УДК 519.21

Н. А. Ружевич, І. Б. Киричинська

АСИМПТОТИЧНА НОРМАЛЬНІСТЬ АДИТИВНОГО ФУНКЦІОНАЛУ ВІД МАРКІВСЬКОГО ВИПАДКОВОГО БЛУКАННЯ

N. A. Ruzhevych, I. B. Kyrychyns'ka *Asymptotic normality of an additive functional on Markov random walks*, Matematychni Studii, **20** (2003) 101–106.

Conditions for asymptotic normality of the additive functional distribution on nonrecurrent Markov random walks are established.

Н. А. Ружевич, И. Б. Киричинская *Асимптотическая нормальность аддитивного функционала от марковского случайного блуждания* // Математичні Студії. – 2003. – Т.20, №1. – C.101–106.

Найдены условия, при которых распределение аддитивного функционала на нерекурентном марковском блуждании есть асимптотически нормальным.

Розглянемо марківське випадкове блукання $\{X_k\}$ з множиною значень $\mathbb{Z}_+$ та ймовірностями переходу за один крок $P\left(X_{k+1}=n+1 \,|X_k=n\right) = p_n$, $P\left(X_{k+1}=n \,|\, X_k=n\right) = r_n = 1-p_n$, $n \in \{0,1,\dots\}$, і на цьому ланцюгу адитивний функціонал $\alpha_n = \sum\limits_{k=0}^{n} f\left(X_k\right)$, де $f\left(k\right)=f_k$, $k\in\{0,1,\dots\}$, — послідовність дійсних чисел. З цим адитивним функціоналом та марківським блуканням можна пов'язати два дискретні процеси з незалежними приростами $\xi_m = \sum\limits_{j=0}^{m} \nu_j$, $\eta_m = \sum\limits_{j=0}^{m} f_j\nu_j$, де ν_j — час перебування випадкового блукання у стані j. Випадкові величини ν_j — незалежні й геометрично розподілені з відповідними параметрами p_j, тобто $P\left(\nu_j=n\right)=p_j r_j^{n-1}$ і $M\nu_j = 1/p_j$, $r_j = 1-p_j$, $n\in\{1,2,\dots,\}$ $j\in\{0,1,\dots\}$. Зауважимо, що $\eta_m=\alpha_{\xi_m}$.

У статті досліджується асимптотична поведінка умовного розподілу адитивного функціоналу η_m за умови $\xi_m=n$, коли $m\to\infty$, $n\to\infty$. Зазначимо, що в [1] розглядався випадок, коли ймовірності p_j відокремлені від нуля, тобто припускалось, що $\inf\limits_j p_j>0$. У цій статті отримано твердження, подібне до теореми з [1] для випадку

$$\lim_{j\to\infty} p_j = 0. \tag{1a}$$

Зазначимо також, що граничні теореми для адитивних функціоналів на рекурентному випадковому блуканні розглядались в [2].

Надалі припускатимемо, що

$$m=o(n), \tag{2}$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 60F05, 60F17.

а також, як і в [1], що

$$n \sim \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{p_j}, \quad n \to \infty. \tag{3}$$

Відзначимо, що $M\xi_m = \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{p_j}$.

Наведене тут доведення в значній своїй частині повторює доведення з [1], і тому ми його подаємо без зайвої деталізації. Як і в [1], для знаходження асимптотичного умовного розподілу η_m застосовано метод характеристичних функцій та метод перевалу. А саме, досліджується асимптотична поведінка умовної характеристичної функції випадкової величини η_m за умови $\xi_m = n$, коли $n, m \to \infty$. Для цієї характеристичної функції вказано певне інтегральне зображення, до якого застосовується метод перевалу.

Теорема. *Нехай виконується (1а) і умови*

$$\sup_j \frac{|f_j|}{p_j} < \infty, \tag{1б}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} f_j^2 \frac{r_j}{p_j^2} = \infty, \tag{4а}$$

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\sum\limits_{j=0}^{m} \frac{f_j}{p_j}}{\sqrt{\sum\limits_{j=0}^{m} f_j^2 r_j / p_j^2}} = 0, \tag{4б}$$

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{m} \frac{f_j}{p_j^2} = 0, \tag{4в}$$

де m, n задовольняють (2). Тоді умовний розподіл величини ${}^{\eta_m}\!/\!\sqrt{D\eta_m}$ за умови $\xi_m = n$ є асимптотично нормальним $N(0,1)$, тобто

$$\lim_{m\to\infty} M\left\{\exp\left\{it\sum_{j=0}^{m} f_j \nu_j \Big/ \sqrt{\sum_{j=0}^{m} f_j^2 r_j/p_j^2}\right\}\,\middle|\,\sum_{j=0}^{m} \nu_j = n\right\} = \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}$$

для m, n, що задовольняють (2), (3).

Зауваження. Відзначимо, що

$$D\eta_m = \sum_{j=0}^{m} \frac{f_j^2 r_j}{p_j^2}, \quad \frac{\sum\limits_{j=0}^{m} \frac{f_j}{p_j}}{\sqrt{\sum\limits_{j=0}^{m} f_j^2 r_j/p_j^2}} = \frac{M\eta_m}{\sqrt{D\eta_m}}.$$

Крім того, в теоремі з [1] у зв'язку з тим, що p_j відокремлені від нуля, умови (4а) і (4б) спрощуються відповідно до вигляду $\sum\limits_{j=0}^{m} f_j^2 r_j = \infty$, $\lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{j=0}^{m} \frac{f_j}{p_j} \left(\sum\limits_{j=0}^{m} f_j^2 r_j\right)^{-1/2} = 0$.

Доведення теореми. Позначимо $\varphi_m(u,z) = Me^{iu\eta_m}z^{\xi_m}$. Тоді

$$\varphi_m(u,z) = \prod_{j=0}^{m} \frac{p_j e^{iuf_j} z}{1 - r_j e^{iuf_j} z},$$

$$Me^{iu\eta_j} I(\xi_m = n) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \varphi_m(u,z) z^{-n-1} dz,$$

де C — довільний контур, що лежить в області аналітичності функції $\varphi_m(u,z)$ по z і охоплює точку 0. Звідси, як і в [1],

$$\varphi_m(u|n) = e^{iu\sum\limits_{j=0}^{m} f_j} \frac{I_{m,n}(u)}{I_{m,n}(0)}, \tag{5}$$

де

$$\varphi_m(u|n) = M\left(e^{iu\eta_m}|\xi_m = n\right), \quad I_{m,n} = \int\limits_C \left(z^{n-m}\prod_{j=0}^{m}\left(1 - r_j e^{iuf_j} z\right)\right)^{-1} dz.$$

Для обчислення $I_{m,n}(u)$ виберемо такий контур C, що складається з відрізка $[AB]$ $(A = x_m - i\rho, \quad B = x_m + i\rho)$ і дуги $\smile BA$ кола з центром у точці 0 та радіусом $R_m = \sqrt{x_m^2 + \rho^2}$, якщо коло обходити проти годинникової стрілки, де $0 < x_m < \inf\limits_{j \le m} \frac{1}{r_j}$, а $\rho > 0$ — достатньо мале число таке, що $R_m < \inf\limits_{j \le m} \frac{1}{r_j}$. Позначимо $C_1 = [A,B]$, $C_2 = \smile BA$, а вигляд x_m уточнимо пізніше. Тоді

$$I_{m,n}(u) = I_{m,n}^1(u) + I_{m,n}^2(u), \tag{6}$$

де

$$I_{m,n}^k = \int\limits_{C_k} e^{\psi_{m,n}(u,z)} dz, \quad k = 1,2,$$

а $\psi_{m,n}(u,z)$ — однозначна вітка $\mathrm{Ln}\left(z^{n-m}\prod\limits_{j=0}^{m}\left(1 - r_j e^{iuf_j} z\right)\right)^{-1}$ на C.

Для скорочення запису вживатимемо позначення $I_{m,n}^k(a) = I_k(a)$. Рівняння для знаходження точки перевалу матиме вигляд

$$\sum_{j=0}^{m}\left(1 - r_j e^{iuf_j} z\right)^{-1} = n + 1. \tag{7}$$

Позначимо через $z_{m,n}(u)$ той неперервний розв'язок цього рівняння, для якого $z_{m,n}(0) \in \left[0, \inf\limits_{j \le m} \frac{1}{r_j}\right)$. Подібно, як і в [1], можна довести, що цей розв'язок існує і єдиний для досить малих u і досить великих m. Наступна лема — така ж, як і в [1], але за умов теореми, яку доводимо тут, доводиться простіше, ніж в [1].

Лема. *За умов теореми*

$$\lim_{m \to \infty} z_{m,n}(0) = 1.$$

Доведення. Використовуючи позначення $z(0) = z_{m,n}(0)$, з (7) отримаємо

$$\sum_{j=0}^{m} (1 - r_j z(0))^{-1} = n + 1.$$

Звідси, оскільки $z(0) \in \left[0, \inf\limits_{j \le m} \frac{1}{r_j}\right)$, випливає нерівність $n + 1 \le \frac{m+1}{1 - r_m^* z(0)}$, де $\inf\limits_{j \le m} \frac{1}{r_j} = \frac{1}{r_m^*}$, а тому згідно з (1а) і (2) $z(0) \ge \frac{1}{r_m^*}\left(1 - \frac{m+1}{n+1}\right) \to 1$, якщо $n \to \infty$. Отже, $z(0) \ge 1$.

З іншого боку, оскільки $z(0) < \frac{1}{r_m^*}$, то за умовою (1а) $z(0) \le 1$ при $m \to \infty$, що і доводить лему. □

Повернемось до доведення теореми. Для цього, вибираючи контур C, вважатимемо, що $x_m = z(0)$.

Позначимо $D_{m,n}(u) = \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\psi_{m,n}(u, z(u))$. Тоді за умовою (4а) і лемою,

$$D_{m,n}(u) \sim D_{m,n}(0) \sim D\eta_m, \quad n \to \infty. \tag{8}$$

Обчислимо тепер $I_1(u)$, використовуючи розклад в ряд Тейлора функції $\psi_{m,\,n}(u,\ z)$ в околі точки $z(u)$ з точністю до $o\left((z - z(u))^2\right)$. Тоді з (4а) і (8) одержимо, що для $u = \frac{t}{\sqrt{D\eta_m}}$ і фіксованого $t \in \mathbb{R}$ при $n \to \infty$

$$I_1(u) \ \sim \frac{i\sqrt{2\pi}\exp\left\{\psi_{m,n}(u, z(u))\right\}}{\sqrt{\frac{\partial^2}{\partial z^2}\psi_{m,n}(u, z(u))}}. \tag{9}$$

Крім того, за умовами (1а), (1б) можна довести, що при $m,\ n \to \infty$ і для довільного $\lambda \in (0,1)$

$$|I_2(u)| = \exp\left\{\psi_{m,n}(0, z(0))\right\} O\left(\exp\left\{-\frac{\lambda}{2}\rho^2 D_{m,n}(0)\right\}\right). \tag{10}$$

Розглянемо тепер асимптотичну формулу для величини

$$g_{m,n}(u) = \exp\left\{\psi_{m,n}(u, z(u)) - \psi_{m,n}(0, z(0))\right\}, \tag{11}$$

де $u = \frac{t}{\sqrt{D\eta_m}}$. Використовуючи для цього розклад за формулою Тейлора в околі точки $u = 0$ з точністю до $o(u^2)$, отримаємо при фіксованому $t \in \mathbb{R}$ і $n \to \infty$

$$g_{m,n}(u) \sim \exp\left\{iA_{m,n}u - B_{m,n}\frac{u^2}{2}\right\}, \tag{12}$$

де

$$iA_{m,n} = i\left(\sum_{j=0}^{m}\frac{f_j}{1 - r_j z(0)} - \sum_{j=0}^{m} f_j\right) + \frac{z'(0)}{z(0)},$$

$$B_{m,n} = z(0)\sum_{j=0}^{m}\frac{f_j^2 r_j}{(1 - r_j z(0))^2} - 2iz'(0)\sum_{j=0}^{m}\frac{f_j r_j}{(1 - r_j z(0))^2} -$$

$$-(z'(0))^2\left\{\sum_{j=0}^{m}\frac{r_j^2}{(1 - r_j z(0))^2} + \frac{1}{z(0)}\sum_{j=0}^{m}\frac{r_j}{1 - r_j z(0)} - \frac{1}{z^2(0)}\right\} - \frac{z''(0)}{z(0)}.$$

Далі зауважимо, що оскільки при $m \to \infty$ з (1а) і (3) випливає $\sum\limits_{j=0}^{m} \frac{r_j}{p_j^2} > \sum\limits_{j=0}^{m} \frac{1}{p_j} \sim n$, то з (1а), (1б), (4б) і (4в) одержимо

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\sum\limits_{j=0}^{m} \frac{f_j r_j}{p_j^2}}{\sum\limits_{j=0}^{m} \frac{r_j}{p_j^2}} = 0. \tag{13}$$

Обчислимо тепер $z'(0)$ і $z''(0)$, двічі диференціюючи (7) як неявну функцію у точці $u = 0$. Тоді згідно з доведеною лемою та (1а), (1б), (4а), (12), (13) при фіксованому $t \in \mathbb{R}$ і $n \to \infty$ отримаємо

$$g_{m,n}\left(\frac{t}{\sqrt{D\eta_m}}\right) \sim \exp\left\{ it\frac{A_{m,n}}{\sqrt{D\eta_m}} - \frac{t^2}{2}\frac{B_{m,n}}{D\eta_m}\right\}, \tag{14}$$

де

$$\frac{A_{m,n}}{\sqrt{D\eta_m}} \sim \frac{\sum\limits_{j=0}^{m} \frac{f_j}{p_j} - \sum\limits_{j=0}^{m} f_j}{\sqrt{\sum\limits_{j=0}^{m} \frac{f_j^2 r_j}{p_j^2}}},$$

$$\frac{B_{m,n}}{D\eta_m} \sim 1 + \frac{1}{\sum\limits_{j=0}^{m} \frac{f_j^2 r_j}{p_j^2}} \left(\frac{\sum\limits_{j=0}^{m} \frac{f_j r_j}{p_j^2}}{\sum\limits_{j=0}^{m} \frac{r_j}{p_j^2}} \left(-\sum_{j=0}^{m} \frac{r_j}{p_j^2} - 1 \right) - \frac{1}{\sum\limits_{j=0}^{m} \frac{r_j}{p_j^2}} \left(\sum_{j=0}^{m} \frac{f_j^2 r_j}{p_j^2} + 2\sum_{j=0}^{m} \frac{f_j^2 r_j^2}{p_j^3} \right) \right).$$

З умов (1а), (1б), (4а), (13) при $m \to \infty$ випливає

$$\frac{B_{m,n}}{D\eta_m} \to 1, \tag{15}$$

а тому згідно з (14) $\left|g_{m,n}\left(\frac{t}{\sqrt{D\eta_m}}\right)\right| \sim e^{-\frac{t^2}{2}}$ при $n \to \infty$, $t \in \mathbb{R}$. Тоді звідси і з (8), (10), (11) одержимо

$$\frac{\left|I_2\left(\frac{t}{\sqrt{D\eta_m}}\right)\right|}{\left|I_1\left(\frac{t}{\sqrt{D\eta_m}}\right)\right|} = e^{\frac{t^2}{2}} O\left(\exp\left\{-\frac{\lambda}{2}\rho^2 D_{m,n}(0)\right\} \sqrt{D_{m,n}\left(\frac{t}{\sqrt{D\eta_m}}\right)}\right) = o(1)$$

згідно з (4а) і (9), тобто $I_2\left(\frac{t}{\sqrt{D\eta_m}}\right) = o\left(I_1\left(\frac{t}{\sqrt{D\eta_m}}\right)\right)$, якщо $m \to \infty$, $t \in \mathbb{R}$. Отже, згідно з (6) $I_{m,n}(u) \sim I_1(u) + o(I_1(u))$ при $u = \frac{t}{\sqrt{D\eta_m}}$, $t \in \mathbb{R}$, $m, n \to \infty$, а тому, згідно з (8)

$$I_{m,n}(u) \sim i\sqrt{2\pi}\frac{\exp(\psi_{m,n}(u, z(u)))}{\sqrt{\frac{\partial^2}{\partial z^2}\psi_{m,n}(u, z(u))}}$$

при $u = \frac{t}{\sqrt{D\eta_m}}$, $t \in \mathbb{R}$, $m, n \to \infty$.

Звідси за умовами (5) і (11) отримаємо при $m, n \to \infty$

$$\varphi_m\left(\frac{t}{\sqrt{D\eta_m}}|n\right) \sim \exp\left\{it\sum_{j=0}^{m}\frac{f_j}{\sqrt{D\eta_m}}\right\} g_{m,n}\left(\frac{t}{\sqrt{D\eta_m}}\right)\sqrt{\frac{D_{m,n}(0)}{D_{m,n}\left(\frac{t}{\sqrt{D\eta_m}}\right)}}. \qquad (16)$$

Враховуючи, що згідно з (4б) при $m \to +\infty$

$$\frac{\sum\limits_{j=0}^{m} f_j + A_{m,n}}{\sqrt{D\eta_m}} \sim \frac{\sum\limits_{j=0}^{m}\frac{f_j}{p_j}}{\sqrt{\sum\limits_{j=0}^{m}\frac{f_j^2 r_j}{p_j^2}}} \to 0,$$

з (14) при $m, n \to \infty$ і фіксованому $t \in \mathbb{R}$ випливає

$$\exp\left\{it\sum_{j=0}^{m}\frac{f_j}{\sqrt{D\eta_m}}\right\} g_{m,n}\left(\frac{t}{\sqrt{D\eta_m}}\right) \sim \exp\left\{it\frac{\sum\limits_{j=0}^{m} f_j + A_{m,n}}{\sqrt{D\eta_m}}\right\}\exp\left\{-\frac{t^2}{2}\frac{B_{m,n}}{D\eta_m}\right\}.$$

Отже, згідно з (15), при $m, n \to +\infty, t \in \mathbb{R}$

$$\exp\left\{it\sum_{j=0}^{m}\frac{f_j}{\sqrt{D\eta_m}}\right\} g_{m,n}\left(\frac{t}{\sqrt{D\eta_m}}\right) \sim e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Тоді з (9) і (16) при $m, n \to \infty$, $t \in \mathbb{R}$ отримаємо

$$\varphi_m\left(\frac{t}{\sqrt{D\eta_m}}|n\right) \sim e^{-\frac{t^2}{2}},$$

що і доводить теорему. □

Приклад. Умови теореми виконуються, якщо

$$f_j = \frac{(-1)^j}{j+1}, \quad p_j = \frac{1}{j+1}, \quad j \in \{0, 1, \dots\}.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Ружевич Н.А. *Про одну граничну теорему для адитивного функціоналу на нерекурентному ланцюгу Маркова* // Укр. мат. журн. – 1997.– Т. 49, №2. –С. 262–271.
2. Скороход А.В., Слободенюк Н.П. Предельные теоремы для случайных блужданий. – К.: Наук. думка, 1970. – 302 с.
3. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1987. – 688 с.

Національний університет "Львівська політехніка"

Надійшло 24.07.2002
Після переробки 20.06.2003