УДК 517.574

Ю. С. Процик

МАЖОРАНТИ ЗРОСТАННЯ І КАНОНІЧНЕ ЗОБРАЖЕННЯ δ-СУБГАРМОНІЙНИХ ФУНКЦІЙ

Yu. S. Protsyk. *Growth majorants and canonical representation of δ-subharmonic functions*, Matematychni Studii, **20** (2003) 40–52.

The problem on canonical representation of δ-subharmonic in $\mathbb{R}^m$ $(m \geq 2)$ functions of finite λ-type is solved. It is proved that this problem reduces to the study of growth majorant properties of subharmonic functions with restriction on their Riesz measures.

Ю. С. Процык. *Мажоранты роста и каноническое представление δ-субгармонических функций* // Математичні Студії. – 2003. – Т.20, №1. – С.40–52.

Решена задача о каноническом представлении δ-субгармонической в $\mathbb{R}^m$ $(m \geq 2)$ функции конечного λ-типа. Доказано, что эта задача сводится к изучению свойств мажорант роста субгармонических функций с ограничениями на их меры Рисса.

Вступ. Формулювання основних результатів. Нехай w — δ-субгармонійна в $\mathbb{R}^m$ $(m \geq 2)$ функція, гармонійна в деякому околі нуля і $w(0) = 0$. Через μ_w позначатимемо міру Ріса функції w, а через μ_w^+ і μ_w^- відповідно її додатну і від'ємну варіації. Пара субгармонійних в $\mathbb{R}^m$ функцій (u, v) визначає канонічне зображення w, якщо $w = u - v$ і $\mu_u = \mu_w^+$, $\mu_v = \mu_w^-$; різниця $u - v$ визначена на множині точок $\mathbb{R}^m$, де u і v не дорівнюють одночасно $-\infty$.

Нехай $w = u - v$ — канонічне зображення w, $u(0) = v(0) = 0$. Характеристикою Неванлінни функції w називається функція [1]

$$T(r, w) = \frac{1}{|\mathbf{S}^{m-1}|} \int\limits_{\mathbf{S}^{m-1}} \max\{u(rx), v(rx)\}\, d\mathbf{S}(x), \qquad 0 \leq r < +\infty,$$

де $d\mathbf{S}(x)$ — елемент площі сфери $\mathbf{S}^{m-1} = \{x \in \mathbb{R}^m : |x| = 1\}$, $|\mathbf{S}^{m-1}| = 2\pi^{m/2}/\Gamma(m/2)$.

Додатні, зростаючі до $+\infty$, неперервні на $[0, +\infty)$ функції називатимемо *функціями зростання*. Нехай λ — функція зростання, $\lambda(0) = 0$. δ-субгармонійна в $\mathbb{R}^m$ функція w, $0 \notin \operatorname{supp} \mu_w$, $w(0) = 0$, називається *функцією скінченного λ-типу*, якщо нерівність $T(r, w) \leq a\lambda(br)$ виконується для деяких додатних сталих a, b і всіх $r > 0$. Клас таких функцій позначатимемо через Λ_δ^m, а через Λ_S^m позначатимемо відповідно підклас субгармонійних функцій з Λ_δ^m. Класи Λ_S^m та Λ_δ^m введені А. Кондратюком в роботі [2], де для їх вивчення вперше розроблено метод сферичних гармонік (метод рядів

2000 *Mathematics Subject Classification:* 31A05.

Фур'є-Лапласа), близький до методу рядів Фур'є для цілих і мероморфних в $\mathbb{C}$ функцій, запропонованого Л. Рубелом і Б. Тейлором [3].

Класична проблема факторизації мероморфних в $\mathbb{C}$ функцій f полягає (див. огляд [4]) у зображенні $f = g/h$ часткою цілих функцій g і h, зростання логарифмів модулів яких не перевищує у певному сенсі зростання неванліннової характеристики $T(r, f)$. Вичерпний огляд найвагоміших досягнень у цьому напрямку та сучасний стан проблеми подано в огляді [4]. Ми відмітимо лише наступні результати.

Через Λ позначатимемо підклас мероморфних в $\mathbb{C}$ функцій f таких, що $w = \log|f| \in \Lambda^2_\delta$, а через Λ_E — відповідно підклас цілих функцій з Λ. Найбільш загальна теорема про зображення мероморфних функцій з Λ часткою цілих функцій з Λ_E належить Д. Майлзу [6] (див. також [7,8]).

Теорема A (Майлз-Рубел-Тейлор, [7, с. 78], [8, с. 31]). *Довільну мероморфну функцію $f \in \Lambda$ можна зобразити часткою $f = g/h$ цілих функцій g і h з Λ_E.*

Ряд узагальнень та уточнень цього результату отримав Б. Хабібуллін [9–15]. Зокрема, встановлена така теорема.

Теорема B (Хабібуллін, [15]). *Нехай неперервна строго додатна на $[0, +\infty)$ функція $\varepsilon(r)$ — спадна і диференційовна на промені $(c, +\infty)$ при деякому $c \geq 0$, а для її похідної $\varepsilon'(r)$ виконується умова $\liminf_{r\to+\infty} r\varepsilon'(r) > -\infty$. Для кожної мероморфної в $\mathbb{C}$ функції f існує зображення f часткою $f = g/h$ цілих функцій g і h таких, що*

$$\log^+ \max\{M(r, g), M(r, h)\} = O\left(\frac{1}{\varepsilon(r)} T\left((1 + \varepsilon(r))r, f\right)\right), \qquad r \to +\infty,$$

де $M(r, g)$ та $M(r, h)$ — максимуми модулів g та h у крузі $\{|z| \leq r\}$.

Аналоги теореми A для δ-субгармонійних в $\mathbb{R}^m$ функцій встановили Я. Васильків [16] (випадок $m = 2$) та О. Веселовська [17] (випадок $m \geq 3$). А саме, справедлива наступна теорема.

Теорема C (Васильків-Веселовська, [16,17]). *Для довільної функції $w \in \Lambda^m_\delta$ існують $u, v \in \Lambda^m_S$ такі, що $w = u - v$.*

В теоремі A (а також й в теоремі B) послідовність нулів $\mathcal{Z}(f)$ мероморфної функції f може бути підпослідовністю нулів $\mathcal{Z}(g)$ цілої функції g у зображенні $f = g/h$. В 1972 р. А. Гольдберг [18] дослідив можливість зображення довільної мероморфної в $\mathbb{C}$ функції часткою цілих без спільних нулів (тобто $\mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}(g)$). Зокрема, справедлива така теорема.

Теорема D (Гольдберг, [18]). *Кожну мероморфну в $\mathbb{C}$ функцію можна зобразити часткою $f = g/h$ цілих без спільних нулів функцій g і h таких, що*

$$\log T(r, h) + \log T(r, g) = o\left(T(r, f)\right)$$

при $r \to +\infty$ зовні множини скінченної логарифмічної міри.

При цьому, в роботах [18,19] показано, що цей результат у певному розумінні є найкращим з можливих.

Добре відомо (див., наприклад, [3,6,9–15,20–25]), що проблема "оптимального" зображення мероморфної функції часткою цілих споріднена з проблемою існування цілої функції "мінімального" у певному сенсі зростання із заданими нульовими множинами

$\mathcal{Z} \subset \mathbb{C}^n$, $n \geq 1$. Недавно в роботі [5] введено поняття, так званої, мінімальної мажоранти зростання (див. означення 4 з [5]) для класів цілих функцій із заданими послідовностями їх нулів і встановлено зв'язок існування мінімальної мажоранти зростання з розв'язністю узагальненої проблеми про зображення довільної мероморфної функції часткою цілих без спільних нулів. Однак умови, за яких вихідна функція зростання λ є мінімальною мажорантою, в статті [5] не з'ясовано.

Метою цієї роботи є поширення (подібно до теореми C) основного результату роботи [5] на класи Λ_δ^m, включно з описом умов мінімальності мажорант зростання для певних класів субгармонійних функцій. Якщо w — δ-субгармонійна функція, то роль множин нулів і полюсів відіграють носії додатної (μ_w^+) і від'ємної (μ_w^-) варіацій μ_w — міри Ріса w. Носії мір μ_w^+ і μ_w^-, взагалі кажучи, перетинаються. Натомість аналогом зображення мероморфної функції часткою цілих без спільних нулів є канонічне зображення δ-субгармонійної функції у вигляді різниці субгармонійних. Для точних формулювань основного результату з [5] та результатів цієї статті наведемо означення 1–3 (аналоги означень 2–4 з [5]).

Через $\mathcal{M}_\lambda^m$ позначатимемо множину невід'ємних борелевих в $\mathbb{R}^m$ мір μ таких, що $0 \notin \operatorname{supp} \mu$ і $N(r;\mu) \leq a\lambda(br)$ для деяких $a, b > 0$ і всіх $r > 0$, де

$$N(r;\mu) = \begin{cases} (m-2)\int\limits_0^r n(t;\mu)t^{1-m}dt, & m \geq 3; \\ \int\limits_0^r n(t;\mu)t^{-1}dt, & m = 2; \end{cases} \qquad n(r;\mu) = \mu\left(\{y : |y| \leq t\}\right).$$

Множину субгармонійних в $\mathbb{R}^m$ функцій u, $0 \notin \operatorname{supp} \mu_u$, $u(0) = 0$ таких, що $\mu_u \in \mathcal{M}_\lambda^m$ позначатимемо через S_λ^m.

Означення 1. Клас Λ_δ^m *допускає канонічне зображення*, якщо кожну функцію w з Λ_δ^m можна зобразити різницею $w = u - v$ субгармонійних функцій u, v з Λ_S^m таких, що $\mu_u = \mu_w^+$, $\mu_v = \mu_w^-$.

Означення 2. Функція зростання $\widetilde{\lambda}$ називається *мажорантою зростання для* S_λ^m, якщо для довільної міри μ з $\mathcal{M}_\lambda^m$ існує субгармонійна функція u скінченного $\widetilde{\lambda}$-типу така, що $\mu_u = \mu$.

Означення 3. Функція зростання $\widehat{\lambda}$ називається *мінімальною мажорантою зростання для* S_λ^m, якщо

1) $\widehat{\lambda}$ — мажоранта зростання для S_λ^m;

2) для довільної мажоранти зростання $\widetilde{\lambda}$ для S_λ^m, існують сталі $a, b > 0$ такі, що $\widehat{\lambda}(r) \leq a\widetilde{\lambda}(br)$ для всіх $r > 0$.

Нехай $\mathcal{E}_\lambda$ — підклас цілих функцій таких, що $u = \log|f| \in S_\lambda^2$. Основний результат роботи [5] сформульовано в такій теоремі.

Теорема E (Кондратюк-Васильків, [5]). *Нехай функція зростання λ опукла відносно $\log r$. Для того, щоб довільну мероморфну функцію $f \in \Lambda$ можна було зобразити часткою $f = g/h$ цілих без спільних нулів функцій $g, h \in \Lambda$, необхідно і досить щоб функція λ була мінімальною мажорантою зростання для класу $\mathcal{E}_\lambda$.*

Наступна теорема є узагальненням результату Тейлора (див. [26], [3, теорема 5.3]), який відігравав ключову роль в доведенні теореми E.

Теорема F (Васильків-Веселовська, [16,17]). *Для того, щоб невід'ємна борелівська в* $\mathbb{R}^m$ *міра* μ, $0 \notin \operatorname{supp}\mu$, *була додатною варіацією міри Ріса* μ_w *деякої* δ*-субгармонійної в* $\mathbb{R}^m$ *функції* w *скінченного* λ*-типу, необхідно і досить, щоб* $\mu \in \mathcal{M}_\lambda^m$.

Основним результатом цієї статті є така теорема.

Теорема. *Нехай функція зростання* $\lambda(r)$ *така, що функція* $r^{m-1}\lambda'(r)$ $(m \geq 2)$ *неспадна на* $\mathbb{R}_+$, *де* $\lambda'(r)$ *означає правосторонню похідну. Справедливі такі твердження:*

i) Λ_δ^m *допускає канонічне зображення тоді і лише тоді, коли* λ *є мінімальною мажорантою зростання для* S_λ^m;

ii) λ *є мінімальною мажорантою зростання для* S_λ^m *тоді і лише тоді, коли при деяких* a, b, l, *довільних* r_1, r_2 $(0 < r_1 < r_2)$ *і всіх* $k \in \mathbb{N}$ *справедливо*

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{\lambda(t)}{t^{k+1}}dt \leq ak^l \left(\frac{\lambda(br_1)}{r_1^k} + \frac{\lambda(br_2)}{r_2^k}\right). \tag{1}$$

Зауваження. Умова (1) “збалансованості” функції зростання λ вперше (без множника k^l) накладалася у твердженні 7.3 роботи Р. Куяли [27]. За її виконання для мероморфних в $\mathbb{C}^n$ $(n > 1)$ функцій скінченного λ-типу при таких функціях зростання λ справедливий багатовимірний варіант теореми A.

Наведемо загальний приклад функції зростання λ, для якої умова (1) не виконується для зліченної кількості натуральних k.

Приклад. Для функції зростання $\lambda(r)$ такої, що функція $r^{m-1}\lambda'(r)$ $(m \geq 2)$ — неспадна і

$$\text{а)}\quad \liminf_{r\to+\infty} \frac{\log\,\lambda(r)}{\log\,r} = \beta < +\infty, \qquad \text{б)}\quad \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log\,\lambda(r)}{\log\,r} = +\infty,$$

умова (1) не виконується для всіх $k \geq [\beta] + 1$, де $[\beta]$ — ціла частина числа β.

Відзначимо також, що у випадку $\lambda(r) = r^\rho$, $\rho \in \mathbb{N}$ умова (1) при $k = \rho$ не виконується. Тобто, в цьому випадку $\lambda(r)$ не є мінімальною мажорантою зростання.

Деякі приклади функцій зростання λ як скінченного, так і нескінченного порядків, які є мінімальними мажорантами зростання для класів $\mathcal{E}_\lambda \subset S_\lambda^2$, а отже й таких, що задовольняють умову (1), наведено в роботі [5].

Через ρ^* і μ_* позначатимемо порядок і нижній порядок Пойя функції зростання λ [28, с. 14]:

$$\rho^* = \limsup_{r,t\to+\infty} \frac{\log\,\lambda(rt) - \log\,\lambda(r)}{\log\,t}, \qquad \mu_* = \liminf_{r,t\to+\infty} \frac{\log\,\lambda(rt) - \log\,\lambda(r)}{\log\,t}.$$

У випадку коли порядок Пойя ρ^* функції зростання λ є скінченним, наша теорема допускає таке уточнення.

Наслідок. *Нехай функція зростання* $\lambda(r)$ *така, що функція* $r^{m-1}\lambda'(r)$ $(m \geq 2)$ *неспадна на* $\mathbb{R}_+$ *і* $\rho^* < +\infty$. *Функція* λ *є мінімальною мажорантою зростання для* S_λ^m *тоді і лише тоді, коли співвідношення (1) виконується для деяких* a, b, l, *довільних* r_1, r_2 $(0 < r_1 < r_2)$, *і всіх* $k \in [\mu_*, \rho^*] \cap \mathbb{N}$.

Зауважимо (див. [28, с. 14]), що довільна функція зростання λ має скінченний порядок за Пойя ρ^* тоді і лише тоді, коли $\lambda(2r) = O\left(\lambda(r)\right), \ r \to +\infty$.

Допоміжні результати. Центральну роль в методі рядів Фур'є-Лапласа для субгармонійних в $\mathbb{R}^m$ $(m \geq 3)$ функцій та його застосувань до теорії розподілу значень відіграє таке поняття.

Означення 4 ([2]). Невід'ємна борелева міра μ в $\mathbb{R}^m$ $(m \geq 3)$, $0 \notin \operatorname{supp}\mu$ називається *λ-допустимою*, якщо при деяких сталих a, b, l виконується

$$\left| \int\limits_{r_1<|y|\leq r_2} p_k^{(m-2)/2}\left[\left(x, \frac{y}{|y|}\right)\right] \frac{d\mu(y)}{|y|^{k+m-2}} \right| \leq a(k+1)^l \left(\frac{\lambda(br_1)}{r_1^k} + \frac{\lambda(br_2)}{r_2^k}\right),$$

для всіх $r_1, \ r_2 \ (0 < r_1 < r_2), \ k \in \mathbb{Z}_+, \ x \in \mathbf{S}^{m-1}$.
Тут $(\cdot,\cdot)$ — скалярний добуток в $\mathbb{R}^m$, а $p_k^{(m-2)/2}(t)$ — поліноми Гегенбауера, які визначаються із розвинення [29, IX, § 3]

$$(1-2t\tau+\tau^2)^{(2-m)/2} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k^{(m-2)/2}(t)\tau^k, \qquad t \in [-1,1], \qquad \tau \in (0,1].$$

Для субгармонійних в $\mathbb{C}$ функцій $u(re^{i\theta})$ за звичай застосовують метод рядів Фур'є, який дозволяє розділити змінні r і θ. У цьому випадку поняття λ-допустимості невід'ємної борелевої міри має вигляд.

Означення 5 ([16,30]). Невід'ємна борелева міра μ в $\mathbb{C}$, $0 \notin \operatorname{supp}\mu$ називається *$\lambda-$ допустимою*, якщо

1) $N(r;\mu) \leq a\lambda(br)$, при деяких $a, b > 0$ і всіх $r > 0$;
2) при деяких $c, d > 0$ і $q \in \mathbb{R}$ виконується

$$\left| \int\limits_{r_1<|\zeta|\leq r_2} \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta^k} \right| \leq ck^q \left(\frac{\lambda(dr_1)}{r_1^k} + \frac{\lambda(dr_2)}{r_2^k}\right), \tag{2}$$

для всіх $r_1, \ r_2 \ (0 < r_1 < r_2), \ k \in \mathbb{N}$.

Борелеві λ-допустимі міри μ в $\mathbb{R}^m$ володіють такою характеризаційною властивістю.

Теорема G (Кондратюк-Васильків, [2],[16,30]). *Невід'ємна борелева міра μ в $\mathbb{R}^m$ $(m \geq 2)$, $0 \notin \operatorname{supp}\mu$ є мірою Ріса функції $u \in \Lambda_S^m$ тоді і лише тоді, коли μ є λ-допустимою.*

Проте, в подальшому, з метою уніфікації викладок наведемо таке твердження.

Твердження. *Для довільних $r_1, \ r_2 \ (0 < r_1 < r_2), \ k \in \mathbb{N}, \ x \in \mathbf{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$, виконується*

$$\left| \int\limits_{r_1<|y|\leq r_2} p_k^0\left[\left(x, \frac{y}{|y|}\right)\right] \frac{d\mu(y)}{|y|^k} \right| \leq ak^l \left(\frac{\lambda(br_1)}{r_1^k} + \frac{\lambda(br_2)}{r_2^k}\right), \tag{3}$$

при деяких $a, b > 0, \ l \in \mathbb{R}$, тоді і лише тоді, коли виконується (2) при деяких $c, d > 0$, $q \in \mathbb{R}$, і всіх $r_1, \ r_2 \ (0 < r_1 < r_2), \ k \in \mathbb{N}$.

Тут $p_k^0(t) = k^{-1}\cos(k \arccos\, t), \ t \in [-1,1]$ — поліноми Чебишева.

Доведення. Позначимо $\zeta = se^{i\varphi}$, $y = (s\cos\varphi, s\sin\varphi)$, $\varphi \in [-\pi, \pi]$, $s > 0$.

Нехай виконується (3). Візьмемо $x = (1,0) \in \mathbf{S}^1$. Для $k \in \mathbb{N}$, r_1, r_2 $(0 < r_1 < r_2)$, маємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{k}\left|\mathrm{Re}\int\limits_{r_1<|\zeta|\le r_2}\frac{d\mu(\zeta)}{\zeta^k}\right| &= \frac{1}{k}\left|\int\limits_{r_1<|y|\le r_2}\cos k\varphi\frac{d\mu(y)}{|y|^k}\right| = \\ &= \left|\int\limits_{r_1<|y|\le r_2}p_k^0\left[\left(x, \frac{y}{|y|}\right)\right]\frac{d\mu(y)}{|y|^k}\right| \le ak^l\left(\frac{\lambda(br_1)}{r_1^k} + \frac{\lambda(br_2)}{r_2^k}\right), \end{aligned} \tag{4}$$

при деяких $a, b > 0$, $l \in \mathbb{R}$. Подібно, для $x = (\cos(\pi/2k), \sin(\pi/2k)) \in \mathbf{S}^1$, $k \in \mathbb{N}$, довільних r_1, r_2 $(0 < r_1 < r_2)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{k}\left|\mathrm{Im}\int\limits_{r_1<|\zeta|\le r_2}\frac{d\mu(\zeta)}{\zeta^k}\right| &= \frac{1}{k}\left|\int\limits_{r_1<|y|\le r_2}\sin k\varphi\frac{d\mu(y)}{|y|^k}\right| = \frac{1}{k}\left|\int\limits_{r_1<|y|\le r_2}\cos\left(k\left(\frac{\pi}{2k}-\varphi\right)\right)\frac{d\mu(y)}{|y|^k}\right| = \\ &= \left|\int\limits_{r_1<|y|\le r_2}p_k^0\left[\left(x, \frac{y}{|y|}\right)\right]\frac{d\mu(y)}{|y|^k}\right| \le ak^l\left(\frac{\lambda(br_1)}{r_1^k} + \frac{\lambda(br_2)}{r_2^k}\right), \end{aligned} \tag{5}$$

при тих самих $a, b > 0$, $l \in \mathbb{R}$. Враховуючи (4) і (5), отримуємо (2) при $c = 2a$, $d = b$ і $q = l + 1$.

Навпаки, нехай тепер виконується (2). Для довільних r_1, r_2 $(0 < r_1 < r_2)$, $k \in \mathbb{N}$, $x = (\cos\theta, \sin\theta) \in \mathbf{S}^1$, $\theta \in [-\pi, \pi]$, маємо

$$\begin{aligned} \left|\int\limits_{r_1<|y|\le r_2}p_k^0\left[\left(x, \frac{y}{|y|}\right)\right]\frac{d\mu(y)}{|y|^k}\right| &= \frac{1}{k}\left|\int\limits_{r_1<|y|\le r_2}\cos(k(\theta-\varphi))\frac{d\mu(y)}{|y|^k}\right| = \\ &= \frac{1}{k}\left|\int\limits_{r_1<|y|\le r_2}(\cos k\theta\cos k\varphi + \sin k\theta\sin k\varphi)\frac{d\mu(y)}{|y|^k}\right| \le \\ &\le \frac{1}{k}\left|\int\limits_{r_1<|y|\le r_2}\cos k\varphi\frac{d\mu(y)}{|y|^k}\right| + \frac{1}{k}\left|\int\limits_{r_1<|y|\le r_2}\sin k\varphi\frac{d\mu(y)}{|y|^k}\right| = \\ &= \frac{1}{k}\left|\mathrm{Re}\int\limits_{r_1<|\zeta|\le r_2}\frac{d\mu(\zeta)}{\zeta^k}\right| + \frac{1}{k}\left|\mathrm{Im}\int\limits_{r_1<|\zeta|\le r_2}\frac{d\mu(\zeta)}{\zeta^k}\right| \le \frac{2}{k}\left|\int\limits_{r_1<|\zeta|\le r_2}\frac{d\mu(\zeta)}{\zeta^k}\right|. \end{aligned} \tag{6}$$

Для завершення доведення твердження залишилося врахувати співвідношення (2). □

Відзначимо (див. [29, IX, § 3]), що при $m \ge 2$, $k \in \mathbb{N}$

$$\max\left\{\left|p_k^{(m-2)/2}(t)\right| : t \in [-1,1]\right\} = p_k^{(m-2)/2}(1) = \begin{cases} (k+m-3)!/(k!(m-3)!), & m \ge 3; \\ k^{-1}, & m = 2, \end{cases}$$

а також
$$p_k^{(m-2)/2}(1) \le (m-1)k^{m-3}, \qquad k\in\mathbb{N}, \qquad m\ge 2.$$
Окрім того, $p_0^{(m-2)/2}(t)=1$ для всіх $t\in[-1,1]$ і $m\ge 3$.

Доведення теореми. Доведення твердження п. i) теореми в ідейному плані збігається з наведеним в [5]. Подамо його з метою повноти викладу. Спочатку наведемо таку лему.

Лема. *Нехай $m\in\mathbb{N}\cap[2,+\infty)$. Якщо функція зростання $\lambda(r)$ така, що функція $r^{m-1}\lambda'(r)$ — неспадна, де $\lambda'(r)$ означає правосторонню похідну, а $\widetilde{\lambda}(r)$ довільна мажоранта зростання для S_λ^m, то*

1. *$\lambda(r)\le a\widetilde{\lambda}(br)$, для деяких $a,b>0$ і всіх $r>0$;*
2. *кожну функцію $w\in\Lambda_\delta^m$ можна зобразити різницею $w=u-v$ субгармонійних в $\mathbb{R}^m$ функцій u і v скінченного $\widetilde{\lambda}$-типу таких, що $\mu_u=\mu_w^+$, $\mu_v=\mu_w^-$.*

Ця лема є субгармонійним варіантом відповідної леми з [5], її доведення таке ж, як і [5], і тому ми його опускаємо.

Доведення твердження п. i) теореми. Нехай λ — мінімальна мажоранта зростання для S_λ^m. Тоді з твердження п. 2 леми негайно випливає, що Λ_δ^m допускає канонічне зображення.

Навпаки, нехай Λ_δ^m допускає канонічне зображення. За Теоремою F для довільної міри $\mathcal{M}_\lambda^m$ існує функція w з Λ_δ^m така, що $\mu_w^+=\mu$. Оскільки Λ_δ^m допускає канонічне зображення, маємо $w=u-v$, де $u,v\in\Lambda_S^m$ і $\mu_u=\mu_w^+$. Отже, λ є мажорантою зростання для S_λ^m. Її мінімальність негайно випливає з твердження п. 1 леми, що завершує доведення твердження п. i) теореми.

Доведення твердження п. ii) теореми. Нехай виконується (1). Доведемо, що тоді будь-яка міра $\mu\in\mathcal{M}_\lambda^m$ є λ-допустимою. Для довільних $r_1,\ r_2$ $(0<r_1<r_2)$, $k\in\mathbb{N}$, $x\in\mathbf{S}^{m-1}$ $(m\ge 2)$, виконується

$$\left|\int\limits_{r_1<|y|\le r_2} p_k^{(m-2)/2}\left[\left(x,\frac{y}{|y|}\right)\right]\frac{d\mu(y)}{|y|^{k+m-2}}\right| \le \int\limits_{r_1<|y|\le r_2}\left|p_k^{(m-2)/2}\left[\left(x,\frac{y}{|y|}\right)\right]\right|\frac{d\mu(y)}{|y|^{k+m-2}}\le$$
$$\le p_k^{(m-2)/2}(1)\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{dn(t;\mu)}{t^{k+m-2}}\le p_k^{(m-2)/2}(1)\left(\frac{n(r_2;\mu)}{r_2^{k+m-2}}+(k+m-2)\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{n(t;\mu)}{t^{k+m-1}}dt\right).$$

З огляду на те, що $p_k^{(m-2)/2}(1)\le(m-1)k^{m-3}$ $(k\in\mathbb{N})$ і $n(r;\mu)r^{2-m}\le 2N(2r;\mu)\le 2a\lambda(2br)$, при деяких $a,b>0$ і всіх $r>0$, маємо

$$\left|\int\limits_{r_1<|y|\le r_2} p_k^{(m-2)/2}\left[\left(x,\frac{y}{|y|}\right)\right]\frac{d\mu(y)}{|y|^{k+m-2}}\right|\le 2a(m-1)k^{m-3}\left(\frac{\lambda(2br_2)}{r_2^k}+\right.$$
$$\left.+(k+m-2)\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{\lambda(2bt)}{t^{k+1}}dt\right)\le 2a(m-1)^2k^{m-2}\left(\frac{\lambda(2br_2)}{r_2^k}+\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{\lambda(2bt)}{t^{k+1}}dt\right),\quad k\in\mathbb{N}. \tag{7}$$

Зробивши заміну змінних в останньому інтегралі, і, скориставшись нерівністю (1), отримуємо

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{\lambda(2bt)}{t^{k+1}} dt \le Ak^l \left(\frac{\lambda(Br_1)}{r_1^k} + \frac{\lambda(Br_2)}{r_2^k} \right),$$

при деяких $A,\ B,\ l$ і всіх $k \in \mathbb{N}$.

З останньої нерівності та співвідношення (7) випливає, що для довільних $r_1,\ r_2$ $(0 < r_1 < r_2)$, $k \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbf{S}^{m-1}$ $(m \ge 2)$, виконується

$$\left| \int\limits_{r_1 < |y| \le r_2} p_k^{(m-2)/2} \left[\left(x, \frac{y}{|y|} \right) \right] \frac{d\mu(y)}{|y|^{k+m-2}} \right| \le A_1 k^L \left(\frac{\lambda(B_1 r_1)}{r_1^k} + \frac{\lambda(B_1 r_2)}{r_2^k} \right), \tag{8}$$

при деяких $A_1,\ B_1,\ L$.

При $k = 0$, у випадку $m \ge 3$, маємо

$$\begin{aligned} \left| \int\limits_{r_1 < |y| \le r_2} p_0^{(m-2)/2} \left[\left(x, \frac{y}{|y|} \right) \right] \frac{d\mu(y)}{|y|^{m-2}} \right| = \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dn(t;\mu)}{t^{m-2}} \le \frac{n(r_2;\mu)}{r_2^{m-2}} + \\ +(m-2) \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{n(t;\mu)}{t^{m-1}} dt \le 2N(2r_2;\mu) + N(r_2;\mu) \le 3N(2r_2;\mu) \le 3a\lambda(2br_2), \end{aligned} \tag{9}$$

де остання нерівність в (9) випливає з належності μ до $\mathcal{M}_\lambda^m$. З цих самих міркувань, у випадку $m = 2$, виконується п. 1) означення 5, що разом з (8),(9) і твердженням доведеним вище дає λ-допустимість міри μ. За характеризаційною властивостю для λ-допустимих мір (див. теорему G) отримуємо існування субгармонійної функції $u \in \Lambda_S^m$ такої, що $\mu_u = \mu$. Оскільки це справедливо для довільної міри μ з $\mathcal{M}_\lambda^m$, то λ є мажорантою зростання для S_λ^m. Її мінімальність негайно випливає з твердження п. 1 леми.

Навпаки, нехай λ — мінімальна мажоранта зростання для S_λ^m. Розглянемо міру $\mu \in \mathcal{M}_\lambda^m$, зосереджену на промені $P = \{y \in \mathbb{R}^m :\ y = (t, 0, \dots, 0),\ t \ge \alpha > 0\}$, таку, що $N(r;\mu) = \lambda(r)$. Для цього досить взяти $n(r;\mu) = r\lambda'(r)$, при $m = 2$, і $n(r;\mu) = r^{m-1}\lambda'(r)/(m-2)$, при $m \ge 3$. З означень 2 і 3 випливає існування субгармонійної функції $u \in \Lambda_S^m$ такої, що $\mu_u = \mu$. В свою чергу, з теореми G, доведеного твердження і означень 4,5 отримуємо, що при деяких $a,\ b,\ l$, виконується

$$\left| \int\limits_{r_1 < |y| \le r_2} p_k^{(m-2)/2} \left[\left(x, \frac{y}{|y|} \right) \right] \frac{d\mu_u(y)}{|y|^{k+m-2}} \right| \le ak^l \left(\frac{\lambda(br_1)}{r_1^k} + \frac{\lambda(br_2)}{r_2^k} \right),$$

для всіх $k \in \mathbb{N},\ x \in \mathbf{S}^{m-1}$ і $r_1,\ r_2$ $(0 < r_1 < r_2)$.

Враховуючи зосередженість міри μ_u на P, маємо $(x = (x_1, 0, \dots, 0))$

$$p_k^{(m-2)/2}(1) \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dn(t;\mu_u)}{t^{k+m-2}} = \max_{x_1 \in [-1,1]} \left| p_k^{(m-2)/2}(x_1) \right| \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dn(t;\mu_u)}{t^{k+m-2}} \le ak^l \left(\frac{\lambda(br_1)}{r_1^k} + \frac{\lambda(br_2)}{r_2^k} \right).$$

Оскільки $p_k^{(m-2)/2}(1) = (k+m-3)!/(k!(m-3)!) \geq 1$ при $m \geq 3,\ k \in \mathbb{N}$ і $p_k^{(m-2)/2}(1) = k^{-1}$ при $m = 2,\ k \in \mathbb{N}$, то

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dn(t;\mu_u)}{t^{k+m-2}} \leq ak^q \left(\frac{\lambda(br_1)}{r_1^k} + \frac{\lambda(br_2)}{r_2^k} \right). \tag{10}$$

Проінтегруємо інтеграл в (10) два рази частинами, і оцінимо його знизу, враховуючи те, що $n(r;\mu_u)r^{2-m} \leq 2N(2r;\mu_u) = 2\lambda(2r)$. Для $m \geq 3$, маємо

$$\begin{aligned} \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dn(t;\mu_u)}{t^{k+m-2}} &\geq -\frac{n(r_1;\mu_u)}{r_1^{k+m-2}} + (k+m-2) \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{n(t;\mu_u)}{t^{k+m-1}} dt \geq \\ &\geq -\frac{2\lambda(2r_1)}{r_1^k} + \frac{(k+m-2)}{m-2} \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dN(t;\mu_u)}{t^k} \geq -\frac{2\lambda(2r_1)}{r_1^k} + \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dN(t;\mu_u)}{t^k} \geq \\ &\geq -\frac{2\lambda(2r_1)}{r_1^k} - \frac{N(r_1;\mu_u)}{r_1^k} + \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{N(t;\mu_u)}{t^{k+1}} dt \geq -\frac{3\lambda(2r_1)}{r_1^k} + \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{\lambda(t)}{t^{k+1}} dt, \qquad k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{11}$$

Для випадку $m = 2$, проводячи такі ж міркування, отримуємо

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dn(t;\mu_u)}{t^k} \geq -k\frac{3\lambda(2r_1)}{r_1^k} + k \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{\lambda(t)}{t^{k+1}} dt, \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{12}$$

Враховуючи (10), з (11) і (12) для довільних $r_1,\ r_2\ (0 < r_1 < r_2),\ k \in \mathbb{N}$ маємо

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{\lambda(t)}{t^{k+1}} dt \leq Ak^l \left(\frac{\lambda(Br_1)}{r_1^k} + \frac{\lambda(Br_2)}{r_2^k} \right),$$

при деяких $A,\ B,\ l$, що завершує доведення твердження п. ii) теореми. Теорему доведено повністю.

Доведення наслідку. Оскільки необхідна частина твердження наслідку негайно випливає з доведеної вище теореми, то потрібно встановити лише його достатню частину. Надалі, не зменшуючи загальності, вважатимемо, що $\lambda(r) = r^{\mu_*}\lambda(1)$ на півінтервалі $[0, 1)$. Доведення достатності проведемо за схемою, подібною до застосованої в статті [31].

Отже, нехай співвідношення (1) виконується для довільних $r_1,\ r_2\ (0 < r_1 < r_2)$, при деяких $a,\ b,\ l$ і всіх $k \in [\mu_*, \rho^*] \cap \mathbb{N}$. Візьмемо, для $k > \rho^*$, ε таке, що $0 < \varepsilon < k_0 - \rho^*$, де $k_0 = \min\{n \in \mathbb{N} : n > \rho^*\}$. З означення порядку Пойя ρ^* випливає існування таких $r_0, t_0 > 1$, що для будь-яких $r \geq r_0,\ t \geq t_0$ виконується $\lambda(rt) \leq \lambda(r)t^{\rho^*+\varepsilon}$. Звідси, з урахуванням останньої нерівності, для довільних $r_1,\ r_2\ (r_0 \leq r_1 < r_2)$ і всіх $k > \rho^*$,

$k \in \mathbb{N}$, маємо

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{\lambda(t)}{t^{k+1}}dt \le \int_{r_1}^{+\infty} \frac{\lambda(t)}{t^{k+1}}dt = \frac{1}{r_1^k} \int_{1}^{+\infty} \frac{\lambda(r_1 t)}{t^{k+1}}dt = \frac{1}{r_1^k} \left(\int_{1}^{t_0} \frac{\lambda(r_1 t)}{t^{k+1}}dt + \int_{t_0}^{+\infty} \frac{\lambda(r_1 t)}{t^{k+1}}dt \right) \le$$
$$\le \frac{1}{r_1^k} \left(\lambda(r_1) t_0^{\rho^*+\varepsilon} \int_{1}^{t_0} \frac{dt}{t^{k+1}} + \lambda(r_1) \int_{t_0}^{+\infty} t^{\rho^*+\varepsilon-k-1}dt \right) \le a\frac{\lambda(r_1)}{r_1^k},$$

при деякому $a > 0$. З неперервності і монотонності функції λ випливає існування такого $b > 0$, що для довільних $r_1,\ r_2$ $(1 \le r_1 < r_2)$ і всіх $k > \rho^*$ виконується

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{\lambda(t)}{t^{k+1}}dt \le a\frac{\lambda(br_1)}{r_1^k}. \tag{13}$$

Враховуючи поведінку функції λ на $[0, 1)$ та (13), для довільних $r_1,\ r_2$ $(0 < r_1 < 1,\ r_2 \ge 1)$, $k > \rho^*$ знаходимо, що

$$\begin{gathered}\int_{r_1}^{r_2} \frac{\lambda(t)}{t^{k+1}}dt = \int_{r_1}^{1} \frac{\lambda(t)}{t^{k+1}}dt + \int_{1}^{r_2} \frac{\lambda(t)}{t^{k+1}}dt \le \lambda(1) \int_{r_1}^{1} t^{\mu_*-k-1}dt + a\lambda(b) \le \\ \le\lambda(1)\frac{1}{k-\mu_*}\frac{r_1^{\mu_*}}{r_1^k} + a\lambda(b) \le \frac{1}{k_0-\mu_*}\frac{\lambda(r_1)}{r_1^k} + a\frac{\lambda(b)}{\lambda(1)}\frac{\lambda(r_1)}{r_1^k} \le a_1\frac{\lambda(r_1)}{r_1^k},\end{gathered} \tag{14}$$

при деякому $a_1 > 0$. Крім того, для довільних $r_1,\ r_2$ $(0 < r_1 < r_2 < 1)$, $k > \rho^*$ також маємо

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{\lambda(t)}{t^{k+1}}dt \le a_1\frac{\lambda(r_1)}{r_1^k}. \tag{15}$$

З огляду на (13)–(15), існують такі $A, B > 0$, що для довільних $r_1,\ r_2$ $(0 < r_1 < r_2)$ і всіх $k > \rho^*$ виконується

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{\lambda(t)}{t^{k+1}}dt \le A\frac{\lambda(Br_1)}{r_1^k}. \tag{16}$$

Далі, якщо $\mu_* \le 1$, то, враховуючи останню нерівність, отримуємо, що співвідношення (1) виконується для довільних $r_1,\ r_2$ $(0 < r_1 < r_2)$, деяких сталих $a,\ b,\ l$ і всіх $k \in \mathbb{N}$. З твердження п. ii) теореми випливає, що λ є мінімальною мажорантою зростання для S_λ^m.

Якщо ж $\mu_* > 1$, то візьмемо ε таке, що $0 < \varepsilon < \mu_* - k_1$, де $k_1 = \max\{n \in \mathbb{N} : n < \mu_*\}$. Тоді, для $k < \mu_*$, згідно з означенням нижнього порядку Пойя μ_*, існують такі $\tau_0, t_0 > 1$, що для будь-яких $\tau \ge \tau_0,\ t \ge t_0$ виконується $\lambda(\tau t) \ge \lambda(t)\tau^{\mu_*-\varepsilon} \ge \lambda(t)\tau^k$. Звідси для $t \in [t_0, r/\tau_0],\ r > t_0\tau_0$, маємо $\lambda(t)/t^{\mu_*-\varepsilon} \le \lambda(r)/r^{\mu_*-\varepsilon}$. Враховуючи цю нерівність, для довільних $r_1,\ r_2\ (t_0\tau_0 < r_1 < r_2)$ і всіх $k < \mu_*$ і поведінку функції $\lambda(r)$ на $[0,1)$, отримуємо

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{\lambda(t)}{t^{k+1}}dt \le \int_0^{r_2} \frac{\lambda(t)}{t^{k+1}}dt = \int_0^{t_0} \frac{\lambda(t)}{t^{k+1}}dt + \int_{t_0}^{r_2/\tau_0} \frac{\lambda(t)}{t^{k+1}}dt + \int_{r_2/\tau_0}^{r_2} \frac{\lambda(t)}{t^{k+1}}dt \le$$

$$\le \int_0^{t_0} \frac{\lambda(t)}{t^{k+1}}dt + \frac{\lambda(r_2)}{r_2^{\mu_*-\varepsilon}} \int_{t_0}^{r_2/\tau_0} t^{\mu_*-\varepsilon-k-1}dt + \frac{\lambda(r_2)}{k}\frac{\tau_0^k}{r_2^k} \le$$

$$\le \int_0^{t_0} \frac{\lambda(t)}{t^{k+1}}dt + \frac{\lambda(r_2)}{r_2^{\mu_*-\varepsilon}} \frac{1}{\mu_*-\varepsilon-k}\left(\frac{r_2}{\tau_0}\right)^{\mu_*-\varepsilon-k} + \frac{\lambda(r_2)}{k}\frac{\tau_0^k}{r_2^k} \le a\frac{\lambda(r_2)}{r_2^k}.$$

Далі, як і раніше, існують сталі $C, D > 0$ такі, що для довільних $r_1,\ r_2\ (0 < r_1 < r_2)$ і всіх $k < \mu_*$ виконується

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{\lambda(t)}{t^{k+1}}dt \le C\frac{\lambda(Dr_2)}{r_2^k}.$$

Це співвідношення разом з (16) і міркуваннями, проведеними вище у випадку $\mu_* \le 1$, завершує доведення наслідку.

Завершальні зауваження. В статті [15] Б. Хабібуллін ввів класи функцій скінченного (λ,ε)-типу, для яких теорема B набирає завершеного вигляду. Точніше, нехай $\lambda(r)$ — функція зростання і функція $\varepsilon(r)$ така ж, як в теоремі B. Дійснозначна функція M на $[0,+\infty)$ називається *функцією скінченного* (λ,ε)*-типу*, якщо існують додатні сталі $A,\ \alpha,\ B,\ \beta$ такі, що

$$M(r) \le A\left(\frac{1}{\varepsilon(r)}\right)^{\alpha} \lambda\left(r + \beta\varepsilon(r)r\right) + B$$

для всіх достатньо великих r.
Клас $\lambda^{(\varepsilon)}$ мероморфних функцій визначається як множина всіх мероморфних в $\mathbb{C}$ функцій f, для яких характеристика $T(r,f)$ — функція скінченного (λ,ε)-типу. Підклас класу $\lambda^{(\varepsilon)}$, що складається з цілих функцій, позначається через $\lambda_E^{(\varepsilon)}$. Зокрема, при $\varepsilon \equiv \mathrm{const}$ отримуємо відповідно відомі класи Λ та Λ_E скінченного λ-типу. Наслідком з теореми B є таке твердження.

Теорема H (Хабібуллін, [15]). *Клас $\lambda^{(\varepsilon)}$ збігається з полем часток $\lambda_E^{(\varepsilon)}/\lambda_E^{(\varepsilon)}$ алгебри $\lambda_E^{(\varepsilon)}$.*

Класи скінченного (λ,ε)-типу є більш адаптованими до задач, пов'язаних з даною тематикою. Зокрема, розгляд проблеми факторизації для таких класів, у випадку мажорант швидкого зростання, приводить до суттєво якісніших результатів.

Виглядає правдоподібним, що в класі субгармонійних в $\mathbb{R}^m$ функцій скінченного (λ,ε)-типу можна застосувати метод рядів Фур'є. Для цього автор планує присвятити окрему статтю.

Автор висловлює щиру подяку науковому керівникові Я.В. Васильківу за постановку задачі та грунтовне обговорення історії питання і отриманих результатів, Б.Н. Хабібулліну, який люб'язно надав нам відбитки всіх своїх робіт, присвячених цій та суміжним з нею тематикам, а також рецензенту, за чисельні зауваження, які дозволили зробити статтю повнішою та прозорішою.

ЛІТЕРАТУРА

1. Arsove M. G. *Function representable as differences of subharmonic functions* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1953. – V.75.– P.327–365.
2. Кондратюк А. А. *Сферические гармоники и субгармонические функции* // Матем. сб. – 1984. – Т.125, №2. – С. 147–166.
3. Rubel L. A., Taylor B. A. *A Fourier series method for meromorphic and entire functions* // Bull. Soc. Math. France.– 1968. – V.96.– P. 53–96.
4. Khabibullin B. N. *The representation of meromorphic function as the quotient of entire functions and Paley problem in $\mathbb{C}^n$: survey of some results* // MAG.– 2002.– V.9, №2.– P. 146–167.
5. Kondratyuk A. A., Vasyl'kiv Ya. V. *Growth majorants and quotient representations of meromorphic functions* // CMFT.– 2001.– V.1, №2.– P.595–606.
6. Miles J. B. *Quotient representations of meromorphic functions* // J. d'Analyse Math.– 1972.– V.25.– P. 371–388.
7. Rubel L. A. Entire and Meromorphic Functions.– Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg, 1996.– 187 p.
8. Кондратюк А. А. Ряды Фурье и мероморфные функции.– Львов: Выща шк., 1988. – 195 с.
9. Хабибуллин Б. Н. *Множества единственности в пространствах целых функций одной переменной* // Изв. АН СССР. Сер. матем.– 1991.– Т.55, №5.– С. 1101–1123.
10. Хабибуллин Б. Н. *Наименьшая плюрисупергармоническая мажоранта и мультипликаторы целых функций* // Сиб. матем. ж.– 1992.– Т.33, №1.– С. 173–178.
11. Хабибуллин Б. Н. *Теорема о найменшей мажоранте и ее применения. I. Целые и мероморфные функции* // Изв. РАН. Сер. матем.– 1993.– Т.57, №1.– С. 129–146.
12. Хабибуллин Б. Н. *О нулевых множествах для целых функций и представлении мероморфных функций* // Матем. заметки.– 1996.– Т.59, №4.– С. 611–617.
13. Khabibullin B. N. *Dual approach to certain questions for weighted spaces of holomorphic functions* // The Proceeding of the Conference "Entire Functions in Modern Analysis" (Tel-Aviv, Dec. 14–19, 1997).– 2001.– V.15.– P. 207–219.
14. Хабибуллин Б. Н. *Двойственное представление суперлинейных функционалов и его применения в теории функций. II* // Изв. РАН. Сер. матем.– 2001.– Т.65, №5.– С. 167–190.
15. Хабибуллин Б. Н. *Рост целых функций с заданными нулями и представления мероморфных функций* // Матем. замет.– 2003.– Т.73, №1.– С. 120–134.
16. Васильків Я. В. *Деякі властивості δ-субгармонічних функцій скінченного λ-типу* // Вісн. Львів. у-ту. Сер. мех.-мат.– 1983.– Вип. 21.– С. 14–21.
17. Веселовська О. В. *Аналог теоремы Майлза для δ-субгармонических в $\mathbb{R}^n$ функций* // Укр. мат. ж.– 1984.– Т.36, №6.– С. 694–698.
18. Гольдберг А. А. *О представлении мероморфной функции в виде частного целых функций* // Изв. вузов. Математика.– 1972.– №10. – С. 13–17.
19. Bergweiler W. *A question of Gol'dberg concerning entire functions with prescribed zeros* // J. d'Analyse Math.– 1994.– V.63.– P. 121–129.
20. Rubel L. A. *A survey of a Fourier series method for meromorphic functions* // Lect. Not. in Math.– 1973.– V.336.– P. 51–62.
21. Skoda H. *Sous-ensembles analytique ordre fini ou infini dans $\mathbb{C}^n$* // Bull. Soc. Math. France.– 1972.– V.100, №4.– P. 353–408.
22. Winkler J. *Über minimale Maximalbeträge kanonischer Weierstrassprodukte unendlicher Ordnung* // Result. Math.– 1981.– V.4, №1.– P. 102–116.

23. Bergweiler W. *Canonical product of infinite order* // J. Reine Angew. Math.– 1992.– V.490.– P. 85–107.

24. Винницький Б. В., Шепарович І. Б. *Про інтерполяційні послідовності деяких класів цілих функцій* // Матем. студії.– 1999.– Т. 12, №1.– С. 76–84.

25. Васильків Я. В., Лизун О. Я. *Про мажоранти зростання цілих функцій* // Вісн. Львів. у-ту, сер. мех.-мат.– 2001.– Вип. 59.– С. 51–56.

26. Taylor B. A. *The filds of quotient of some rings of entire functions* // Proc. Symp. Pure. Math., Amer. Math. Soc. Providence, R. I.– 1968.– V.11.– P. 468–474.

27. Kujala R. O. *Functions of finite λ-type in several complex variables* // Trans. Amer. Math. Soc.– 1971.– V.161.– P. 327–358.

28. Гольдберг А. А., Левин Б. Я., Островский И. В. Целые и мероморфные функции. // Итоги наук и техн. ВИНИТИ. Соврем. проблемы мат. Фундам. напр.– 1990.– Т.85.– С. 5–186.

29. Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп.– М.: Наука, 1965.– 588 с.

30. Василькив Я. В. *Некоторые свойства δ-субгармонических функций конечного λ-типа* // В сб. "Материалы 9 Конф. мол. ученых Ин-та прикл. проб. мех. и мат. АН УССР, Львов, 10–14 мая 1982 г., ч. 2"– 1982.– С. 16–22/ Рукопись деп. в ВИНИТИ 10 января 1984, №324–84.

31. Васильків Я. В., Кондратюк А. А. *Узагальнені умови Ліндельофа скінченності λ-типу субгармонійної функції* // Укр. мат. журн.– 2002.– Т.54, №2.– С. 276–279.

Львівський національний університет ім. Івана Франка,
механіко-математичний факультет

Надійшло 12.05.2003
Після переробки 4.09.2003