

УДК 517.946

І. Д. ПУКАЛЬСЬКИЙ

ЗАГАЛЬНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ СИНГУЛЯРНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

I. D. Pukalsky. *Universal linear problem for singular parabolic equations*, *Matematychni Studii*, **20** (2003) 61–74.

Existence and uniqueness of a general problem for parabolic equations with any power order of coefficients degeneration in the space of classical functions with a power weight is proved. An estimate of a solution of the problem in corresponding spaces is found.

И. Д. Пукальский. *Общая краевая задача для сингулярных параболических уравнений* // *Математичні Студії*. – 2003. – Т.20, №1. – С.61–74.

В пространстве классических функций со степенным весом доказано существование и единственность решения общей краевой задачи для неравномерно параболических уравнений с произвольным степенным порядком вырождения коэффициентов. Найдена оценка решения задачи в соответствующих пространствах.

В сучасних прикладних і теоретичних дослідженнях дуже часто зустрічаються задачі з різними виродженнями. Так, у рівнянні Шредінгера, яке описує стан кванто-механічної системи, коефіцієнти визначають потенціальну енергію і мають степеневі особливості при молодших похідних [1]. В монографії [2] побудовано теорію класичних розв'язків задачі Коші та крайових задач для рівномірно параболических рівнянь, які мають особливості обмеженого порядку на межі області. Узагальнений розв'язок загальної еліптичної задачі для рівняння з степеневим виродженням коефіцієнтів певного порядку на межі області досліджувався в [3], а крайові задачі для нерівномірно параболических рівнянь з виродженням — в [4, 5, 6]. У цій статті у просторах класичних функцій з степеневою вагою вивчається загальна крайова задача для нерівномірно параболических рівнянь без обмеження на степеневий порядок виродження коефіцієнтів рівняння і крайових операторів.

Постановка задачі і основний результат. Нехай D — обмежена область в \mathbb{R}^n з межею ∂D . Розглянемо в області $Q = [0, T) \times D$ для параболического рівняння задачу знаходження функції $u(t, x)$, що задовольняє при $t > 0$, $t \neq t^{(0)}$, $t_0 \in [0, T)$ рівняння

$$(Lu)(t, x) \equiv \left[D_t - \sum_{|k| \leq 2b} A_k(t, x) D_x^k \right] u(t, x) = f_0(t, x), \quad (1)$$

2000 *Mathematics Subject Classification*: 35K35, 35K65.

Keywords: Existence and uniqueness, parabolic equations, power order of coefficients degeneration.

doi:10.30970/ms.20.1.61-74

© І. Д. Пукальський, 2003

і початкову умову

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad (2)$$

а на бічній поверхні $\Gamma = (0, T) \times \partial D$ крайові умови

$$(L_j u)(t, x)|_\Gamma \equiv \lim_{x \rightarrow z} \left[\sum_{|l| \leq r_j} B_l^{(j)}(t, x) D_x^l u(t, x) \right] = f_j(t, z) \quad (3)$$

для $x \in D$, $z \in \partial D$, $t \neq t^{(0)}$, де $0 \leq r_j \leq 2b - 1$, $j \in \{1, \dots, b\}$, $D_x^k = D_{x_1}^{k_1} \dots D_{x_n}^{k_n}$, $|k| = k_1 + k_2 + \dots + k_n$. Порядок особливості коефіцієнтів операторів L і L_j характеризуватимуть функції: $s_1(q_1, t) = |t - t^{(0)}|^{q_1}$ при $|t - t^{(0)}| \leq 1$, $s_1(q_1, t) \equiv 1$, якщо $|t - t^{(0)}| \geq 1$;

$$s_2(q_2, x) = \begin{cases} |x - y|^{q_2}, & \text{якщо } |x - y| \leq 1, \\ 1, & \text{якщо } |x - y| \geq 1; \end{cases}$$

$$|x - y| = \min_{y \in \partial D} [\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2]^{1/2}.$$

Нехай $\bar{Q} = [0, T] \times \bar{D}$, $\bar{D} = D \cup \partial D$, $P(t, x)$, $P_1(t^{(1)}, x^{(1)})$, $P_2(t^{(2)}, x^{(2)})$, $H_i(t^{(1)}, x^{(2)})$ — довільні точки із \bar{Q} , $i \in \{1, \dots, n\}$, $x^{(1)} = (x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$, $x^{(2)} = (x_1^{(1)}, \dots, x_{i-1}^{(1)}, x_i^{(2)}, x_{i+1}^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$.

Позначимо через $C^N(\gamma, \beta; q; Q)$ множину функцій $u(t, x)$, визначених в \bar{Q} , які мають неперервні частинні похідні в області $Q^{(0)} \equiv Q \setminus [(t, x), t = t^{(0)}, x \in D]$ вигляду $D_t^j D_x^k u$, $2bj + |k| \leq [N]$, для яких скінченна норма

$$\begin{aligned} |u; \gamma, \beta; q; Q|_N &= |u; \gamma, \beta; q; Q|_{[N]} + [u; \gamma, \beta; q; Q]_N \equiv \\ &\equiv \sup_{P \in \bar{Q}} \sum_{2bj+|k| \leq [N]} s((2bj+q)\gamma + (k, \gamma - \beta); P) |D_t^j D_x^k u(P)| + \\ &+ \sum_{r=1}^n \left[\sup_{P_1, H_r \in \bar{Q}} \sum_{2bj+|k|= [N]} s((2bj+q)\gamma + (k, \gamma - \beta) + \{N\}(\gamma - \beta_r); \tilde{P}_1) |x_r^{(1)} - x_r^{(2)}|^{-\{N\}} \times \right. \\ &\quad \left. \times |D_t^j D_x^k u(P_1) - D_t^j D_x^k u(H_r)| + \right. \\ &+ \sum_{2bj+|k|= [N]} \sup_{H_r, P_2 \in \bar{Q}} s \left(\left(2bj+q+2b \left\{ \frac{N}{2b} \right\} \right) \gamma + (k, \gamma - \beta); \tilde{P}_2 \right) |t^{(1)} - t^{(2)}|^{-\{ \frac{N}{2b} \}} \times \\ &\quad \left. \times |D_t^j D_x^k u(H_r) - D_t^j D_x^k u(P_2)| \right], \quad |u; \gamma, \beta; 0; Q|_0 = \sup_{P \in \bar{Q}} |u(P)| \equiv |u|_Q. \end{aligned}$$

Тут позначено:

$$s(q; P) = s_1(q_1, t) \cdot s_2(q_2, x); \quad s((k, \gamma - \beta); P) = s_1((k, \gamma^{(1)} - \beta^{(1)}), t) \cdot s_2((k, \gamma^{(2)} - \beta^{(2)}), x),$$

$$(k, \gamma^{(\nu)} - \beta^{(\nu)}) = \sum_{i=1}^n k_i (\gamma_i^{(\nu)} - \beta_i^{(\nu)}), \quad \nu = 1, 2, \{N\} = N - [N],$$

$[N]$ — ціла частина числа N ,

$$s(q; \tilde{P}_\nu) = \min(s(q; H_i), s(q; P_\nu)), \quad \gamma^{(\nu)} \geq 0, \quad \beta_i^{(\nu)} \in (-\infty, \infty), \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

$C^N(\mu(|k|), Q)$ — множина функцій $v_k(t, x)$, визначених в \bar{Q} , які мають частинні похідні в області $Q^{(0)}$ вигляду $D_x^m u$, $|m| \leq [N]$, для яких скінченна норма

$$\begin{aligned} \|v_k; \mu(|k|); Q\|_N &= \sup_{P \in \bar{Q}} \sum_{|l| \leq N} s((k, \mu(|k|)) + \delta(|k|)\mu(0) + |l|; P) |D_x^l v_k(P)| + \\ &+ \sum_{r=1}^n \left\{ \sum_{|l|=[N]} \left[\sup_{P_1, H_r \in \bar{Q}} s((k, \mu(|k|)) + \delta(|k|)\mu(0) + |l|; P_1) s_2(\{N\}, \tilde{x}) |x_r^{(1)} - x_r^{(2)}|^{-\{N\}} \times \right. \right. \\ &\times |D_x^l v_k(P_1) - D_x^l v_k(H_r)| + \sup_{P_2, H_r \in \bar{Q}} s((k, \mu(|k|)) + \delta(|k|)\mu(0) + |l|; P_2) s_1\left(\frac{\{N\}}{2b}, \tilde{t}\right) \times \\ &\times |t^{(1)} - t^{(2)}|^{-\frac{\{N\}}{2b}} |D_x^l v_k(H_r) - D_x^l v_k(P_2)| \left. \right] + \sup_{P_2, H_r \in \bar{Q}} s((k, \mu(|k|)) + \delta(|k|)\mu(0); P_2) \times \\ &\times s_2\left(\left\{\frac{N}{2b}\right\}, t\right) |t^{(1)} - t^{(2)}|^{-\{\frac{N}{2b}\}} |v_k(H_r) - v_k(P_2)| \right\}, \end{aligned}$$

де $(k, \mu^{(\nu)}(|k|)) = \sum_{i=1}^n (k_i \mu_i^{(\nu)}(|k|))$, $\nu \in \{1, 2\}$; $\delta(0) = 1$, $\delta(|k|) = 0$ для $|k| \neq 0$, $\mu_i^{(\nu)}(|k|) \geq 0$.

Нехай для задачі (1)–(3) виконуються умови:

а) коефіцієнти рівняння

$$A_k(t, x) \in C^\alpha(\mu(|k|), Q)$$

для $|k| \leq 2b - 1$,

$$A_k(t, x) \in C^\alpha(\beta, Q)$$

для $|k| = 2b$, $\alpha \in (0, 1)$;

$$B_l^{(j)}(t, x) \in C^{2b-r_j+\alpha_j}(Q)$$

для $|l| = r_j$,

$$B_l^{(j)}(t, x) \in C^{2b-r_j+\alpha_j}(\varepsilon^{(j)}(|l|), Q)$$

для $|l| \leq r_j - 1$, якщо $r_j \geq 1$, $\alpha_j \in (0, 1)$, $\partial D \in C^{2b+\alpha}$, і крайова задача

$$\left[D_t - \sum_{|k|=2b} s((k, \beta); P) A_k(P) D_x^k \right] u(P) \equiv g_0(P);$$

$$u(0, x) = \varphi(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow z \in \partial D} \sum_{|l|=r_j} s((l, \beta); P) B_l^{(j)}(P) D_x^l u(t, x) \equiv g_j(t, z)$$

параболічна [7];

б) функції $f_0(t, x) \in C^\alpha(\gamma, \beta; 2b; Q)$, $\varphi(x) \in C^{2b+\alpha}(\tilde{\gamma}, \tilde{\beta}; 0; D)$, $\tilde{\gamma} = (0, \gamma^{(2)})$, $\tilde{\beta}_i = (0, \beta_i^{(2)})$, $i \in \{1, \dots, n\}$, $f_j(t, x) \in C^{2b-r_j+\alpha_j}(\gamma, \beta; r_j; Q)$,

$$\gamma^{(\nu)} = \max \left(\max_i (1 + \beta_i^{(\nu)}), \max_{i, |k| < 2b} \frac{\mu_i^{(\nu)}(|k|) - (k, \beta^{(\nu)})}{2b - |k|}, \max_{\substack{i, j; |l| < r_j \\ r_j \geq 1}} \frac{\varepsilon_j^{(\nu)}(|l|) - (l, \beta)}{r_j - |l|} \right),$$

$\nu \in \{1, 2\}$;

в) для довільного $\varepsilon > 0$ задача (1), (2) з крайовою умовою

$$(L_j u)(t, x)|_{\Gamma_\varepsilon} = f_j(t, x)$$

параболічна в області

$$\bar{Q} = \{(t, x) \in Q, s_1(1, t) \geq \varepsilon > 0, s_2(1, x) \geq \varepsilon > 0\},$$

$$\Gamma_\varepsilon = \{(t, x) \in Q, s_1(1, x) = \varepsilon, s_2(1, t) \geq \varepsilon > 0\}.$$

Правильна така теорема.

Теорема 1. Нехай для задачі (1)–(3) виконані умови а), б), в). Тоді існує єдиний розв'язок задачі (1)–(3) в просторі $C^{2b+\alpha}(\gamma, \beta; 0; Q)$ і для нього правильна оцінка

$$|u; \gamma, \beta; 0; Q|_{2b+\alpha} \leq C \left(|f; \gamma, \beta; 2b; Q|_\alpha + |\varphi; \tilde{\gamma}, \tilde{\beta}; 0; D|_{2b+\alpha} + \sum_{j=1}^b |f_j; \gamma, \beta; r_j; Q|_{2b-r_j+\alpha_j} \right). \quad (4)$$

Стала C залежить від $n, \alpha, \alpha_j, \text{diam } Q$, норми коефіцієнтів операторів L, L_j .

Оцінки розв'язків крайових задач для рівнянь з гладкими коефіцієнтами.

Нехай $Q_m = \{(t, x) \in Q, s_1(1, t) \geq m_1^{-1}, s_2(1, x) \geq m_2^{-1}, m_1 > 1, m_2 > 1\}$ — зростаюча послідовність областей, яка при $m_\nu \rightarrow \infty, \nu \in \{1, 2\}$ збігається до Q , $D_m = \{x, x \in D, s_2(1, x) \geq m_2^{-1}\}$, $\Gamma_m = (0, T) \times \partial D_m$. Розглянемо загальну крайову задачу для параболічного рівняння

$$(L^{(1)} u_m)(t, x) \equiv \left[D_t - \sum_{|k| \leq 2b} a_k(t, x) D_x^k \right] u_m(t, x) = F(t, x), \quad (5)$$

$$u_m(0, x) = \Phi(x), \quad (6)$$

$$(L_j^{(1)} u_m)(t, x)|_\Gamma \equiv \lim_{x \rightarrow z} \left[\sum_{|l| \leq r_j} b_l^{(j)}(t, x) D_x^l \right] u_m(t, x) \equiv F_j(t, z). \quad (7)$$

Тут

$$a_k(t, x) = A_k^{(1)}(t, x), \quad F(t, x) = f_0^{(1)}(t, x),$$

$$\Phi(x) = \varphi(x), \quad F_j(t, x) = f_j^{(1)}(t, x), \quad b_l^{(j)}(t, x) = B_{l,1}^{(j)}(t, x),$$

якщо $(t, x) \in (0, T) \times D_m$. Для $(t, x) \in Q \setminus ((0, T) \times D_m)$, коефіцієнти $a_k(t, x), b_l^{(j)}(t, x)$; функції $F(t, x), F_j(t, x), \Phi(x)$ є розв'язками зовнішньої задачі Діріхле

$$D_t u = \Delta u, \quad u(0, x) = 0, \quad u|_{\Gamma_m} = g(t, x),$$

де, наприклад, для $a_k(t, x)$ $g(t, x) = A_k^{(1)}(t, x)|_{\Gamma_m}$; для $\Phi(x)$ $g(t, x) = \varphi(x)|_{\partial D_m}$. Коефіцієнти $A_k^{(1)}(t, x), B_{l,1}^{(j)}(t, x)$ в області $Q^{(1)} = \{(t, x) \in Q, s_1(1, t) \leq m_1^{-1}, x \in D_m\}$ визначаються таким чином. Якщо $|k| \leq 2b - 1$ або $(k, \beta^{(1)}) \geq 0$ при $|k| = 2b$, то для $t^{(0)} \in [0, m_1^{-1}]$, $x \in D_m$

$$A_k^{(1)}(t, x) = \min\{A_k(t, x), A_k(m_1^{-1}, x)\},$$

а для $t^{(0)} \geq m_1^{-1}$, $x \in D_m$

$$A_k^{(1)}(t, x) = \min \left\{ A_k(t, x), \frac{m_1(t^{(0)} - t) + 1}{2} A_k(t^{(0)} - m_1^{-1}, x) + \frac{m_1(t - t^{(0)}) + 1}{2} A_k(t^{(0)} + m_1^{-1}, x) \right\}.$$

У випадку $(k, \beta^{(1)}) < 0$ при $|k| = 2b$ для $t^{(0)} \in [0, m_1^{-1}]$, $x \in D_m$ беремо

$$A_k^{(1)}(t, x) = \max \{ A_k(t, x), A_k(m_1^{-1}, x) \},$$

а для $t^{(0)} \geq m_1^{-1}$, $x \in D_m$

$$A_k^{(1)}(t, x) = \max \left\{ A_k(t, x), \frac{m_1(t^{(0)} - t) + 1}{2} A_k(t^{(0)} - m_1^{-1}, x) + \frac{m_1(t - t^{(0)}) + 1}{2} A_k(t^{(0)} + m_1^{-1}, x) \right\}.$$

Якщо $|l| \leq r_j - 1$ або $(l, \beta^{(1)}) \geq 0$ при $|l| = r_j$, то для $t^{(0)} \in [0, m_1^{-1}]$, $x \in D_m$

$$B_{l,1}^{(j)}(t, x) = \min \{ B_l^{(j)}(t, x), B_l^{(j)}(m_1^{-1}, x) \},$$

а при $t^{(0)} \geq m_1^{-1}$, $x \in D_m$

$$B_{l,1}^{(j)}(t, x) = \min \left\{ B_l^{(j)}(t, x), \frac{m_1(t^{(0)} - t) + 1}{2} B_l^{(j)}(t^{(0)} - m_1^{-1}, x) + \frac{m_1(t - t^{(0)}) + 1}{2} B_l^{(j)}(t^{(0)} + m_1^{-1}, x) \right\}.$$

У випадку $(l, \beta^{(1)}) < 0$ при $|l| = r_j$ для $t^{(0)} \in [0, m_1^{-1}]$, $x \in D_m$ беремо

$$B_{l,1}^{(j)}(t, x) = \max (B_l^{(j)}(t, x), B_l^{(j)}(m_1^{-1}, x)),$$

а при $t^{(0)} \geq m_1^{-1}$, $x \in D_m$

$$B_{l,1}^{(j)}(t, x) = \max \left(B_l^{(j)}(t, x), \frac{m_1(t^{(0)} - t) + 1}{2} B_l^{(j)}(t^{(0)} - m_1^{-1}, x) + \frac{m_1(t - t^{(0)}) + 1}{2} B_l^{(j)}(t^{(0)} + m_1^{-1}, x) \right).$$

Визначимо також функції

$$f_j^{(1)}(t, x) = \min (f_j(t, x), f_j(m_1^{-1}, x))$$

для $t^{(0)} \in [0, m_1^{-1}]$, $x \in D_m$ і

$$f_j^{(1)}(t, x) = \min \left(f_j(t, x), \frac{m_1(t^{(0)} - t) + 1}{2} f_j(t^{(0)} - m_1^{-1}, x) + \frac{m_1(t - t^{(0)}) + 1}{2} f_j(t^{(0)} + m_1^{-1}, x) \right)$$

для $t^{(0)} \geq m_1^{-1}$, $x \in D_m$, $j \in \{0, 1, \dots, b\}$.

Введемо в просторі $C^{2b+\alpha}(Q)$ норму $|u_m; \gamma, \beta; q; Q|_{2b+\alpha}$, еквівалентну при кожному фіксованому m_1, m_2 до гельдерової норми, яка визначається як і $|u; \gamma, \beta; q; Q|_{2b+\alpha}$, тільки замість $s_1(q_1, t)$, $s_2(q_2, x)$ беремо $d_1(q_1, t)$, $d_2(q_2, x)$,

$$d_1(q_1, t) = \begin{cases} s_1(q_1, t), & \text{якщо } |t - t^{(0)}| \geq m_1^{-1}, \\ m_1^{-q_1}, & \text{якщо } |t - t^{(0)}| \leq m_1^{-1}; \end{cases}$$

$$d_2(q_2, x) = \begin{cases} s_2(q_2, x), & \text{якщо } |x - y| \geq m_2^{-1}, \\ m_2^{-q_2}, & \text{якщо } |x - y| \leq m_2^{-1}; \end{cases}$$

$$d((k, \gamma - \beta); P) = d_1((k, \gamma^{(1)} - \beta^{(1)}), t), \quad d_2((k, \gamma^{(2)} - \beta^{(2)}), x).$$

За накладених умов на гладкість коефіцієнтів операторів $L^{(1)}, L_j^{(1)}$ і даних задачі існує єдиний розв'язок задачі (5)–(7), який належить до простору $C^{2b+\alpha}(Q)$ і має при кожному фіксованому m_1, m_2 скінченну норму $|u_m; \gamma, \beta; 0; Q|_{2b+\alpha}$ ([2], теорема 7.1, с. 83). Знайдемо оцінку похідних розв'язку $u_m(x)$.

Теорема 2. *Якщо виконані умови теореми 1, то для розв'язку задачі (5)–(7) правильна оцінка*

$$|u_m; \gamma, \beta; 0; Q|_{2b+\alpha} \leq C(|F; \gamma, \beta; 2b; Q|_\alpha + |\Phi; \tilde{\gamma}, \tilde{\beta}; 0; D|_{2b+\alpha} + \sum_{j=1}^b |F_j; \gamma, \beta; r_j; Q|_{2b+r_j-\alpha_j} + |u_m|_Q). \quad (8)$$

Стала C не залежить від m_1, m_2 .

Доведення. Використовуючи означення норми і інтерполяційні нерівності ([7], стор. 176), маємо

$$|u_m; \gamma, \beta; 0; Q|_{2b+\alpha} \leq (1 + \varepsilon^\alpha)[u_m; \gamma, \beta; 0; Q]_{2b+\alpha} + c(\varepsilon)|u_m|_Q. \quad (9)$$

Тому досить оцінити півнорму $[u_m; \gamma, \beta; 0; Q]_{2b+\alpha}$. Із означення півнорми випливає існування в Q точок P_1, H_r, P_2 , для яких правильна одна з нерівностей:

$$\frac{1}{4}[u_m; \gamma, \beta; 0; Q]_{2b+\alpha} \leq E_1 \equiv \sum_{r=1}^n \sum_{2bj+|k|=2b} d((k, \gamma - \beta) + 2bj\gamma + \alpha(\gamma - \beta_r); \tilde{P}_1) |x_r^{(1)} - x_r^{(2)}|^{-\alpha} \times \\ \times |D_t^j D_x^k u_m(P_1) - D_t^j D_x^k u_m(H_r)|; \quad (10)$$

$$\frac{1}{4}[u_m; \gamma, \beta; 0; Q]_{2b+\alpha} \leq E_2 \equiv \sum_{r=1}^n \sum_{2bj+|k|=2b} d((k, \gamma - \beta) + (2bj + \alpha)\gamma; \tilde{P}_2) |t^{(1)} - t^{(2)}|^{-\frac{\alpha}{2b}} \times \\ \times |D_t^j D_x^k u_m(H_r) - D_t^j D_x^k u_m(P_2)|. \quad (11)$$

Якщо $|x_i^{(1)} - x_i^{(2)}| \geq n^{-1}\rho d(\gamma - \beta_i; \tilde{P}_1) \equiv T_1$, $\rho \in (0, 1)$, то використовуючи інтерполяційні нерівності, маємо

$$E_1 \leq 2\varepsilon^\alpha [u_m; \gamma, \beta; 0; Q]_{2b+\alpha} + c(\varepsilon)|u_m|_Q.$$

Вибираючи $\varepsilon = 16^{-1/\alpha}$ з нерівності (10), знаходимо

$$[u_m; \gamma, \beta; 0; Q]_{2b+\alpha} \leq c|u_m|_Q. \quad (12)$$

Використовуючи інтерполяційні нерівності і нерівність (11) у випадку $|t^{(1)} - t^{(2)}| \geq n^{-1}\rho^{2b}d(2b\gamma; \tilde{P}_2) \equiv T_2$, одержимо

$$[u_m; \gamma, \beta; 0; Q]_{2b+\alpha} \leq c|u_m|_Q. \quad (13)$$

Розглянемо випадок, коли $|x_i^{(1)} - x_i^{(2)}| \leq T_1$, або $|t^{(1)} - t^{(2)}| \leq T_2$. Нехай

$$\min(d(\gamma, \tilde{P}_1), d(\gamma, \tilde{P}_2)) = d(\gamma; P_1), |x_i^{(1)} - \xi_i| \leq 2T_1, \xi \in \partial D.$$

Позначимо через $K(r, P)$ кулю радіуса r , $r \geq 8T_1n$ з центром в деякій точці $P \in \Gamma$, яка містить точки P_1, H_i, P_2 . Використовуючи обмеження на гладкість поверхні ∂D , можна розпрямити $\partial D \cap K(r, P)$ за допомогою взаємно однозначного перетворення $x = \psi(y)$ ([8], стор. 126), в результаті якого область $\Pi = Q \cap K(r, P)$ переходить в Π_1 , для точок якої $t \geq 0, y_n \geq 0$. Якщо покласти $u_m(t, x) = v_m(t, y)$, $P_\nu \equiv B_\nu, \nu \in \{1, 2\}$, $E_\nu \equiv E^{(\nu)}, H_i = R_i, d(\gamma; P_1) \equiv h(\gamma, B_1)$ і коефіцієнти операторів задачі (5)–(7) при цьому перетворенні позначити $\lambda_k(t, y), a_i^{(j)}(t, y)$, то $v_m(t, y)$ в Π_1 буде розв'язком задачі

$$\begin{aligned} \left[D_t - \sum_{|k|=2b} \lambda_k(B_1) D_y^k \right] v_m(t, y) &= \sum_{|k|=2b} [\lambda_k(t, y) - \lambda_k(B_1)] D_y^k v_m(t, y) + \\ &+ \sum_{|k|<2b} \lambda_k(t, y) D_y^k v_m(t, y) + F(t, \psi(y)) \equiv F_0(t, y), \end{aligned} \quad (14)$$

$$v_m(0, y) = \Phi(\psi(y)) \equiv \Phi_1(y), \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \sum_{|l|=r_j} [a_l^{(j)}(B_1) D_y^l v_m(t, y)]|_{y_n=0} &= \left[\sum_{|l|=r_j} [a_l^{(j)}(B_1) - a_l^{(j)}(t, y)] D_y^l v_m(t, y) + \right. \\ &+ \left. \sum_{|l|<r_j} a_l^{(j)}(t, y) D_y^l v_m(t, y) + F_j(t, \psi(y)) \right]|_{y_n=0} \equiv g_m^{(j)}(t, y)|_{y_n=0}. \end{aligned} \quad (16)$$

В задачі (14)–(16) зробимо заміну $v_m(t, y) \equiv \omega_m(t, z)$, $z_i = h(\beta_i; B_1)y_i, i \in \{1, \dots, n\}$. Тоді $\omega_m(t, z)$ буде розв'язком задачі

$$(L^{(2)}\omega_m)(t, z) \equiv \left[D_t - \sum_{|k|=2b} h((k, \beta); B_1) \lambda_k(B_1) D_z^k \right] \omega_m(t, z) = F_0(t, Z),$$

$$\omega_m(0, z) = \Phi_1(Z),$$

$$(L_j^{(2)}\omega_m)(t, z) \equiv \sum_{|l|=r_j} [h((k, \beta); B_1)a_l^{(j)}(B_1)D_z^l\omega_m(t, z)|_{z_n=0} = g_m^{(j)}(t, Z)|_{z_n=0},$$

де $Z = (h^{-1}(\beta_1; B_1)z_1, h^{-1}(\beta_2; B_1)z_2, \dots, h^{-1}(\beta_n; B_1)z_n)$.

Позначимо через $z_i^{(1)} = h(\beta_i; B_1)y_i^{(1)}$, $N_\nu = \{(t, z), |t - t^{(1)}| \leq n^{-2b}\nu^{2b}\rho^{2b}h(2b\gamma; B_1), |z_i - z_i^{(1)}| \leq \nu\rho h(\gamma; B_1)n^{-1}, i \in \{1, \dots, n\}, z_n \geq 0, t \geq 0\}$ і візьмемо функцію $\mu(t, z) - (2b + 1)$ разів диференційовну, яка задовольняє нерівності

$$\mu(t, z) = \begin{cases} 1, & (t, z) \in N_{1/4}, \quad 0 \leq \mu(t, z) \leq 1; \\ 0, & (t, z) \notin N_{3/4}, \quad |D_t^l D_z^k \mu(t, z)| \leq C_{lk} h^{-1}((2bl + |k|)\gamma; B_1). \end{cases}$$

Тоді функція $W_m(t, z) = \mu(t, z)\omega_m(t, z)$ задовольняє крайову задачу

$$(L^{(2)}W_m)(t, z) = \sum_{|k|=2b} h((k, \beta); B_1)\lambda_k(B_1) \sum_{|p|<|k|} C_{|k|}^{|p|} D_z^{k-p} \mu D_z^p \omega_m +$$

$$+ \omega_m D_t \mu + F_0(t, Z)\mu(t, z) \equiv F^{(0)}(t, z),$$

$$W_m(0, z) = \Phi_1(Z)\mu(0, z) \equiv \Phi_2(z), \quad (17)$$

$$(L^{(2)}W_m)(t, z)|_{z_n=0} = \left[\sum_{|l|=r_j} h((k, \beta); B_1)a_l^{(j)}(B_1) \sum_{|p|<|l|} C_{|l|}^{|p|} D_z^{l-p} \mu D_z^p \omega_m + \right. \\ \left. + g_m^{(j)}(t, Z)\mu(t, z) \right]|_{z_n=0} \equiv G_m^{(j)}.$$

Коефіцієнти рівняння і крайових умов задачі (17), згідно з накладеними умовами, обмежені сталими, не залежними від точки B_1 . Тому використовуючи теорему 7.1. ([2], стор. 83) для довільних точок $M_1(\tau^{(1)}, \xi^{(1)})$ и $M_2(\tau^{(2)}, \xi^{(2)}) \in N_{1/4}$ правильна нерівність

$$d^{-\alpha}(M_1, M_2) |D_\tau^l D_z^k \omega_m(M_1) - D_\tau^l D_z^k \omega_m(M_2)| \leq \\ \leq C(|F_0|_{C^\alpha(N_{3/4})} + |\Phi_2|_{C^{2b+\alpha}(N_{3/4} \cap (t=0))} + \sum_{j=1}^b |G_m^{(j)}|_{C^{2b-r_j+\alpha_j}(N_{3/4} \cap (z_n=0))}), \quad (18)$$

$d(M_1, M_2)$ — параболічна відстань між M_1 і M_2 , $2bl + |k| = 2b$. Враховуючи властивості функції $\mu(t, z)$ і нерівність $h(\gamma, M) \geq \frac{1}{4}h(\gamma, B_1)$ для $M \in N_{3/4}$, маємо

$$|F^{(0)}|_{C^\alpha(N_{3/4})} \leq ch^{-1}((2b + \alpha)\gamma; B_1) \left(|F_0; \gamma, 0; 2b; N_{3/4}|_\alpha + \right. \\ \left. + |\omega_m; \gamma, 0; 0; N_{3/4}|_{2b} + |\omega_m|_{N_{3/4}} \right),$$

$$|\Phi_2|_{C^{2b+\alpha}(N_{3/4} \cap (t=0))} \leq ch^{-1}((2b + \alpha)\gamma; B_1) \left(|\Phi_1; \tilde{\gamma}, 0; 0; N_{3/4} \cap (t=0)|_{2b+\alpha}, \quad (19) \right.$$

$$\left. |G_m^{(j)}|_{C^{2b-r_j+\alpha_j}(N_{3/4} \cap (z_n=0))} \leq ch^{-1}((2b + \alpha)\gamma; B_1) \left(|g_m^{(j)}; \gamma, 0; r_j; N_{3/4}|_{2b-r_j+\alpha_j} + \right.$$

$$+|\omega_m; \gamma, 0; 0; N_{3/4}|_{2b} + |\omega_m|_{N_{3/4}}).$$

Із визначення простору $C^{2b+\alpha}(\gamma, 0; 0; Q)$ випливає справедливість нерівностей

$$c_1|\omega_m; \gamma, 0; 0; N_{3/4}|_l \leq |v_m; \gamma, \beta; 0; V_{3/4}|_l \leq c_2|\omega_m; \gamma, 0; 0; N_{3/4}|_l,$$

$$V_\nu = \{(t, x), |t - t^{(1)}| \leq \nu^{2b}T_2, t \geq 0, |y_i - y_i^{(1)}| \leq \nu T_1, i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Підставляючи (19) в (18) і повертаючись до змінних (t, y) , знаходимо

$$\begin{aligned} E^{(\nu)} \leq c & \left(|F_0; \gamma, \beta; 2b; V_{3/4}|_\alpha + |v_m; \gamma, \beta; 0; V_{3/4}|_{2b} + |v_m|_{V_{3/4}} + \right. \\ & \left. + |\Phi_1; \tilde{\gamma}, \tilde{\beta}; 0; V_{3/4} \cap (t = 0)|_{2b+\alpha} + \sum_{j=1}^b |g_m^{(j)}; \gamma, \beta; r_j; V_{3/4}|_{2b-r_j+\alpha_j} \right). \end{aligned} \quad (20)$$

Знайдемо оцінку норми $|g_m^{(j)}; \gamma, \beta; r_j; V_{3/4}|_{2b-r_j+\alpha_j}$. Враховуючи інтерполяційні нерівності, досить оцінити півнорму кожного доданка функції $g_m^{(j)}$. Наприклад, для $[a_i^{(j)}(t, y)D_y^l v_m; \gamma, \beta; r_j; V_{3/4}]_{2b-r_j+\alpha_j} \equiv E_3$ при $|l| < r_j$, маємо

$$E_3 \leq \sum_{i=1}^n \sup_{R_1, H_i \in V_{3/4}} \sum_{|k|=2b-r_j} \sum_{|p| < |k|} C_{|k|}^{|p|} \left([|y_i^{(1)} - y_i^{(2)}|^{-\alpha_j} |D_y^p a_i^{(j)}(R_1) - D_y^p a_i^{(j)}(H_i)| \times \right.$$

$$\times h(r_j\gamma + (p-l, \gamma - \beta); \tilde{R}_1) h(\alpha_j(\gamma - \beta_i); \tilde{y}) [h((k-p+l, \gamma - \beta); \tilde{R}_1) |D_y^{k-p+l} v_m(R_1)|] +$$

$$+ [|y_i^{(1)} - y_i^{(2)}|^{-\alpha_j} |D_y^{k-p+l} v_m(R_1) - D_y^{k-p+l} v_m(H_i)| h((k-p+l, \gamma - \beta); \tilde{R}_1) \times$$

$$\times h(\alpha_j(\gamma - \beta_i); \tilde{y}) [|D_y^p a_i^{(j)}(H_i)| h(r_j\gamma + (p-l, \gamma - \beta); \tilde{R}_1)]) +$$

$$+ \sum_{i=1}^n \sup_{H_i, R_2 \in V_{3/4}} \sum_{|k|=2b-r_j} \sum_{|p| < |k|} C_{|k|}^{|p|} \left([|\tau^{(1)} - \tau^{(2)}|^{-\frac{\alpha_j}{2b}} |D_y^p a_i^{(j)}(H_i) - D_y^p a_i^{(j)}(R_2)| \times \right.$$

$$\times h(r_j\gamma + (p-l, \gamma - \beta); \tilde{R}_2) h(\alpha_j\gamma; \tilde{\tau}) [h((k-p+l, \gamma - \beta); \tilde{R}_2) |D_y^{k-p+l} v_m(H_i)|] +$$

$$+ [|\tau^{(1)} - \tau^{(2)}|^{-\frac{\alpha_j}{2b}} |D_y^{k-p+l} v_m(R_2) - D_y^{k-p+l} v_m(H_i)| h((k-p+l, \gamma - \beta); \tilde{R}_2) \times$$

$$\times h(\alpha_j\gamma; \tilde{\tau}) [|D_y^p a_i^{(j)}(P_2)| h(r_j\gamma + (p-l, \gamma - \beta); \tilde{R}_2)]) +$$

$$+ \sum_{i=1}^n \sup_{H_i, R_2 \in V_{3/4}} \left([|\tau^{(1)} - \tau^{(2)}|^{-\frac{2b-r_j+\alpha_j}{2b}} |D_y^l v_m(R_2) - D_y^l v_m(H_i)| \times \right.$$

$$\begin{aligned}
& \times h((l, \gamma - \beta) + (2b - r_j + \alpha_j)\gamma; \tilde{R}_2) [h(r_j\gamma - (l, \gamma - \beta)) |a_l^{(j)}(R_2)|] + \\
& + [|\tau^{(1)} - \tau^{(2)}|^{-\frac{2b-r_j+\alpha_j}{2b}} |a_l^{(j)}(R_2) - a_l^{(j)}(H_i)| h((2b + \alpha_j)\gamma - (l, \gamma - \beta); \tilde{R}_2)] \times \\
& \times [h((l, \gamma - \beta); \tilde{R}_2) |D_y^l v_m(R_2)|] \leq c \left([v_m; \gamma, \beta; 0; V_{3/4}]_{2b-r_j+|l|+\alpha_j} + |v_m|_{V_{3/4}} \right).
\end{aligned}$$

Подібно отримуємо оцінки інших доданків функції $g_m^{(j)}(t, y)$. Отже,

$$\begin{aligned}
|g_m^{(j)}; \gamma, \beta; r_j; V_{3/4}|_{2b-r_j+\alpha} & \leq c_2 \varepsilon_1 [v_m; \gamma, \beta; 0; V_{3/4}]_{2b+\alpha} + \\
& + c \left(|v_m|_{V_{3/4}} + [F_j; \gamma, \beta; r_j; V_{3/4}]_{2b-r_j+\alpha_j} \right), \tag{21}
\end{aligned}$$

де $\varepsilon_1 = n\rho^{\alpha_j} + n^2\varepsilon^\alpha$.

Для знаходження норми $|F_0; \gamma, \beta; 2b; V_{3/4}|_\alpha$ досить оцінити півнорму кожного доданка функції $F_0(t, y)$. Наприклад, для $[\lambda_k D_x^k v_m; \gamma, \beta; 2b; V_{3/4}]_\alpha \equiv E_4$ при $|k| < 2b$, маємо

$$\begin{aligned}
E_4 & \leq \sum_{i=1}^n \sup_{R_1, H_i \in V_{3/4}} \left\{ [h((k, \gamma - \beta) + \alpha(\gamma - \beta_i); \tilde{R}_1) |y_i^{(1)} - y_i^{(2)}|^{-\alpha} |D_y^k v_m(R_1) - \right. \\
& \left. - D_y^k v_m(H_i)|] [|\lambda_k(R_1)| h(2b\gamma - (k, \gamma - \beta); \tilde{R}_1)] + [|\lambda_k(R_1) - \lambda_k(H_i)| \times \right. \\
& \left. \times |y_i^{(1)} - y_i^{(2)}|^{-\alpha} h(2b\gamma - (k, \gamma - \beta) + \alpha(\gamma - \beta_i); \tilde{R}_1)] [h((k, \gamma - \beta); \tilde{R}_1) |D_y^k v_m(R_1)|] \right\} + \\
& + \sum_{i=1}^n \sup_{H_i, R_2 \in V_{3/4}} \left\{ [h((k, \gamma - \beta) + \alpha\gamma; \tilde{R}_2) |\tau^{(1)} - \tau^{(2)}|^{-\frac{\alpha}{2b}} |D_y^k v_m(R_2) - D_y^k v_m(H_i)|] \times \right. \\
& \left. \times [|\lambda_k(H_i)| h(2b\gamma - (k, \gamma - \beta); \tilde{R}_2)] + [|\lambda_k(R_1) - \lambda_k(H_i)| |\tau^{(1)} - \tau^{(2)}|^{-\frac{\alpha}{2b}} \times \right. \\
& \left. \times h(2b\gamma - (k, \gamma - \beta) + \alpha\gamma; \tilde{R}_2)] [h((k, \gamma - \beta); \tilde{R}_2) |D_y^k v_m(R_2)|] \right\} \leq \\
& \leq c \left([v_m; \gamma, \beta; 0; V_{3/4}]_{|k|+\alpha} + |v_m|_{V_{3/4}} \right).
\end{aligned}$$

Зазначимо, що подібно одержуємо оцінки інших доданків функції $F_0(t, y)$. Отже,

$$\begin{aligned}
|F_0; \gamma, \beta; 2b; V_{3/4}|_\alpha & \leq \\
& \leq c_3 \varepsilon_2 [v_m; \gamma, \beta; 0; V_{3/4}]_{2b+\alpha} + c \left(|v_m|_{V_{3/4}} + |F; \gamma, \beta; 2b; V_{3/4}|_\alpha \right), \tag{22}
\end{aligned}$$

де $\varepsilon_2 = n^{2b} \rho^{2b} + \varepsilon^\alpha$, $\varepsilon \in (0, 1)$, $\rho \in (0, 1)$, ρ, ε — довільні числа.

Підставляючи (21) і (22) в (20), знаходимо

$$E^{(\nu)} \leq \varepsilon_3 [v_m; \gamma, \beta; 0; V_{3/4}]_{2b+\alpha} + c \left(|v_m|_{V_{3/4}} + |F; \gamma, \beta; 2b; V_{3/4}|_\alpha + \right. \\ \left. + |\Phi; \tilde{\gamma}, \tilde{\beta}; 0; V_{3/4} \cap (t=0)|_{2b+\alpha} + \sum_{j=1}^b |F_j; \gamma, \beta; r_j; V_{3/4}|_{2b-r_j+\alpha_j} \right),$$

де $\varepsilon_3 = c_3 \left(n^{2\beta} \rho^{2\beta} + \varepsilon^\alpha + \sum_{j=1}^b c_2 (\rho^{\alpha_j} + n \varepsilon^\alpha) n \right)$, $\nu \in \{1, 2\}$.

Отже, використовуючи нерівності (10), (11) і вибираючи ρ і ε досить малими, отримуємо

$$|u_m; \gamma, \beta; 0; Q|_{2b+\alpha} \leq c \left(|F; \gamma, \beta; 2b; Q|_\alpha + \right. \\ \left. + |\Phi; \tilde{\gamma}, \tilde{\beta}; 0; D|_{2b+\alpha} + \sum_{j=1}^b |F_j; \gamma, \beta; r_j; Q|_{2b-r_j+\alpha_j} + |u_m|_Q \right). \quad (23)$$

Розглянемо випадок $|x_i^{(1)} - x_i^{(2)}| \leq T_1$, $|x_i^{(1)} - \xi_i| \geq 2T_1$, $\xi \in \partial D$. Нехай $d(\gamma, P_1) = \min(d(\gamma, \tilde{P}_1), d(\gamma, \tilde{P}_2))$. Запишемо задачу (5), (6) у вигляді

$$D_t u_m - \sum_{|k|=2b} a_k(P_1) D_x^k u_m = \sum_{|k|=2b} [a_k(P) - a_k(P_1)] D_x^k u_m + \\ + \sum_{|k| \leq 2b-1} a_k(P) D_x^k u_m + F(t, x) \equiv F_1(t, x), \quad (24)$$

$$u_m(0, x) = \Phi(x).$$

Нехай $V_1 \in Q$, $V_\nu = \{(t, x), |t - t^{(1)}| \leq \nu^{2b} T_2, t \geq 0, |x_i - x_i^{(1)}| \leq \nu T_1, i \in \{1, \dots, n\}\}$. В задачі (24) після заміни $u_m(t, x) = v_m(t, y)$, $y_i = d_1(\beta_i^{(1)}, t^{(1)}) d_2(\beta_i^{(2)}, x^{(1)}) x_i \equiv d(\beta_i; P_1) x_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$ одержимо

$$(L^{(3)} v_m)(t, y) \equiv \left[D_t - \sum_{|k|=2b} d((k, \beta); P_1) a_k(P_1) D_y^k \right] v_m(t, y) = \\ = F^{(1)}(t, d^{-1}(\beta; P_1) y) \equiv F^{(2)}(t, Y),$$

$$v_m(0, y) = \Phi(Y),$$

де $Y = (d^{-1}(\beta_1; P_1) y_1, \dots, d^{-1}(\beta_n; P_1) y_n)$.

Позначимо через $y_i^{(1)} = d(\beta_i; P_1) x_i^{(1)}$, $P_1(t^{(1)}, x^{(1)}) \equiv R_1(t^{(1)}, y^{(1)})$, $N_\nu = \{(t, y), |t - t^{(1)}| \leq \nu^{2b} T_2, t \geq 0, |y_i - y_i^{(1)}| \leq \nu \rho d(\gamma; P_1), i \in \{1, \dots, n\}\}$ і візьмемо $2b + 1$ разів диференційовану функцію $\eta(t, y)$, яка задовольняє умови:

$$\eta(t, y) = \begin{cases} 1, & (t, y) \in N_{1/4}, \quad 0 \leq \eta(t, y) \leq 1; \\ 0, & (t, y) \in N_{3/4}, \quad |D_i^l D_y^k \eta(t, y)| \leq c_{lk} d^{-1}((2bl + |k|)\gamma; P_1). \end{cases}$$

Тоді функція $\xi_m(t, y) = v_m(t, y)\eta(t, y)$ задовольняє задачу Коші

$$\begin{aligned} (L^{(3)}\xi_m)(t, y) &= \sum_{|k|=2b} d((k, \beta); P_1) a_k(P_1) \sum_{|p| < |k|} C_{|k|}^{|p|} D_y^{k-p} \eta D_y^p v_m + \\ &+ v_m D_t \eta + F^{(2)}(t, Y) \eta(t, y) \equiv F^{(3)}(t, y), \\ \xi_m(0, y) &= \Phi(Y) \eta(0, y) \equiv \varphi_1(y). \end{aligned} \quad (25)$$

Оскільки коефіцієнти рівняння (25), згідно з умовою а), обмежені сталими, не залежними від точки P_1 , то, використовуючи теорему 4.1 ([2], стор. 41), для довільних точок $M_1(\tau^{(1)}, z^{(1)})$ і $M_2(\tau^{(2)}, z^{(2)}) \in N_{1/4}$ отримаємо, що правильна нерівність

$$d^{-\alpha}(M_1, M_2) |D_t^l D_x^k v_m(M_1) - D_t^l D_x^k v_m(M_2)| \leq c(|F_3|_{C^\alpha(N_{3/4})} + |\varphi_1|_{C^{2b+\alpha}(N_{3/4} \cap \{t=0\})}),$$

$d(M_1, M_2)$ — параболічна відстань між M_1 і M_2 , $2bl + |k| = 2b$. Проводячи міркування, подібні до доведення нерівності (23), знаходимо

$$|u_m; \gamma, \beta; 0; Q|_{2b+\alpha} \leq c \left(|F; \gamma, \beta; 2b; Q|_\alpha + |\Phi; \tilde{\gamma}, \tilde{\beta}; 0; D|_{2b+\alpha} + |u_m|_Q \right). \quad (26)$$

Об'єднавши нерівності (12), (13), (23) і (26) отримаємо оцінку (8). \square

Теорема 3. Нехай $u_m(t, x)$ — єдиний класичний розв'язок задачі (5)–(7) і виконані умови а)–в). Тоді для $u_m(t, x)$ правильна нерівність

$$|u_m|_Q \leq C \left(|L^1 u_m; \gamma, \beta; 2b; Q|_\alpha + |u_m; \tilde{\gamma}, \tilde{\beta}; 0; D|_{2b+\alpha} + \sum_{j=1}^b |L_j^{(1)} u_m; \gamma, \beta; r_j; Q|_{2b-r_j+\alpha_j} \right). \quad (27)$$

Стала C не залежить від m_1, m_2 .

Доведення. Використаємо методику доведення зауваження 2 ([9], стор. 79). Нехай нерівність (27) не виконується. Тоді існує послідовність $V_n \in C^{2b+\alpha}(Q)$ таких, що $|V_n|_Q = 1$ і $V_n(0, x)$, $L^{(1)} V_n$, $L_j^{(1)} V_n$ прямують до нуля для відповідних V_n , коли $n \rightarrow \infty$. Із (8) випливає, що норми $|V_n; \gamma, \beta; 0; Q|_{2b+\alpha}$ рівномірно обмежені. Тому існує підпослідовність $V_{n(i)}$, яка при $n(i) \rightarrow \infty$ збігається до розв'язку $V \in C^{2b+\alpha}(Q)$ однорідної крайової задачі. Оскільки розв'язок крайової задачі єдиний, при кожному фіксованому m_1, m_2 , то $V \equiv 0$, що суперечить рівності $|V|_Q = 1$. \square

Доведення теореми 1. Зазначимо, що

$$\begin{aligned} |F; \gamma, \beta; 2b; Q|_\alpha &\leq c |f_0; \gamma, \beta; 2b; Q|_\alpha; \\ |F_j; \gamma, \beta; r_j; Q|_{2b-r_j+\alpha_j} &\leq c |f_j; \gamma, \beta; r_j; Q|_{2b-r_j+\alpha_j}. \end{aligned}$$

Тому з нерівностей (8) і (27) маємо

$$\begin{aligned} |u_m; \gamma, \beta; 0; Q|_{2b+\alpha} &\leq c \left(|f_0; \gamma, \beta; 2b; Q|_\alpha + |\varphi; \tilde{\gamma}, \tilde{\beta}; 0; D|_{2b+\alpha} + \right. \\ &\left. + \sum_{j=1}^b |f_j; \gamma, \beta; r_j; Q|_{2b-r_j+\alpha_j} \right). \end{aligned} \quad (28)$$

Отже, права частина нерівності (28) не залежить від m_1, m_2 , а послідовності

$$W_{kl}^{(m)} = \{d(2bl\gamma + (k, \gamma - \beta); P) | D_t^l D_x^k u_m(P) |, \quad 2bl + |k| \leq 2b\}$$

рівномірно обмежені, та одностайно неперервні в \bar{Q} . За теоремою Арцела, існують послідовності $\{W_{kl}^{(m(i))}\}$ рівномірно збіжні при $m(i) \rightarrow \infty$ до W_{kl} . Переходячи до границі при $m(i) \rightarrow \infty$ в задачі (5)–(7), одержимо, що $u(t, x) = W_{00}$ єдиний розв'язок задачі (1)–(3), $u \in C^{2b+\alpha}(\gamma, \beta; 0; Q)$ і правильна оцінка (4). \square

Теорема 4. Якщо виконані умови а)–в), $f_0(t, x) \in C^\alpha(\gamma, \beta; 0; Q)$, $f_j(t, x) \in C^{2b-r_j+\alpha_j}(\gamma, \beta; 0; Q)$, то єдиний розв'язок задачі (1)–(3) в просторі $C^{2b+\alpha}(\gamma, \beta; 0; Q)$ визначається інтегралами Стілтєса з борелевою мірою

$$u(t, x) = \int_Q \Gamma(t, x; d\tau, d\xi) f_0(\tau, \xi) + \int_D \Gamma(t, x; d\xi) \varphi(\xi) + \sum_{j=1}^b \int_\Gamma \Gamma_j(t, x; d\tau, d_\xi S) f_j(\tau, \xi). \quad (29)$$

Доведення. Оскільки

$$C^\alpha(\gamma, \beta; 0; Q) \subset C^\alpha(\gamma, \beta; 2b; Q), \quad C^{2b-r_j+\alpha_j}(\gamma, \beta; 0; Q) \subset C^{2b-r_j+\alpha_j}(\gamma, \beta; r_j; Q),$$

то для $f_j(t, x) \in C^{2b-r_j+\alpha_j}(\gamma, \beta; 0; Q)$ і $f_0(t, x) \in C^\alpha(\gamma, \beta; 0; Q)$ виконуються нерівності

$$|f_0; \gamma, \beta; 2b; Q|_\alpha \leq c |f_0; \gamma, \beta; 0; Q|_\alpha, \quad |f_j; \gamma, \beta; r_j; Q|_{2b-r_j+\alpha_j} \leq c |f_j; \gamma, \beta; 0; Q|_{2b-r_j+\alpha_j}.$$

Тому, враховуючи теорему 1, для розв'язку задачі (1)–(3) справедлива оцінка

$$|u; \gamma, \beta; 0; Q|_{2b+\alpha} \leq C (|f_0; \gamma, \beta; 0; Q|_\alpha + |\varphi; \tilde{\gamma}, \tilde{\beta}; 0; D|_{2b+\alpha} + \sum_{j=1}^b |f_j; \gamma, \beta; 0; Q|_{2b-r_j+\alpha_j}). \quad (30)$$

Розглядатимемо $u(t, x)$ при фіксованих (t, x) , як лінійний неперервний функціонал $\mathcal{F}(f_0, \varphi, f_j, \dots, f_b)$ на нормованому просторі

$$C_\alpha = C^\alpha(\gamma, \beta; 0; Q) \times C^{2b-r_j+\alpha_j}(\gamma, \beta; 0; Q) \times \dots \times C^{2b-r_b+\alpha_b}(\gamma, \beta; 0; Q) \times C^{2b+\alpha}(\tilde{\gamma}, \tilde{\beta}; 0; D)$$

з нормою, що дорівнює правій частині нерівності (30). Беручи до уваги включення $C_\alpha \subset C$, на підставі теореми Рісса можна вважати, що $u(t, x)$ породжує борелеву міру $\Gamma(t, x; Z)$, яка визначена на σ -алгебрі підмножин Z області \bar{Q} , включаючи Q і всі її відкриті підмножини такі, що значення функціоналу визначається формулою (29). \square

ЛІТЕРАТУРА

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. – М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1963. – 702 с.
2. Матійчук М.І. Параболічні сингулярні крайові задачі. – Київ: Інститут математики НАН України, 1999 – 176 с.
3. Ройтберг Я.А. Эллиптические граничные задачи в обобщенных функциях. – I – IV. Препринты. – Чернигов: Педагогический институт, 1990 – 1991.

4. Пукальский И.Д. *О функции Грина нелокальной краевой задачи с вырождениями* // Дифф. уравнения. – 1998. – Т. 34, №6. – С. 838–840.
5. Пукальский И.Д. *Задача с косой производной для неравномерно параболического уравнения* // Дифф. уравнения. – 2001. – Т. 37, №12. – С. 1637–1645.
6. Пукальський І.Д. *Одностороння нелокальна крайова задача для сингулярних параболических рівнянь* // Укр. матем. журн. – 2001. – Т. 53, №11. – С. 1521–1531.
7. Эйдельман С.Д. *Параболические системы*. – М: Наука, 1964. – 445 с.
8. Камынин Л. И., Масленникова В.Н. *Граничные оценки шаудеровского типа решения задачи с косой производной для параболического уравнения в нецилиндрической области* // Сиб. матем. журн. – 1966. – Т. 7, №1. – С. 83–128.
9. С.Агмон, А.Дуглис, Л.Ниренберг. *Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы*. – М.: Иностран. л-ра, 1962. – 208 с.

Чернівецький національний університет ім. Ю.Федьковича
кафедра диференціальних рівнянь
arpl@chnu.cv.ua

Надійшло 07.07.2003