норму $|u_m;\gamma,\beta;q;Q|_{2b+\alpha}$, еквівалентну при кожному фіксованому m_1, m_2 до гельдерової норми, яка визначається як і $|u;\gamma,\beta;q;Q|_{2b+\alpha}$, тільки замість $s_1(q_1,t)$, $s_2(q_2,x)$ беремо $d_1(q_1,t)$, $d_2(q_2,x)$,

$$d_1(q_1,t)=\begin{cases} s_1(q_1,t), & \text{якщо } |t-t^{(0)}|\geq m_1^{-1},\\ m_1^{-q_1}, & \text{якщо } |t-t^{(0)}|\leq m_1^{-1};\end{cases}$$

$$d_2(q_2,x)=\begin{cases} s_2(q_2,x), & \text{якщо } |x-y|\geq m_2^{-1},\\ m_2^{-q_2}, & \text{якщо } |x-y|\leq m_2^{-1};\end{cases}$$

$$d((k,\gamma-\beta);P)=d_1((k,\gamma^{(1)}-\beta^{(1)}),t),\quad d_2((k,\gamma^{(2)}-\beta^{(2)}),x).$$

За накладених умов на гладкість коефіцієнтів операторів $L^{(1)}$, $L_j^{(1)}$ і даних задачі існує єдиний розв'язок задачі (5)–(7), який належить до простору $C^{2b+\alpha}(Q)$ і має при кожному фіксованому m_1, m_2 скінченну норму $|u_m;\gamma,\beta;0;Q|_{2b+\alpha}$ ([2], теорема 7.1, с. 83). Знайдемо оцінку похідних розв'язку $u_m(x)$.

Теорема 2. *Якщо виконані умови теореми 1, то для розв'язку задачі (5)–(7) правильна оцінка*

$$|u_m;\gamma,\beta;0;Q|_{2b+\alpha}|\leq C(|F;\gamma,\beta;2b;Q|_\alpha+|\Phi;\tilde{\gamma},\tilde{\beta};0;D|_{2b+\alpha}+$$
$$+\sum_{j=1}^{b}|F_j;\gamma,\beta;r_j;Q|_{2b+r_j-\alpha_j}+|u_m|_Q). \tag{8}$$

Стала C не залежить від m_1, m_2.

Доведення. Використовуючи означення норми і інтерполяційні нерівності ([7], стор. 176), маємо

$$|u_m;\gamma,\beta;0;Q|_{2b+\alpha}\leq(1+\varepsilon^\alpha)[u_m;\gamma,\beta;0;Q]_{2b+\alpha}+c(\varepsilon)|u_m|_Q. \tag{9}$$

Тому досить оцінити півнорму $[u_m;\gamma,\beta;0;Q]_{2b+\alpha}$. Із означення півнорми випливає існування в Q точок P_1, H_r, P_2, для яких правильна одна з нерівностей:

$$\frac{1}{4}[u_m;\gamma,\beta;0;Q]_{2b+\alpha}\leq E_1\equiv$$

$$\equiv\sum_{r=1}^{n}\sum_{2bj+|k|=2b}d((k,\gamma-\beta)+2bj\gamma+\alpha(\gamma-\beta_r);\tilde{P}_1)|x_r^{(1)}-x_r^{(2)}|^{-\alpha}\times$$
$$\times|D_t^jD_x^ku_m(P_1)-D_t^jD_x^ku_m(H_r)|; \tag{10}$$

$$\frac{1}{4}[u_m;\gamma,\beta;0;Q]_{2b+\alpha}\leq E_2\equiv$$

$$\equiv\sum_{r=1}^{n}\sum_{2bj+|k|=2b}d((k,\gamma-\beta)+(2bj+\alpha)\gamma;\tilde{P}_2)|t^{(1)}-t^{(2)}|^{-\frac{\alpha}{2b}}\times$$
$$\times|D_t^jD_x^ku_m(H_r)-D_t^jD_x^ku_m(P_2)|. \tag{11}$$

Якщо $|x_i^{(1)} - x_i^{(2)}| \geq n^{-1}\rho d(\gamma - \beta_i; \tilde{P}_1) \equiv T_1$, $\rho \in (0,1)$, то використовуючи інтерполяційні нерівності, маємо

$$E_1 \leq 2\varepsilon^{\alpha}[u_m; \gamma, \beta; 0; Q]_{2b+\alpha} + c(\varepsilon)|u_m|_Q.$$

Вибираючи $\varepsilon = 16^{-1/\alpha}$ з нерівності (10), знаходимо

$$[u_m; \gamma, \beta; 0; Q]_{2b+\alpha} \leq c|u_m|_Q. \tag{12}$$

Використовуючи інтерполяційні нерівності і нерівність (11) у випадку $|t^{(1)} - t^{(2)}| \geq n^{-1}\rho^{2b}d(2b\gamma; \tilde{P}_2) \equiv T_2$, одержимо

$$[u_m; \gamma, \beta; 0; Q]_{2b+\alpha} \leq c|u_m|_Q. \tag{13}$$

Розглянемо випадок, коли $|x_i^{(1)} - x_i^{(2)}| \leq T_1$, або $|t^{(1)} - t^{(2)}| \leq T_2$. Нехай

$$\min(d(\gamma, \tilde{P}_1), d(\gamma, \tilde{P}_2)) = d(\gamma; P_1), |x_i^{(1)} - \xi_i| \leq 2T_1,\ \xi \in \partial D.$$

Позначимо через $K(r, P)$ кулю радіуса r, $r \geq 8T_1 n$ з центром в деякій точці $P \in \Gamma$, яка містить точки P_1, H_i, P_2. Використовуючи обмеження на гладкість поверхні ∂D, можна розпрямити $\partial D \cap K(r, P)$ за допомогою взаємно однозначного перетворення $x = \psi(y)$ ([8], стор. 126), в результаті якого область $\Pi = Q \cap K(r, P)$ переходить в Π_1, для точок якої $t \geq 0$, $y_n \geq 0$. Якщо покласти $u_m(t,x) = v_m(t,y)$, $P_\nu \equiv B_\nu$, $\nu \in \{1,2\}$, $E_\nu \equiv E^{(\nu)}$, $H_i = R_i$, $d(\gamma; P_1) \equiv h(\gamma, B_1)$ і коефіцієнти операторів задачі (5)–(7) при цьому перетворенні позначити $\lambda_k(t,y)$, $a_l^{(j)}(t,y)$, то $v_m(t,y)$ в Π_1 буде розв'язком задачі

$$\left[D_t - \sum_{|k|=2b} \lambda_k(B_1) D_y^k\right] v_m(t,y) = \sum_{|k|=2b} [\lambda_k(t,y) - \lambda_k(B_1)] D_y^k v_m(t,y) +$$

$$+ \sum_{|k|<2b} \lambda_k(t,y) D_y^k v_m(t,y) + F(t, \psi(y)) \equiv F_0(t,y), \tag{14}$$

$$v_m(0,y) = \Phi(\psi(y)) \equiv \Phi_1(y), \tag{15}$$

$$\sum_{|l|=r_j} [a_l^{(j)}(B_1) D_y^l v_m(t,y)|_{y_n=0} = \Big[\sum_{|l|=r_j} [a_l^{(j)}(B_1) - a_l^{(j)}(t,y)] D_y^l v_m(t,y) +$$

$$+ \sum_{|l|<r_j} a_l^{(j)}(t,y) D_y^k v_m(t,y) + F_j(t, \psi(y))\Big]|_{y_n=0} \equiv g_m^{(j)}(t,y)|_{y_n=0}. \tag{16}$$

В задачі (14)–(16) зробимо заміну $v_m(t,y) \equiv \omega_m(t,z)$, $z_i = h(\beta_i; B_1) y_i$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Тоді $\omega_m(t,z)$ буде розв'язком задачі

$$(L^{(2)}\omega_m)(t,z) \equiv \left[D_t - \sum_{|k|=2b} h((k,\beta); B_1) \lambda_k(B_1) D_z^k\right] \omega_m(t,z) = F_0(t,Z),$$

$$\omega_m(0,z) = \Phi_1(Z),$$

$$(L_j^{(2)}\omega_m)(t,z)\equiv\sum_{|l|=r_j}[h((k,\beta);B_1)a_l^{(j)}(B_1)D_z^l\omega_m(t,z)|_{z_n=0}=g_m^{(j)}(t,Z)|_{z_n=0},$$

де $Z=(h^{-1}(\beta_1;B_1)z_1,h^{-1}(\beta_2;B_1)z_2,\dots,h^{-1}(\beta_n;B_1)z_n)$.

Позначимо через $z_i^{(1)}=h(\beta_i;B_1)y_i^{(1)}$, $N_\nu=\{(t,z),\ |t-t^{(1)}|\le n^{-2b}\nu^{2b}\rho^{2b}h(2b\gamma;B_1),$ $|z_i-z_i^{(1)}|\le\nu\rho h(\gamma;B_1)n^{-1},\ i\in\{1,\dots,n\},\ z_n\ge 0,\ t\ge 0\}$ і візьмемо функцію $\mu(t,z)$ – $(2b+1)$ разів диференційовну, яка задовольняє нерівності

$$\mu(t,z)=\begin{cases}1, & (t,z)\in N_{1/4},\quad 0\le\mu(t,z)\le 1;\\ 0, & (t,z)\notin N_{3/4},\quad |D_t^lD_z^k\mu(t,z)|\le C_{lk}h^{-1}((2bl+|k|)\gamma;B_1).\end{cases}$$

Тоді функція $W_m(t,z)=\mu(t,z)\omega_m(t,z)$ задовольняє крайову задачу

$$(L^{(2)}W_m)(t,z)=\sum_{|k|=2b}h((k,\beta);B_1)\lambda_k(B_1)\sum_{|p|<|k|}C_{|k|}^{|p|}D_z^{k-p}\mu D_z^p\omega_m+$$

$$+\omega_mD_t\mu+F_0(t,Z)\mu(t,z)\equiv F^{(0)}(t,z),$$

$$W_m(0,z)=\Phi_1(Z)\mu(0,z)\equiv\Phi_2(z),\tag{17}$$

$$(L^{(2)}W_m)(t,z)|_{z_n=0}=\Big[\sum_{|l|=r_j}h((k,\beta);B_1)a_l^{(j)}(B_1)\sum_{|p|<|l|}C_{|l|}^{|p|}D_z^{l-p}\mu D_z^p\omega_m+$$

$$+g_m^{(j)}(t,Z)\mu(t,z)\Big]|_{z_n=0}\equiv G_m^{(j)}.$$

Коефіцієнти рівняння і крайових умов задачі (17), згідно з накладеними умовами, обмежені сталими, не залежними від точки B_1. Тому використовуючи теорему 7.1. ([2], стор. 83) для довільних точок $M_1(\tau^{(1)},\xi^{(1)})$ и $M_2(\tau^{(2)},\xi^{(2)})\in N_{1/4}$ правильна нерівність

$$d^{-\alpha}(M_1,M_2)|D_\tau^lD_z^k\omega_m(M_1)-D_\tau^lD_z^k\omega_m(M_2)|\le$$

$$\le C(|F_0|_{C^\alpha(N_{3/4})}+|\Phi_2|_{C^{2b+\alpha}(N_{3/4}\cap(t=0))}+\sum_{j=1}^b|G_m^{(j)}|_{C^{2b-r_j+\alpha_j}(N_{3/4}\cap(z_n=0))}),\tag{18}$$

$d(M_1,M_2)$ — параболічна відстань між M_1 і M_2, $2bl+|k|=2b$. Враховуючи властивості функції $\mu(t,z)$ і нерівність $h(\gamma,M)\ge\frac{1}{4}h(\gamma,B_1)$ для $M\in N_{3/4}$, маємо

$$|F^{(0)}|_{C^\alpha(N_{3/4})}\le ch^{-1}((2b+\alpha)\gamma;B_1)\Big(|F_0;\gamma,0;2b;N_{3/4}|_\alpha+$$

$$+|\omega_m;\gamma,0;0;N_{3/4}|_{2b}+|\omega_m|_{N_{3/4}}\Big),$$

$$|\Phi_2|_{C^{2b+\alpha}(N_{3/4}\cap(t=0))}\le ch^{-1}((2b+\alpha)\gamma;B_1)\Big(|\Phi_1;\tilde\gamma,0;0;N_{3/4}\cap(t=0)|_{2b+\alpha},\tag{19}$$

$$|G_m^{(j)}|_{C^{2b-r_j+\alpha_j}(N_{3/4}\cap(z_n=0))}\le ch^{-1}((2b+\alpha)\gamma;B_1)\Big(|g_m^{(j)};\gamma,0;r_j;N_{3/4}|_{2b-r_j+\alpha_j}+$$

$$+|\omega_m;\gamma,0;0;N_{3/4}|_{2b}+|\omega_m|_{N_{3/4}}\Big).$$

Із визначення простору $C^{2b+\alpha}(\gamma,0;0;Q)$ випливає справедливість нерівностей

$$c_1|\omega_m;\gamma,0;0;N_{3/4}|_l\leq|v_m;\gamma,\beta;0;V_{3/4}|_l\leq c_2|\omega_m;\gamma,0;0;N_{3/4}|_l,$$

$$V_\nu=\big\{(t,x),|t-t^{(1)}|\leq\nu^{2b}T_2,t\geq0,|y_i-y_i^{(1)}|\leq\nu T_1,i\in\{1,\ldots,n\}\big\}.$$

Підставляючи (19) в (18) і повертаючись до змінних (t,y), знаходимо

$$E^{(\nu)}\leq c\Big(|F_0;\gamma,\beta;2b;V_{3/4}|_\alpha+|v_m;\gamma,\beta;0;V_{3/4}|_{2b}+|v_m|_{V_{3/4}}+$$

$$+|\Phi_1;\tilde\gamma,\tilde\beta;0;V_{3/4}\cap(t=0)|_{2b+\alpha}+\sum_{j=1}^{b}|g_m^{(j)};\gamma,\beta;r_j;V_{3/4}|_{2b-r_j+\alpha_j}\Big).\qquad(20)$$

Знайдемо оцінку норми $|g_m^{(j)};\gamma,\beta;r_j;V_{3/4}|_{2b-r_j+\alpha_j}$. Враховуючи інтерполяційні нерівності, досить оцінити півнорму кожного доданка функції $g_m^{(j)}$. Наприклад, для $[a_l^{(j)}(t,y)D_y^lv_m;\gamma,\beta;r_j;V_{3/4}]_{2b-r_j+\alpha_j}\equiv E_3$ при $|l|<r_j$, маємо

$$E_3\leq\sum_{i=1}^{n}\sup_{R_1,H_i\in V_{3/4}}\sum_{|k|=2b-r_j}\sum_{|p|<|k|}C_{|k|}^{|p|}\Big([|y_i^{(1)}-y_i^{(2)}|^{-\alpha_j}|D_y^pa_l^{(j)}(R_1)-D_y^pa_l^{(j)}(H_i)|\times$$

$$\times h(r_j\gamma+(p-l,\gamma-\beta);\tilde R_1)h(\alpha_j(\gamma-\beta_i);\tilde y)][h((k-p+l,\gamma-\beta);\tilde R_1)|D_y^{k-p+l}v_m(R_1)|]+$$

$$+[|y_i^{(1)}-y_i^{(2)}|^{-\alpha_j}|D_y^{k-p+l}v_m(R_1)-D_y^{k-p+l}v_m(H_i)|h((k-p+l,\gamma-\beta);\tilde R_1)\times$$

$$\times h(\alpha_j(\gamma-\beta_i);\tilde y)][|D_y^pa_l^{(j)}(H_i)|h(r_j\gamma+(p-l,\gamma-\beta);\tilde R_1)]\Big)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sup_{H_i,R_2\in V_{3/4}}\sum_{|k|=2b-r_j}\sum_{|p|<|k|}C_{|k|}^{|p|}\Big([|\tau^{(1)}-\tau^{(2)}|^{-\frac{\alpha_j}{2b}}|D_y^pa_l^{(j)}(H_i)-D_y^pa_l^{(j)}(R_2)|\times$$

$$\times h(r_j\gamma+(p-l,\gamma-\beta);\tilde R_2)h(\alpha_j\gamma;\tilde\tau)][h((k-p+l,\gamma-\beta);\tilde R_2)|D_y^{k-p+l}v_m(H_i)|]+$$

$$+[|\tau^{(1)}-\tau^{(2)}|^{-\frac{\alpha_j}{2b}}|D_y^{k-p+l}v_m(R_2)-D_y^{k-p+l}v_m(H_i)|h((k-p+l,\gamma-\beta);\tilde R_2)\times$$

$$\times h(\alpha_j\gamma;\tilde\tau)][|D_y^pa_l^{(j)}(P_2)|h(r_j\gamma+(p-l,\gamma-\beta);\tilde R_2)]\Big)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sup_{H_i,R_2\in V_{3/4}}\Big([|\tau^{(1)}-\tau^{(2)}|^{-\frac{2b-r_j+\alpha_j}{2b}}|D_y^lv_m(R_2)-D_y^lv_m(H_i)|\times$$

$$\times h((l,\gamma-\beta)+(2b-r_j+\alpha_j)\gamma;\tilde{R}_2)][h(r_j\gamma-(l,\gamma-\beta))|a_l^{(j)}(R_2)|]+$$

$$+[|\tau^{(1)}-\tau^{(2)}|^{-\frac{2b-r_j+\alpha_j}{2b}}|a_l^{(j)}(R_2)-a_l^{(j)}(H_i)|h((2b+\alpha_j)\gamma-(l,\gamma-\beta);\tilde{R}_2)]\times$$

$$\times[h((l,\gamma-\beta);\tilde{R}_2)|D_y^l v_m(R_2)|]\Big)\leq c\left([v_m;\gamma,\beta;0;V_{3/4}]_{2b-r_j+|l|+\alpha_j}+|v_m|_{V_{3/4}}\right).$$

Подібно отримуємо оцінки інших доданків функції $g_m^{(j)}(t,y)$. Отже,

$$|g_m^{(j)};\gamma,\beta;r_j;V_{3/4}|_{2b-r_j+\alpha}\leq c_2\varepsilon_1[v_m;\gamma,\beta;0;V_{3/4}]_{2b+\alpha}+$$

$$+c\left(|v_m|_{V_{3/4}}+[F_j;\gamma,\beta;r_j;V_{3/4}]_{2b-r_j+\alpha_j}\right), \tag{21}$$

де $\varepsilon_1=n\rho^{\alpha_j}+n^2\varepsilon^{\alpha}$.

Для знаходження норми $|F_0;\gamma,\beta;2b;V_{3/4}|_\alpha$ досить оцінити півнорму кожного доданка функції $F_0(t,y)$. Наприклад, для $[\lambda_k D_x^k v_m;\gamma,\beta;2b;V_{3/4}]_\alpha\equiv E_4$ при $|k|<2b$, маємо

$$E_4\leq\sum_{i=1}^n\sup_{R_1,H_i\in V_{3/4}}\Big\{[h((k,\gamma-\beta)+\alpha(\gamma-\beta_i);\tilde{R}_1)|y_i^{(1)}-y_i^{(2)}|^{-\alpha}|D_y^k v_m(R_1)-$$

$$-D_y^k v_m(H_i)|][|\lambda_k(R_1)|h(2b\gamma-(k,\gamma-\beta);\tilde{R}_1)]+[|\lambda_k(R_1)-\lambda_k(H_i)|\times$$

$$\times|y_i^{(1)}-y_i^{(2)}|^{-\alpha}h(2b\gamma-(k,\gamma-\beta)+\alpha(\gamma-\beta_i);\tilde{R}_1)][h((k,\gamma-\beta);\tilde{R}_1)|D_y^k v_m(R_1)|]\Big\}+$$

$$+\sum_{i=1}^n\sup_{H_i,R_2\in V_{3/4}}\Big\{[h((k,\gamma-\beta)+\alpha\gamma;\tilde{R}_2)|\tau^{(1)}-\tau^{(2)}|^{-\frac{\alpha}{2b}}|D_y^k v_m(R_2)-D_y^k v_m(H_i)|]\times$$

$$\times[|\lambda_k(H_i)|h(2b\gamma-(k,\gamma-\beta);\tilde{R}_2)]+[|\lambda_k(R_1)-\lambda_k(H_i)||\tau^{(1)}-\tau^{(2)}|^{-\frac{\alpha}{2b}}\times$$

$$\times h(2b\gamma-(k,\gamma-\beta)+\alpha\gamma;\tilde{R}_2)][h((k,\gamma-\beta);\tilde{R}_2)|D_y^k v_m(R_2)|]\Big\}\leq$$

$$\leq c\left([v_m;\gamma,\beta;0;V_{3/4}]_{|k|+\alpha}+|v_m|_{V_{3/4}}\right).$$

Зазначимо, що подібно одержуємо оцінки інших доданків функції $F_0(t,y)$. Отже,

$$|F_0;\gamma,\beta;2b;V_{3/4}|_\alpha\leq$$

$$\leq c_3\varepsilon_2[v_m;\gamma,\beta;0;V_{3/4}]_{2b+\alpha}+c\left(|v_m|_{V_{3/4}}+|F;\gamma,\beta;2b;V_{3/4}|_\alpha\right), \tag{22}$$

де $\varepsilon_2=n^{2b}\rho^{2b}+\varepsilon^{\alpha}$, $\varepsilon\in(0,1)$, $\rho\in(0,1)$, ρ, ε — довільні числа.

Підставляючи (21) і (22) в (20), знаходимо

$$E^{(\nu)} \leq \varepsilon_3[v_m;\gamma,\beta;0;V_{3/4}]_{2b+\alpha} + c\Big(|v_m|_{V_{3/4}} + |F;\gamma,\beta;2b;V_{3/4}|_\alpha +$$

$$+|\Phi;\tilde\gamma,\tilde\beta;0;V_{3/4}\cap(t=0)|_{2b+\alpha} + \sum_{j=1}^{b}|F_j;\gamma,\beta;r_j;V_{3/4}|_{2b-r_j+\alpha_j}\Big),$$

де $\varepsilon_3 = c_3\left(n^{2\beta}\rho^{2\beta} + \varepsilon^\alpha + \sum\limits_{j=1}^{b} c_2(\rho^{\alpha_j} + n\varepsilon^\alpha)n\right)$, $\nu\in\{1,2\}$.

Отже, використовуючи нерівності (10), (11) і вибираючи ρ і ε досить малими, отримаємо

$$|u_m;\gamma,\beta;0;Q]_{2b+\alpha} \leq c\Big(|F;\gamma,\beta;2b;Q|_\alpha +$$

$$+|\Phi;\tilde\gamma,\tilde\beta;0;D|_{2b+\alpha} + \sum_{j=1}^{b}|F_j;\gamma,\beta;r_j;Q|_{2b-r_j+\alpha_j} + |u_m|_Q\Big). \tag{23}$$

Розглянемо випадок $|x_i^{(1)} - x_i^{(2)}| \leq T_1$, $|x_i^{(1)} - \xi_i| \geq 2T_1$, $\xi \in \partial D$. Нехай $d(\gamma, P_1) = \min(d(\gamma,\tilde P_1), d(\gamma,\tilde P_2))$. Запишемо задачу (5), (6) у вигляді

$$D_t u_m - \sum_{|k|=2b} a_k(P_1)D_x^k u_m = \sum_{|k|=2b}[a_k(P) - a_k(P_1)]D_x^k u_m +$$

$$+\sum_{|k|\leq 2b-1} a_k(P)D_x^k u_m + F(t,x) \equiv F_1(t,x), \tag{24}$$

$$u_m(0,x) = \Phi(x).$$

Нехай $V_1 \in Q$, $V_\nu = \big\{(t,x), |t-t^{(1)}| \leq \nu^{2b}T_2,\ t\geq 0,\ |x_i - x_i^{(1)}| \leq \nu T_1,\ i\in\{1,\dots,n\}\big\}$. В задачі (24) після заміни $u_m(t,x) = v_m(t,y)$, $y_i = d_1(\beta_i^{(1)}, t^{(1)})\, d_2(\beta_i^{(2)}, x^{(1)})x_i \equiv d(\beta_i;P_1)x_i$, $i\in\{1,\dots,n\}$ одержимо

$$(L^{(3)}v_m)(t,y) \equiv \left[D_t - \sum_{|k|=2b} d((k,\beta);P_1)a_k(P_1)D_y^k\right] v_m(t,y) =$$

$$= F^{(1)}(t, d^{-1}(\beta;P_1)y) \equiv F^{(2)}(t,Y),$$

$$v_m(0,y) = \Phi(Y),$$

де $Y = (d^{-1}(\beta_1;P_1)y_1,\dots,d^{-1}(\beta_n;P_1)y_n)$.

Позначимо через $y_i^{(1)} = d(\beta_i;P_1)x_i^{(1)}$, $P_1(t^{(1)},x^{(1)}) \equiv R_1(t^{(1)},y^{(1)})$, $N_\nu = \{(t,y), |t-t^{(1)}| \leq \nu^{2b}T_2,\ t\geq 0,\ |y_i - y_i^{(1)}| \leq \nu\rho d(\gamma;P_1),\ i\in\{1,\dots,n\}$ і візьмемо $2b+1$ разів диференційовану функцію $\eta(t,y)$, яка задовольняє умови:

$$\eta(t,y) = \begin{cases} 1, & (t,y)\in N_{1/4}, \quad 0\leq \eta(t,y)\leq 1; \\ 0, & (t,y)\in N_{3/4}, \quad |D_t^l D_y^k \eta(t,y)| \leq c_{lk}d^{-1}((2bl+|k|)\gamma;P_1). \end{cases}$$

Тоді функція $\xi_m(t,y)=v_m(t,y)\eta(t,y)$ задовольняє задачу Коші

$$(L^{(3)}\xi_m)(t,y)=\sum_{|k|=2b} d((k,\beta);P_1)a_k(P_1)\sum_{|p|<|k|} C_{|k|}^{|p|}D_y^{k-p}\eta D_y^p v_m+$$

$$+v_m D_t\eta+F^{(2)}(t,Y)\eta(t,y)\equiv F^{(3)}(t,y),$$

$$\xi_m(0,y)=\Phi(Y)\eta(0,y)\equiv\varphi_1(y). \qquad (25)$$

Оскільки коефіцієнти рівняння (25), згідно з умовою а), обмежені сталими, не залежними від точки P_1, то, використовуючи теорему 4.1 ([2], стор. 41), для довільних точок $M_1(\tau^{(1)},z^{(1)})$ і $M_2(\tau^{(2)},z^{(2)})\in N_{1/4}$ отримаємо, що правильна нерівність

$$d^{-\alpha}(M_1,M_2)|D_t^l D_x^k v_m(M_1)-D_t^l D_x^k v_m(M_2)|\le c(|F_3|_{C^\alpha(N_{3/4})}+|\varphi_1|_{C^{2b+\alpha}(N_{3/4}\cap(t=0))}),$$

$d(M_1,M_2)$ — параболічна відстань між M_1 і M_2, $2bl+|k|=2b$. Проводячи міркування, подібні до доведення нерівності (23), знаходимо

$$|u_m;\gamma,\beta;0;Q]_{2b+\alpha}\le c\Big(|F;\gamma,\beta;2b;Q|_\alpha+|\Phi;\tilde\gamma,\tilde\beta;0;D|_{2b+\alpha}+|u_m|_Q\Big). \qquad (26)$$

Об'єднавши нерівності (12), (13), (23) і (26) отримаємо оцінку (8). □

Теорема 3. *Нехай $u_m(t,x)$ — єдиний класичний розв'язок задачі (5)–(7) і виконані умови а)–в). Тоді для $u_m(t,x)$ правильна нерівність*

$$|u_m|_Q\le C(|L^1u_m;\gamma,\beta;2b;Q|_\alpha+|u_m;\tilde\gamma,\tilde\beta;0;D|_{2b+\alpha}+\sum_{j=1}^{b}|L_j^{(1)}u_m;\gamma,\beta;r_j;Q|_{2b-r_j+\alpha_j}). \quad (27)$$

Стала C не залежить від m_1, m_2.

Доведення. Використаємо методику доведення зауваження 2 ([9], стор. 79). Нехай нерівність (27) не виконується. Тоді існує послідовність $V_n\in C^{2b+\alpha}(Q)$ таких, що $|V_n|_Q=1$ и $V_n(0,x)$, $L^{(1)}V_n$, $L_j^{(1)}V_n$ прямують до нуля для відповідних V_n, коли $n\to\infty$. Із (8) випливає, що норми $|V_n;\gamma,\beta;0;Q|_{2b+\alpha}$ рівномірно обмежені. Тому існує підпослідовність $V_{n(i)}$, яка при $n(i)\to\infty$ збігається до розв'язку $V\in C^{2b+\alpha}(Q)$ однорідної крайової задачі. Оскільки розв'язок крайової задачі єдиний, при кожному фіксованому m_1, m_2, то $V\equiv 0$, що суперечить рівності $|V|_Q=1$. □

Доведення теореми 1. Зазначимо, що

$$|F;\gamma,\beta;2b;Q|_\alpha\le c|f_0;\gamma,\beta;2b;Q|_\alpha;$$

$$|F_j;\gamma,\beta;r_j;Q|_{2b-r_j+\alpha_j}\le c|f_j;\gamma,\beta;r_j;Q|_{2b-r_j+\alpha_j}.$$

Тому з нерівностей (8) і (27) маємо

$$|u_m;\gamma,\beta;0;Q|_{2b+\alpha}\le c\Big(|f_0;\gamma,\beta;2b;Q|_\alpha+|\varphi;\tilde\gamma,\tilde\beta;0;D|_{2b+\alpha}+$$

$$+\sum_{j=1}^{b}|f_j;\gamma,\beta;r_j;Q|_{2b-r_j+\alpha_j}\Big). \qquad (28)$$

Отже, права частина нерівності (28) не залежить від m_1, m_2, а послідовності

$$W_{kl}^{(m)} = \{d(2bl\gamma + (k, \gamma - \beta); P)|D_t^l D_x^k u_m(P)|, \quad 2bl + |k| \leq 2b\}$$

рівномірно обмежені, та одностайно неперервні в $\overline{Q}$. За теоремою Арцела, існують послідовності $\{W_{kl}^{(m(i))}\}$ рівномірно збіжні при $m(i) \to \infty$ до W_{kl}. Переходячи до границі при $m(i) \to \infty$ в задачі (5)–(7), одержимо, що $u(t,x) = W_{00}$ єдиний розв'язок задачі (1)–(3), $u \in C^{2b+\alpha}(\gamma, \beta; 0; Q)$ і правильна оцінка (4). □

Теорема 4. *Якщо виконані умови а)–в), $f_0(t,x) \in C^{\alpha}(\gamma, \beta; 0; Q)$, $f_j(t,x) \in C^{2b-r_j+\alpha_j}(\gamma, \beta; 0; Q)$, то єдиний розв'язок задачі (1)–(3) в просторі $C^{2b+\alpha}(\gamma, \beta; 0; Q)$ визначається інтегралами Стілтьєса з борелевою мірою*

$$u(t,x) = \int\limits_Q \Gamma(t,x; d\tau, d\xi) f_0(\tau, \xi) + \int\limits_D \Gamma(t,x; d\xi)\varphi(\xi) + \sum_{j=1}^{b} \int\limits_\Gamma \Gamma_j(t,x; d\tau, d_\xi S) f_j(\tau, \xi). \quad (29)$$

Доведення. Оскільки

$$C^{\alpha}(\gamma, \beta; 0; Q) \subset C^{\alpha}(\gamma, \beta; 2b; Q), \quad C^{2b-r_j+\alpha_j}(\gamma, \beta; 0; Q) \subset C^{2b-r_j+\alpha_j}(\gamma, \beta; r_j; Q),$$

то для $f_j(t,x) \in C^{2b-r_j+\alpha_j}(\gamma, \beta; 0; Q)$ і $f_0(t,x) \in C^{\alpha}(\gamma, \beta; 0; Q)$ виконуються нерівності

$$|f_0; \gamma, \beta; 2b; Q|_{\alpha} \leq c|f_0; \gamma, \beta; 0; Q|_{\alpha}, |f_j; \gamma, \beta; r_j; Q|_{2b-r_j+\alpha_j} \leq c|f_j; \gamma, \beta; 0; Q|_{2b-r_j+\alpha_j}.$$

Тому, враховуючи теорему 1, для розв'язку задачі (1)–(3) справедлива оцінка

$$|u; \gamma, \beta; 0; Q|_{2b+\alpha} \leq C(|f_0; \gamma, \beta; 0; Q|_{\alpha} + |\varphi; \tilde{\gamma}, \tilde{\beta}; 0; D|_{2b+\alpha} + \sum_{j=1}^{b} |f_j; \gamma, \beta; 0; Q|_{2b-r_j+\alpha_j}). \quad (30)$$

Розглядатимемо $u(t,x)$ при фіксованих (t,x), як лінійний неперервний функціонал $\mathcal{F}(f_0, \varphi, f_j, \ldots, f_b)$ на нормованому просторі

$$C_{\alpha} = C^{\alpha}(\gamma, \beta; 0; Q) \times C^{2b-r_j+\alpha_j}(\gamma, \beta; 0; Q) \times \cdots \times C^{2b-r_b+\alpha_b}(\gamma, \beta; 0; Q) \times C^{2b+\alpha}(\tilde{\gamma}, \tilde{\beta}; 0; D)$$

з нормою, що дорівнює правій частині нерівності (30). Беручи до уваги включення $C_{\alpha} \subset C$, на підставі теореми Рісса можна вважати, що $u(t,x)$ породжує борелеву міру $\Gamma(t,x;Z)$, яка визначена на σ-алгебрі підмножин Z області $\overline{Q}$, включаючи Q і всі її відкриті підмножини такі, що значення функціоналу визначається формулою (29). □

ЛІТЕРАТУРА

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. – М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1963. – 702 с.
2. Матійчук М.І. Параболічні сингулярні крайові задачі. – Київ: Інститут математики НАН України, 1999 – 176 с.
3. Ройтберг Я.А. Эллиптичесике граничные задачи в обобщенных функциях. – I – IV. Препринты. – Чернигов: Пединститут, 1990 – 1991.

4. Пукальский И.Д. *О функции Грина нелокальной краевой задачи с вырождениями* // Дифф. уравнения. – 1998. – Т. 34, №6. – С. 838–840.

5. Пукальский И.Д. *Задача с косой производной для неравномерно параболического уравнения* // Дифф. уравнения. – 2001. – Т. 37, №12. – С. 1637–1645.

6. Пукальський І.Д. *Одностороння нелокальна крайова задача для сингулярних параболічних рівнянь* // Укр. матем. журн. – 2001. – Т. 53, №11. – С. 1521–1531.

7. Эйдельман С.Д. Параболические системы. – М: Наука, 1964. – 445 с.

8. Камынин Л. И., Масленникова В.Н. *Граничные оценки шаудеровского типа решения задачи с косой производной для параболического уравнения в нецилиндрической области* // Сиб. матем. журн. – 1966. – Т. 7, №1. – С. 83–128.

9. С.Агмон, А.Дуглис, Л.Ниренберг. Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы. – М.: Иностр. л-ра, 1962. – 208 с.

Чернівецький національний університет ім. Ю.Федьковича
кафедра диференціальних рівнянь
appl@chnu.cv.ua

Надійшло 07.07.2003